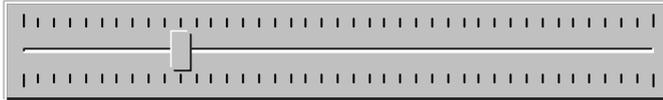


Lineare Funktionen - Einfluss der Parameter, Definition der Steigung -

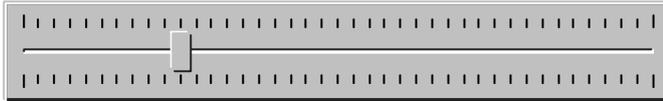
Beispiel:

Gegeben ist der Funktionsterm $f(x) = a \cdot x + b$. Untersuchen Sie den Einfluss von a und b .

Wähle:

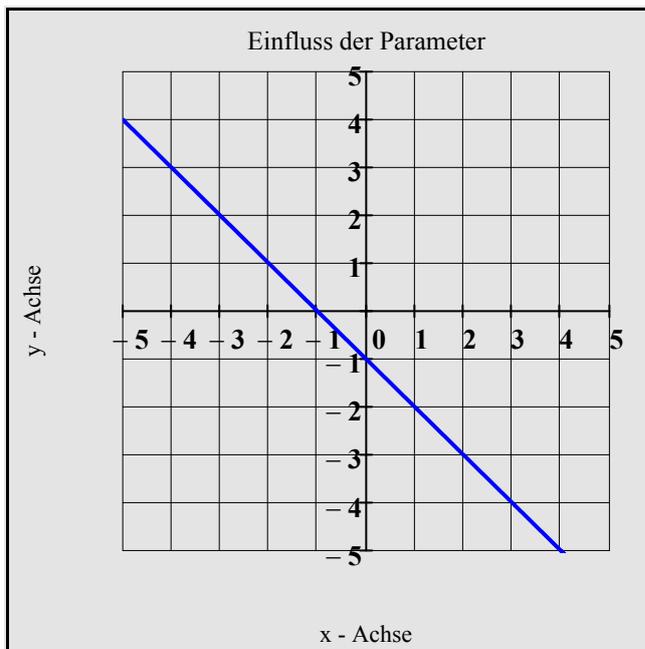


$a = -2 \dots 2$



$b = -2 \dots 2$

Definition des Funktionsterms: $f(x) := a \cdot x + b$



Funktionsterm: $f(x) = -x - 1$

Faktor a: $a = -1$

Faktor b: $b = -1$

Eigenschaft der Geraden:

Gerade = "streng monoton fallend"

Ergebnis:

a verursacht bei festem b eine "*Drehung*" der Geraden um den festen Punkt $(0, b)$.
 b verursacht bei festem a eine "*Parallelverschiebung*" der Geraden im Koordinatensystem.

Bezeichnungen:

a heißt "*Steigung*" der Geraden, b heißt "*Achsenabschnitt*" der Geraden.

Definition 1: Steigung m über das "Steigungsdreieck"

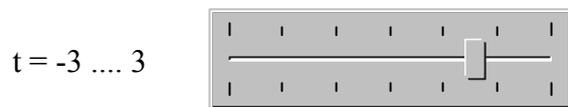
$$m = \frac{\text{"Höhendifferenz"}}{\text{"horizontale Entfernung"}} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

Definition des Funktionstems: $f(x, m, t) := m \cdot x + t$

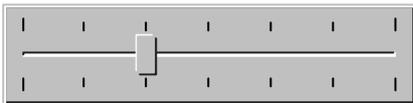
Beachte:

Die Schreibweise $f(x, m, t)$ beim Funktionsterm ermöglicht für beliebige x, m und t die Berechnung der Funktionswerte.

Wähle:



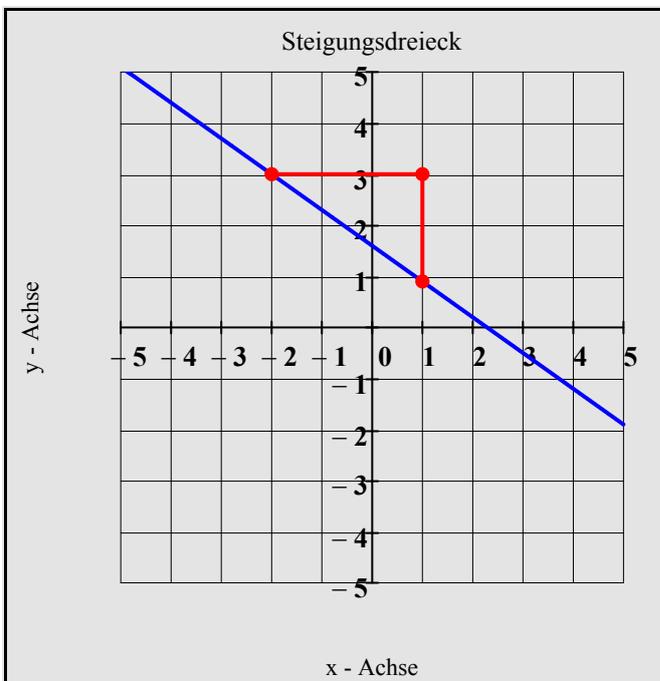
Verschiebung des Steigungsdreiecks:



horizontale Entfernung:



$\Delta x = 1, 2, 3$



$\Delta x = 3$

Funktionsterm: $f(x, m, t) = \frac{8}{5} - \frac{7 \cdot x}{10}$

Steigung: $m = -0.7$

Achsenabschnitt: $t = 1.6$

Eigenschaft der Geraden:

Gerade = "streng monoton fallend"

Definition 2: Steigung m über den "Neigungswinkel"

$$m = \frac{\text{"Höhendifferenz"}}{\text{"horizontale Entfernung"}} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \tan(\alpha)$$

Definition des Funktionstems: $f(x, m, t) := m \cdot x + t$

Wähle:

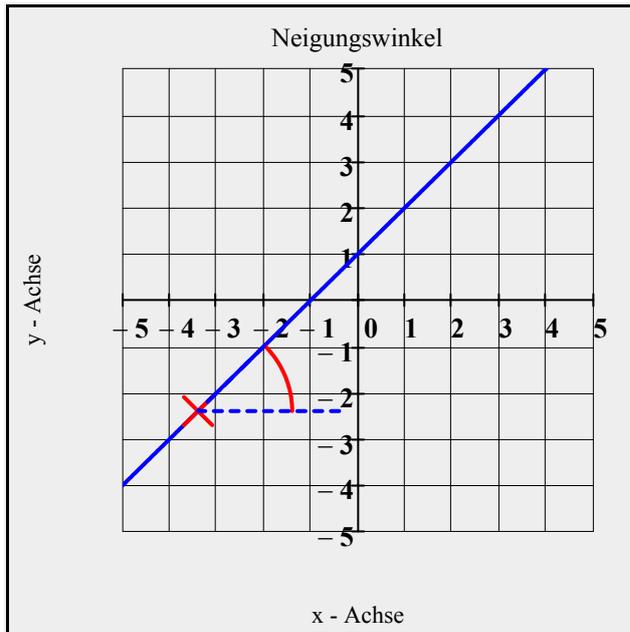
t = -3 .. 3



$\alpha = -60^\circ \dots 60^\circ$



Verschiebung der Winkelanzeige:



Funktionsterm:

$$f(x, m, t) = x + 1$$

Neigungswinkel: $\alpha = 45 \cdot \text{Grad}$

Steigung: $m = 1$

Achsenabschnitt: $t = 1$

Eigenschaft der Geraden:

Gerade = "streng monoton steigend"

Definition 3: "Steigung bzw. Gefälle in Prozentwerten"



Das Verkehrsschild bedeutet, dass die Straße eine Steigung von $p \%$ aufweist.

Das heißt, sie steigt auf einer Länge von 100 m um p m an.



Das Verkehrsschild bedeutet, dass die Straße ein Gefälle von $p \%$ aufweist.

Das heißt, sie fällt auf einer Länge von 100 m um p m ab.

Beachte: Auf den Verkehrsschildern ist x immer eine positive Zahl.

Aufgabe:

Gegeben ist eine Steigung / ein Gefälle mit der Basis l_0 (horizontaler Abstand) und der Höhe h_0 , die durch einen Funktionsterm $f(x)$ beschrieben werden kann.

Bestimmen Sie diesen Funktionsterm und die Neigung x in Prozent.

Wähle Länge l_0 in m: 100, 110, ... 500

Wähle Höhe/Gefälle h_0 in m: -100, -90, ... 100



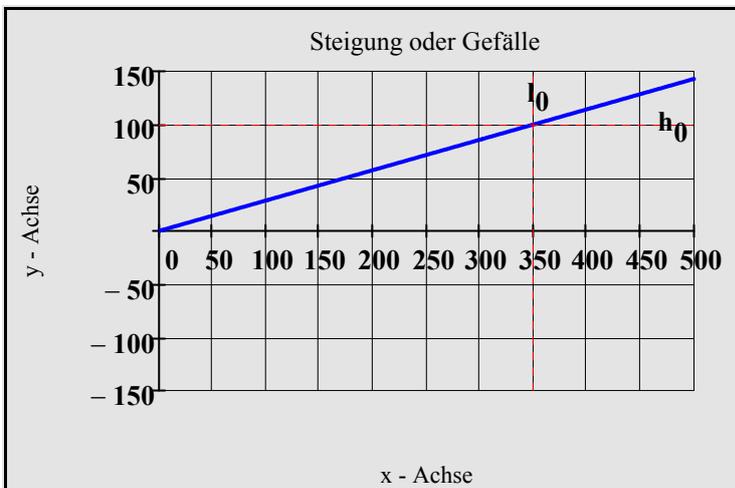
Länge in m: $l_0 = 350$

Höhe in m: $h_0 = 100$

Steigung: $m := \frac{h_0}{l_0}$

Steigung in %: $m_p := |m|$

Funktionsterm: $f(x) := m \cdot x$



Funktionsterm: $f(x) = \frac{2 \cdot x}{7}$

Steigung: $m = 0.286$

Steigung in %: $m_p = 28.6 \cdot \%$

Eigenschaft der Neigung:

Neigung = "Steigung"

Lineare Ungleichungen 2

- Rechnerische und graphische Lösung -

Aufgabe 1:

- a) Ermitteln Sie von der in \mathbb{R} gegebenen Ungleichung die Lösungsmenge.
 b) Veranschaulichen Sie die Ermittlung der Lösungsmenge mit Hilfe der graphischen Darstellung von Funktionen.

Teilaufgabe a)

Ungleichung: $-(1 + 2 \cdot x) + 4 < x - 2(x - 1)$

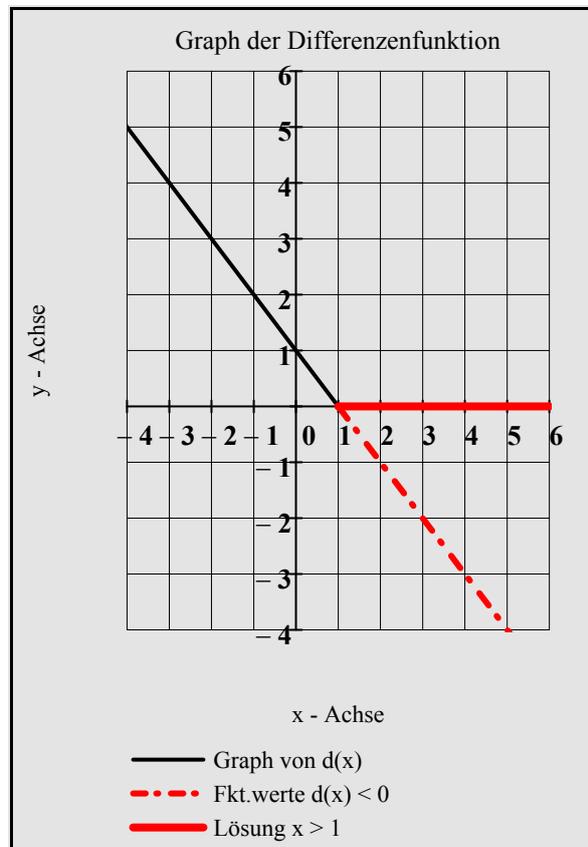
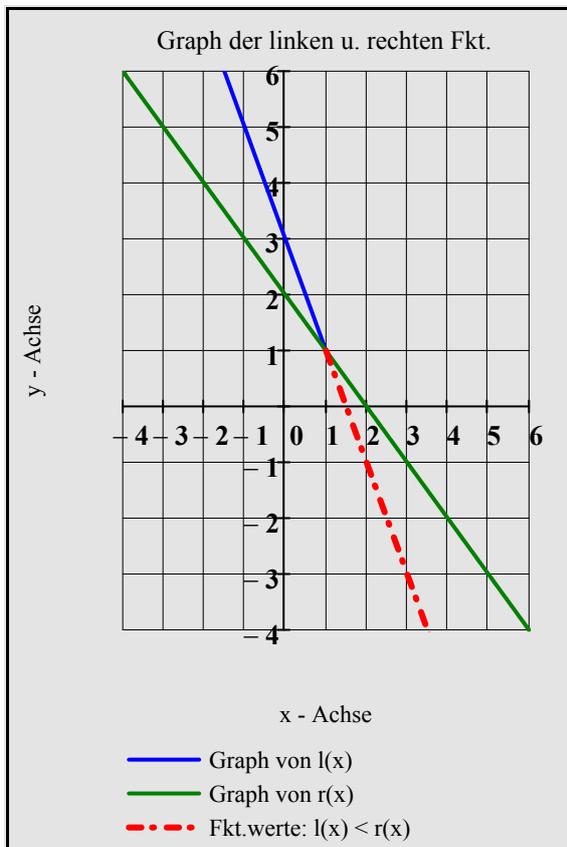
Lösung: $-(1 + 2 \cdot x) + 4 < x - 2(x - 1)$ auflösen, $x \rightarrow 1 < x \quad L = \{x \mid x > 1\}$

Teilaufgabe b)

Linke Funktion: $l(x) := -(1 + 2 \cdot x) + 4 = 3 - 2 \cdot x$

Rechte Funktion: $r(x) := x - 2(x - 1) = 2 - x$

Differenzfunktion: $d(x) := l(x) - r(x) = 1 - x$



Aufgabe 2:

a) Ermitteln Sie von der in \mathbb{R} gegebenen Ungleichung die Lösungsmenge.

b) Veranschaulichen Sie die Ermittlung der Lösungsmenge mit Hilfe der graphischen Darstellung von Funktionen.

Teilaufgabe a)

Ungleichung: $-(1 - 2 \cdot x) - (x - 2) \geq 2 \cdot x - 2 \cdot (2 \cdot x + 1)$

Lösung:

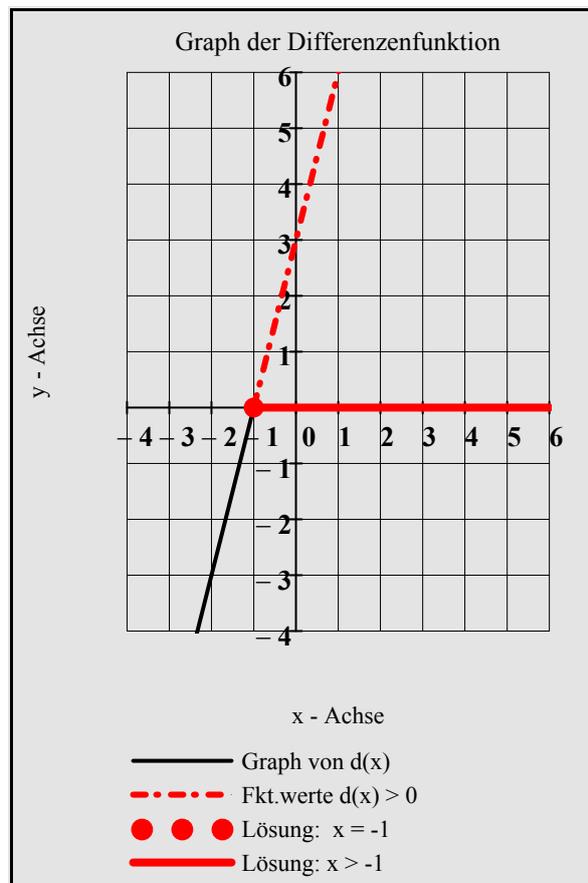
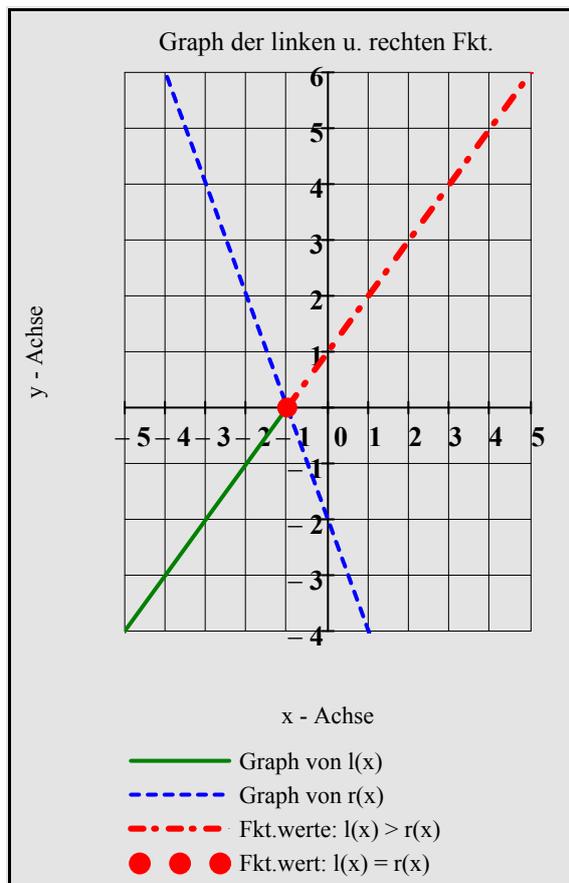
$-(1 - 2 \cdot x) - (x - 2) \geq 2 \cdot x - 2 \cdot (2 \cdot x + 1)$ auflösen, $x \rightarrow -1 \leq x \quad L = \{ x \mid x \geq -1 \}$

Teilaufgabe b)

Linke Funktion: $l(x) := -(1 - 2 \cdot x) - (x - 2) = x + 1$

Rechte Funktion: $r(x) := 2 \cdot x - 2 \cdot (2 \cdot x + 1) = -2 \cdot x - 2$

Differenzfunktion: $d(x) := l(x) - r(x) = 3 \cdot x + 3$



Lineare Funktionen

- Arbeitsblatt zu den linearen Funktionen -

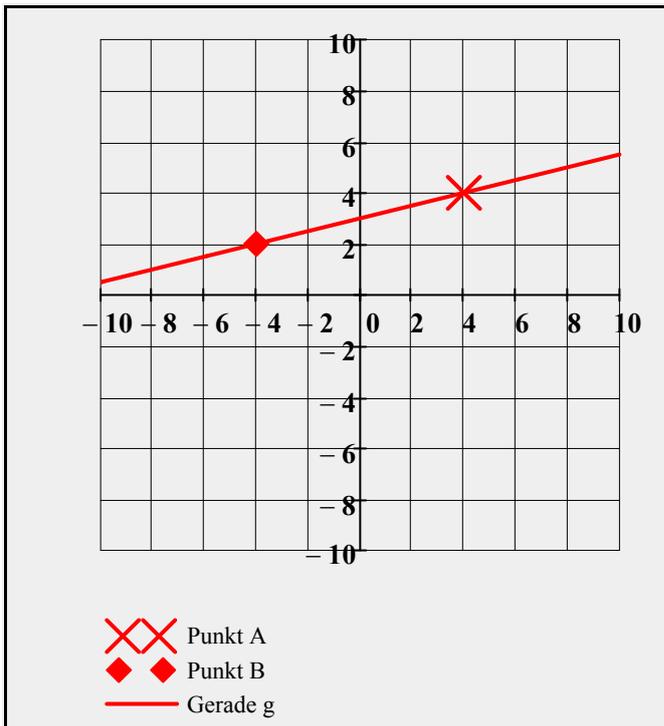
Aufgabe 1:

Gegeben sind die beiden Punkte $A(a_1 / a_2)$ und $B(b_1 / b_2)$ mit $a_1 \neq b_1$. Die Koordinatenwerte von A und B können mit Hilfe der Schieberegler eingestellt werden. Zeichnen Sie die Gerade g durch A und B und ermitteln Sie den zugehörigen Funktionsterm rechnerisch.

Punkt A: $a_1 :=$  $a_2 :=$  $A := (a_1 \ a_2)$

Punkt B: $b_1 :=$  $b_2 :=$  $B := (b_1 \ b_2)$

Punkt A anzeigen Punkt B anzeigen Gerade g anzeigen



Punkt A: $A = (4 \ 4)$

Punkt B: $B = (-4 \ 2)$

Gerade g: $g(x) = \frac{x}{4} + 3$

Algebraische Lösung:

Zwei-Punkte-Form für die Gerade g:

$$g(x) := \frac{b_2 - a_2}{b_1 - a_1} \cdot (x - a_1) + a_2$$

$$g(x) = \frac{x}{4} + 3$$

Aufgabe 2:

Gegeben sind der Punkt $A(a_1 / a_2)$ und die Steigung m .

Die Koordinatenwerte a_1 und a_2 sowie der Steigungsfaktor m können mit Hilfe der Schieberegler eingestellt werden.

Zeichnen Sie die Gerade h durch A mit der Steigung m und ermitteln Sie den zugehörigen Funktionsterm rechnerisch.

Punkt A:

$a_1 :=$



$a_2 :=$



$$A := (a_1 \ a_2)$$

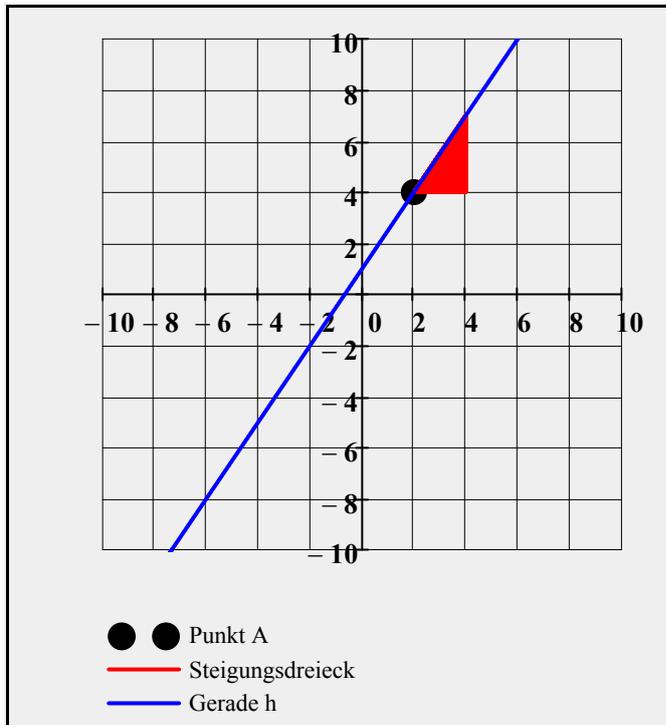
Steigung:

$m :=$



Punkt A anzeigen

Gerade h anzeigen



Punkt A: $A = (2 \ 4)$

Steigung = 1.5

Gerade h: $h(x) = \frac{3 \cdot x}{2} + 1$

Algebraische Lösung:

Punkt-Steigungsform für die Gerade h :

$$h(x) := m \cdot (x - a_1) + a_2 \quad m = 1.5 \quad h(x) = \frac{3 \cdot x}{2} + 1$$

Aufgabe 3:

Gegeben ist die Gerade g durch $A(a_1 / a_2)$ und $B(b_1 / b_2)$ mit $a_1 \neq b_1$ sowie der Punkt $C(c_1 / c_2)$ mit $C \notin g$. Die Koordinatenwerte von A , B und C können mit Hilfe der Schieberegler eingestellt werden.

Zeichnen Sie die echt parallele Gerade p zu g durch $C(c_1 / c_2)$ und ermitteln Sie den zugehörigen Funktionsterm rechnerisch.

Punkt A:

$a_1 :=$



$a_2 :=$



$$A := (a_1 \ a_2)$$

Punkt B:

$b_1 :=$



$b_2 :=$



$$B := (b_1 \ b_2)$$

Punkt C:

$c_1 :=$



$c_2 :=$



$$C := (c_1 \ c_2)$$

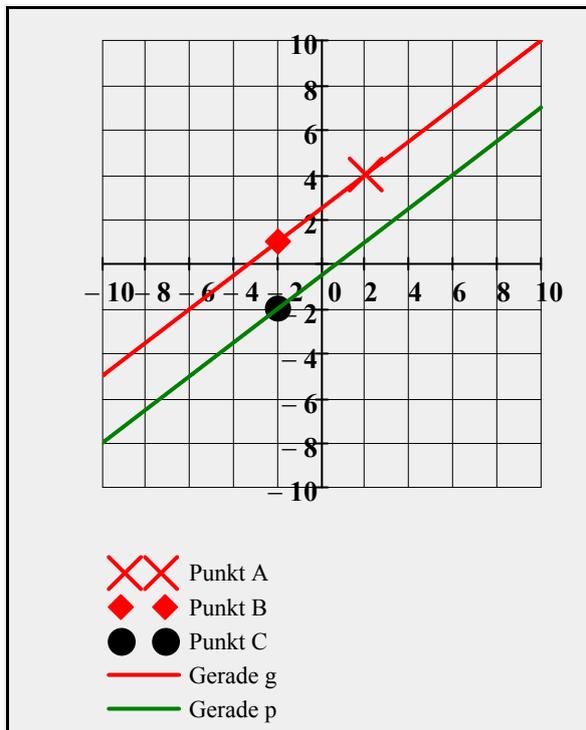
Punkt A anzeigen

Punkt B anzeigen

Gerade g anzeigen

Punkt C anzeigen

Gerade p anzeigen



Punkt A: $A = (2 \ 4)$

Punkt B: $B = (-2 \ 1)$

Gerade g: $g(x) = \frac{3 \cdot x}{4} + \frac{5}{2}$

Punkt C: $C = (-2 \ -2)$

Gerade p: $p(x) = \frac{3 \cdot x}{4} - \frac{1}{2}$

Steigungen: $m_g = \frac{3}{4} \quad m_p = \frac{3}{4}$

Punkt-Steigungsform für die Gerade p parallel zu g durch Punkt C :

$$p(x) := \frac{b_2 - a_2}{b_1 - a_1} \cdot (x - c_1) + c_2$$

$$p(x) = \frac{3 \cdot x}{4} - \frac{1}{2}$$

Aufgabe 4:

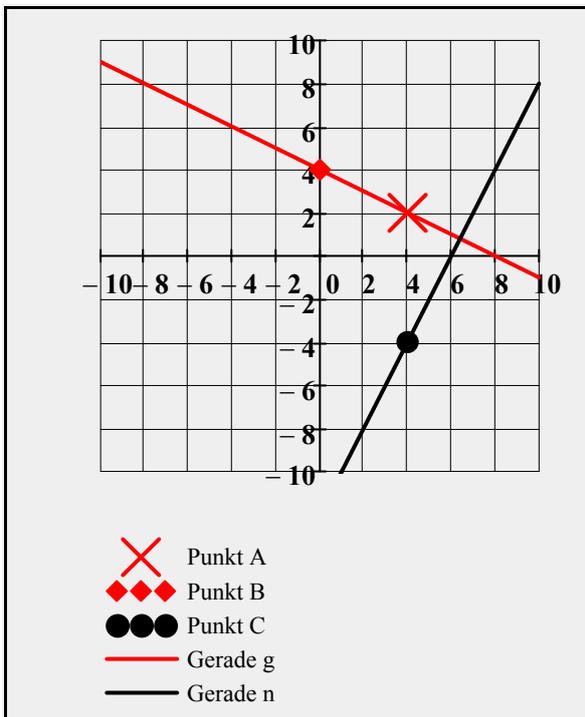
Gegeben ist die Gerade g durch $A(a_1 / a_2)$ und $B(b_1 / b_2)$ mit $a_1 \neq b_1$ sowie der Punkt $C(c_1 / c_2)$ mit $C \notin g$. Die Koordinatenwerte von A, B und C können mit Hilfe der Schieberegler eingestellt werden. Zeichnen Sie die Gerade n senkrecht zu g durch C und ermitteln Sie den zugehörigen Funktionsterm rechnerisch.

Punkt A: $a_1 :=$  $a_2 :=$  $A := (a_1 \ a_2)$

Punkt B: $b_1 :=$  $b_2 :=$  $B := (b_1 \ b_2)$

Punkt C: $c_1 :=$  $c_2 :=$  $C := (c_1 \ c_2)$

- Punkt A anzeigen Punkt B anzeigen Gerade g anzeigen
 Punkt C anzeigen Gerade n anzeigen



Punkt A: $A = (4 \ 2)$

Punkt B: $B = (0 \ 4)$

Gerade g: $g(x) = 4 - \frac{x}{2}$

Punkt C: $C = (4 \ -4)$

Gerade n: $n(x) = 2 \cdot x - 12$

Steigungen: $m_g = -\frac{1}{2} \quad m_n = 2$

Punkt-Steigungsform für die Gerade n senkrecht zu g durch Punkt C :

Gerade n :
$$n(x) := -\left(\frac{b_1 - a_1}{b_2 - a_2}\right) \cdot (x - c_1) + c_2 \qquad n(x) = 2 \cdot x - 12$$

Exponentialfunktionen

- Anwendung von $f(x) = 2^{k \cdot x}$ -

Aufgabe 1:

Gegeben ist der Funktionsterm $f(x) = 2^{k_1 \cdot x}$ mit $k_1 > 0$.

a) Wählen Sie mit dem Schieberegler einen Wert für $k_1 \in \{0.75, 1, 1.5, 2\}$ und einen Wert für $y_0 \geq 1$. Weiterhin gilt: $y_1 = 2 \cdot y_0$.

Bestimmen Sie die zugehörigen x-Werte x_0 und x_1 und berechnen Sie den Abstand $d = x_1 - x_0$. Wiederholen Sie die Berechnung für verschiedene y_0 -Werte bei gleichem k_1 . Formulieren Sie die sich ergebende Besonderheit wortsprachlich.

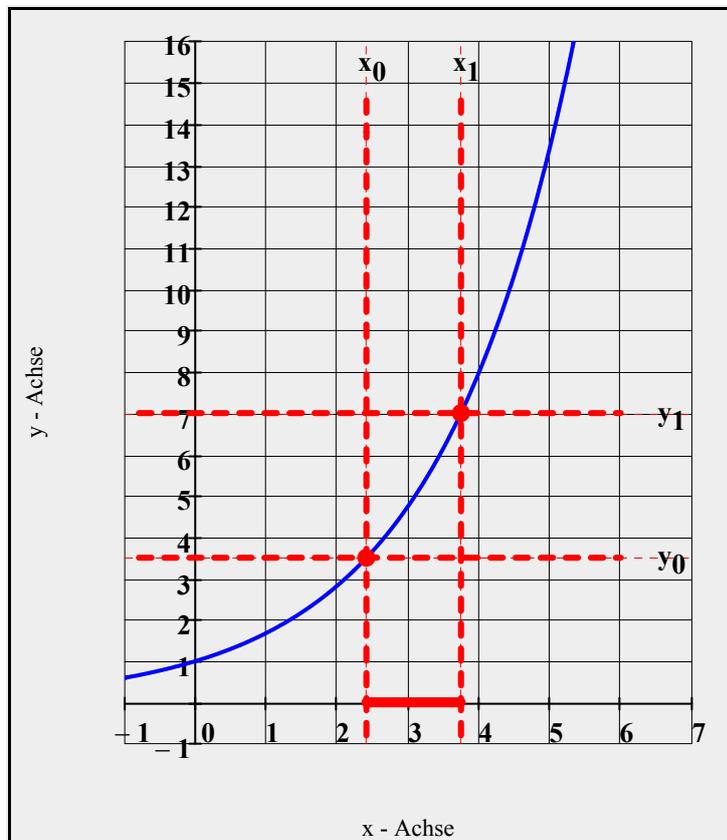
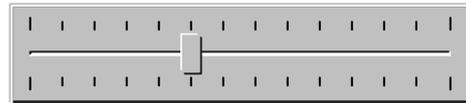
b) Wiederholen Sie Teilaufgabe a) für andere Werte von k_1 . Was beobachten Sie?

Teilaufgabe a)

Wähle die Zunahmekonstante k_1 :



Veränderung von y_0 :



Zunahmekonstante:

$$k_1 = 0.75$$

Funktionsterm:

$$f(x) = 2^{\frac{3 \cdot x}{4}}$$

Funktionswerte:

$$y_0 = 3.50 \quad y_1 = 7.00$$

Verdoppelungsabstand Δy :

$$d_y = 3.50$$

Zugehörige x-Werte:

$$x_0 = 2.41 \quad x_1 = 3.74$$

Abstand Δx :

$$d_x = 1.33$$

Teilaufgabe b)

1. Die Funktionswerte nehmen bei größeren k -Werten mit $k > 0$ immer schneller zu.
Bemerkung: k heißt "**Wachstumskonstante**".
2. Die Funktionswerte einer streng monoton wachsenden Exponentialfunktion **verdoppeln** sich jeweils bei Zunahme der x -Werte um Δx . Dieses feste Intervall Δx ist für die jeweilige Wachstumskonstante charakteristisch.

Anwendung:

In der Natur tritt die Eigenschaft der konstanten Verdoppelung z.B. beim Wachstum von Pflanzen oder der Vermehrung von Bakterien auf.



Aufgabe 2: Das Schachbrett und die Reiskörner

Der Erfinder des Schachspiels soll angeblich für seine Erfindung folgenden Lohn gefordert haben:

Für das 1. Feld ein Reiskorn und für jedes weitere Feld doppelt soviel Körner wie für das vorhergehende Feld.

a) Beschreiben Sie die Anzahl der Reiskörner durch eine Funktion und stellen Sie sie graphisch dar.

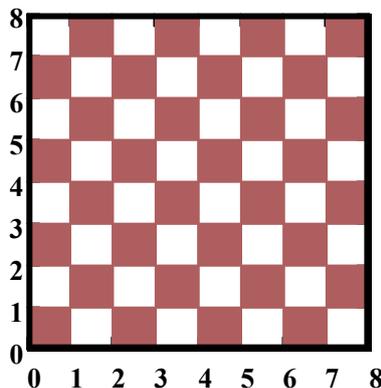
Geben Sie mit Hilfe der Funktion die Anzahl der Reiskörner auf den ersten zehn Felder an und erstellen Sie eine Tabelle in der die Anzahl der Reiskörner des jeweiligen Feld notiert wird.

b) Berechnen Sie die Summe der Reiskörner vom ersten bis zum 10. Feld.

Wieviel Gramm Reis sind das, wenn 40 Reiskörner ca. ein Gramm wiegen?

c) Gegeben ist eine Formel für die Berechnung der Summe der Reiskörner vom ersten bis zum n .ten Feld.

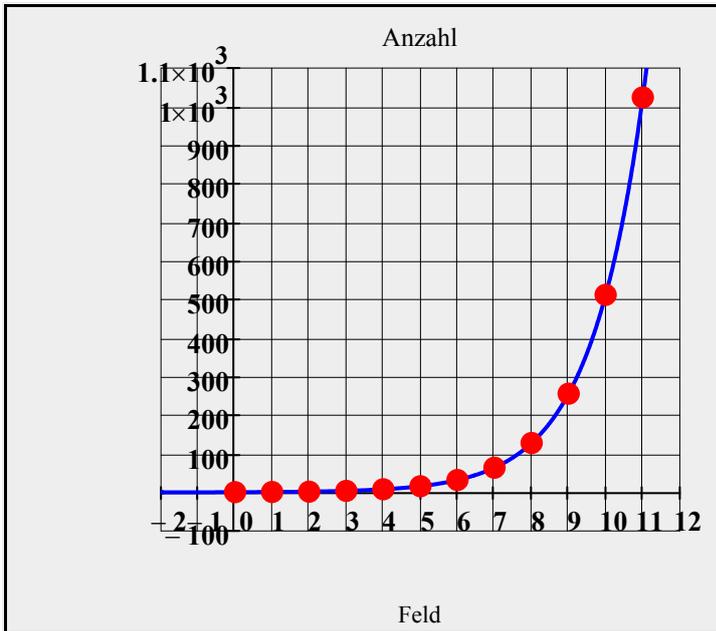
Berechnen Sie mit Hilfe dieser Formel die Summe der Reiskörner auf allen 64 Feldern zusammen. Wieviel Tonnen Reis sind das?



Teilaufgabe a)

Definitionsmenge: $x_1 := 0, 1.. 11$

Funktionsterm: $f(x) := 2^{x-1}$



- 1. Feld: $f(1) = 1$
- 2. Feld: $f(2) = 2$
- 3. Feld: $f(3) = 4$
- 4. Feld: $f(4) = 8$
- 5. Feld: $f(5) = 16$
- 6. Feld: $f(6) = 32$
- 7. Feld: $f(7) = 64$
- 8. Feld: $f(8) = 128$
- 9. Feld: $f(9) = 256$
- 10. Feld: $f(10) = 512$

Tabelle =

"Feldnummer"	"Anzahl"
1	1
2	2
3	4
4	8
5	16
6	32
7	64
8	128
9	256
10	512
11	...

Teilaufgabe b)

Summe: $s_{10} := f(1) + f(2) + f(3) + f(4) + f(5) + f(6) + f(7) + f(8) + f(9) + f(10)$

Summenwert $s_{10} = 1023$

Berechnung der Masse: $m_{10} := \frac{1023}{40} \cdot 10^{-3} \cdot \text{kg}$

$m_{10} = 25.575 \cdot \text{Gramm}$

Aufgabe 3:

Gegeben ist der Funktionsterm $f(x) = 2^{k_2 \cdot x}$ mit $k_2 < 0$.

a) Wählen Sie mit dem Schieberegler einen Wert für $k_2 \in \{-0.75, -1, -1.5, 2\}$ und einen Wert für $y_0 \geq 1$. Weiterhin gilt: $y_1 = 2 \cdot y_0$.

Bestimmen Sie die zugehörigen x-Werte x_0 und x_1 und berechnen Sie den Abstand $d = x_1 - x_0$. Wiederholen Sie die Berechnung für verschiedene y_0 -Werte bei gleichem k_2 . Formulieren Sie die sich ergebende Besonderheit wortsprachlich.

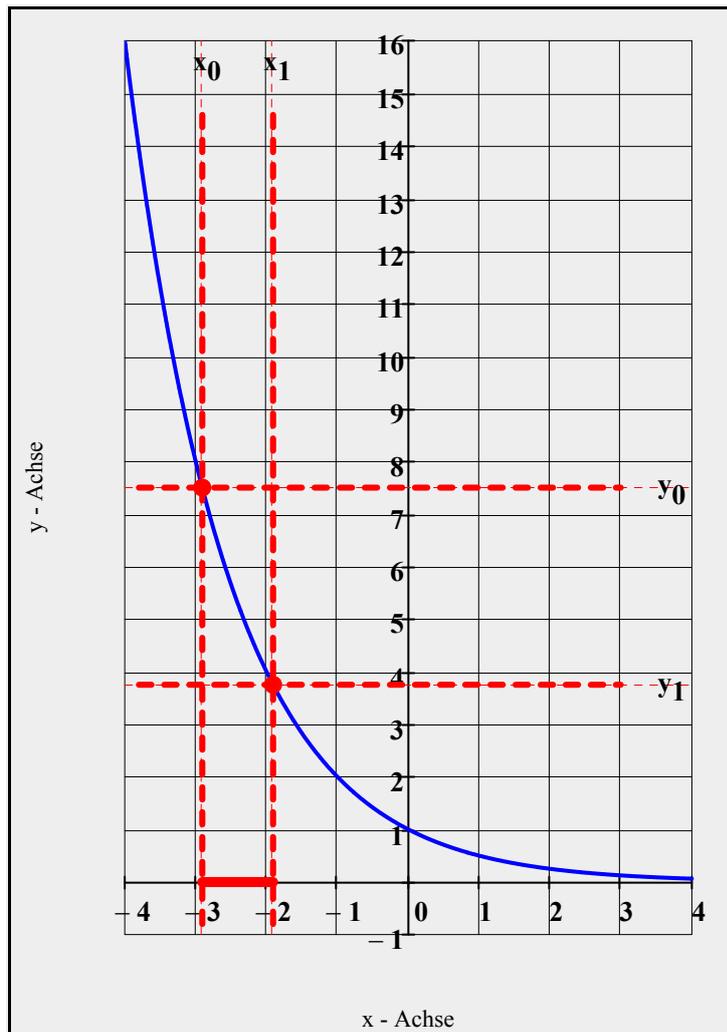
b) Wiederholen Sie Teilaufgabe a) für andere Werte von k_2 . Was beobachten Sie?

Teilaufgabe a)

Wähle die Abnahmekonstante k_2 :



Veränderung von y_0 :



Abnahmekonstante:

$$k_2 = -1$$

Funktionsterm:

$$f(x) = \frac{1}{2^x}$$

Funktionswerte:

$$y_0 = 7.5 \quad y_1 = 3.75$$

Halbierungsabstand Δy :

$$d_y = 3.75$$

Zugehörige x-Werte:

$$x_0 = -2.91 \quad x_1 = -1.91$$

Abstand Δx :

$$d_x = 1.00$$

Teilaufgabe b)

1. Die Funktionswerte nehmen bei kleineren k -Werten mit $k < 0$ immer schneller ab.
Bemerkung: k heißt "**Zerfallskonstante**".
2. Die Funktionswerte einer streng monoton fallenden Exponentialfunktion **halbieren** sich jeweils bei Zunahme der x -Werte um Δx . Dieses feste Intervall Δx ist für die jeweilige Zerfallskonstante charakteristisch.

Anwendung 1:

In der Natur tritt die Eigenschaft der konstanten Halbierung z.B. beim radioaktiven Zerfall oder bei der Korrosion auf.



Anwendung 2:

Papiergrößen sind in Deutschland nach den Standardgrößen den DIN-Formate (Deutsches Institut für Normung e.V.) eingeteilt.

Das Papiergewicht wird in g/m^2 angegeben und bezieht sich auf einen Bogen DIN A0. Ein häufig verwendetes Papier hat eine Masse von 80g/m^2 .

Papierformate :=

"DIN Reihe A"	"B x H in qmm"	"Bemerkung"
"DIN A0"	"841 x 1189"	"1 qm"
"DIN A1"	"594 x 841"	"Flip Chart"
"DIN A2"	"420 x 594"	"Malblock"
"DIN A3"	"297 x 420"	"Zeitungen"
"DIN A4"	"210 x 297"	"Standard Brief"
"DIN A5"	"148 x 210"	"Karteikarte"
"DIN A6"	"105 x 148"	"Postkarte"
"DIN A7"	"74 x 105"	"Visitenkarten"
"DIN A8"	"52 x 74"	"Spielkarten"
"DIN A9"	"37 x 52"	"Etiketten"
"DIN A10"	"26 x 37"	"Etiketten"

Das Verhältnis Breite / Höhe beträgt bei allen Formaten $\sqrt{2}$. Wenn z.B. ein Dokument von DIN A4 auf DIN A5 verkleinert wird, werden die Längen und Breiten durch den Faktor $\sqrt{2}$ dividiert. **Dabei halbiert sich die Papierfläche.**

DIN_A :=

0	999949
1	499554
2	249480
3	124740
4	62370
5	31080
6	15540

Zuweisen der Formate:

Format: $D := \text{DIN_A}^{\langle 0 \rangle}$

Fläche: $A := (\text{DIN_A})^{\langle 1 \rangle}$

Aufgabe 4:

Ein Papierbogen DIN A0 hat eine Größe von fast genau 1 m^2 .

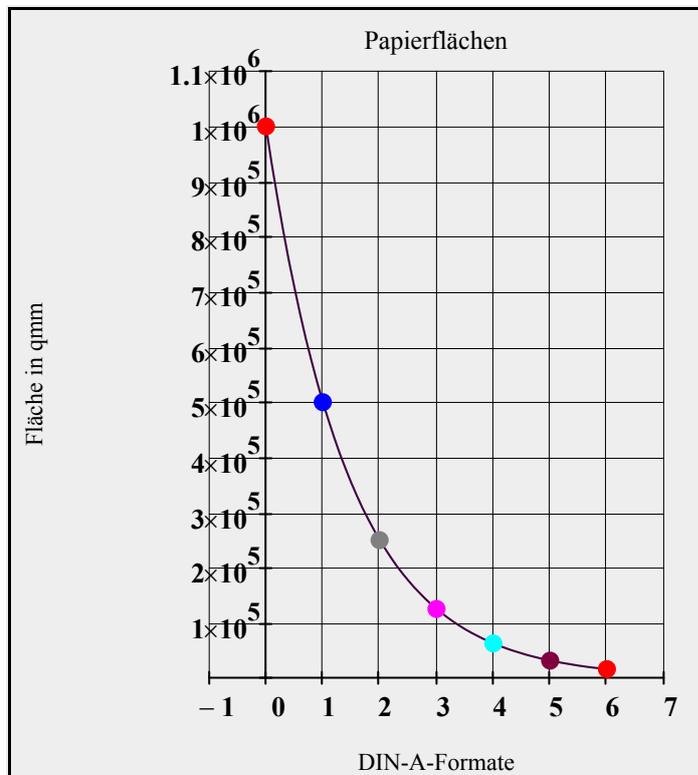
Jedes folgende Format entsteht durch Halbierung des vorhergehenden.

a) Beschreiben Sie die Fläche der Papierbogen in Abhängigkeit von ihrem Format durch eine Funktion f und zeichnen Sie den zugehörigen Graphen G_f .

b) Welche Masse hat ein Paket Schreibpapier DIN A4 der Grammatur 80 g/m^2 mit 500 Blatt.

Teilaufgabe a)

Definitionsmenge: $D = \{ 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6 \}$ Flächenfunktion: $f(n) := A_0 \cdot 2^{-n}$



Teilaufgabe b)

Fläche eines DIN-A0-Blattes:

$$F_0 := 841 \cdot \text{mm} \cdot 1189 \cdot \text{mm}$$

$$F_0 = 0.9999490 \cdot \text{m}^2$$

Fläche eines DIN-A4-Blattes:

$$F_4 := 210 \cdot \text{mm} \cdot 297 \cdot \text{mm}$$

$$F_4 = 0.062 \text{ m}^2$$

Anzahl der DIN-A4-Blätter pro m^2 :

$$\frac{F_0}{F_4} = 16$$

Masse von 500 Blatt:

$$m_4 := 80 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{\text{kg}}{\text{m}^2} \cdot \frac{500}{16} \cdot \text{m}^2$$

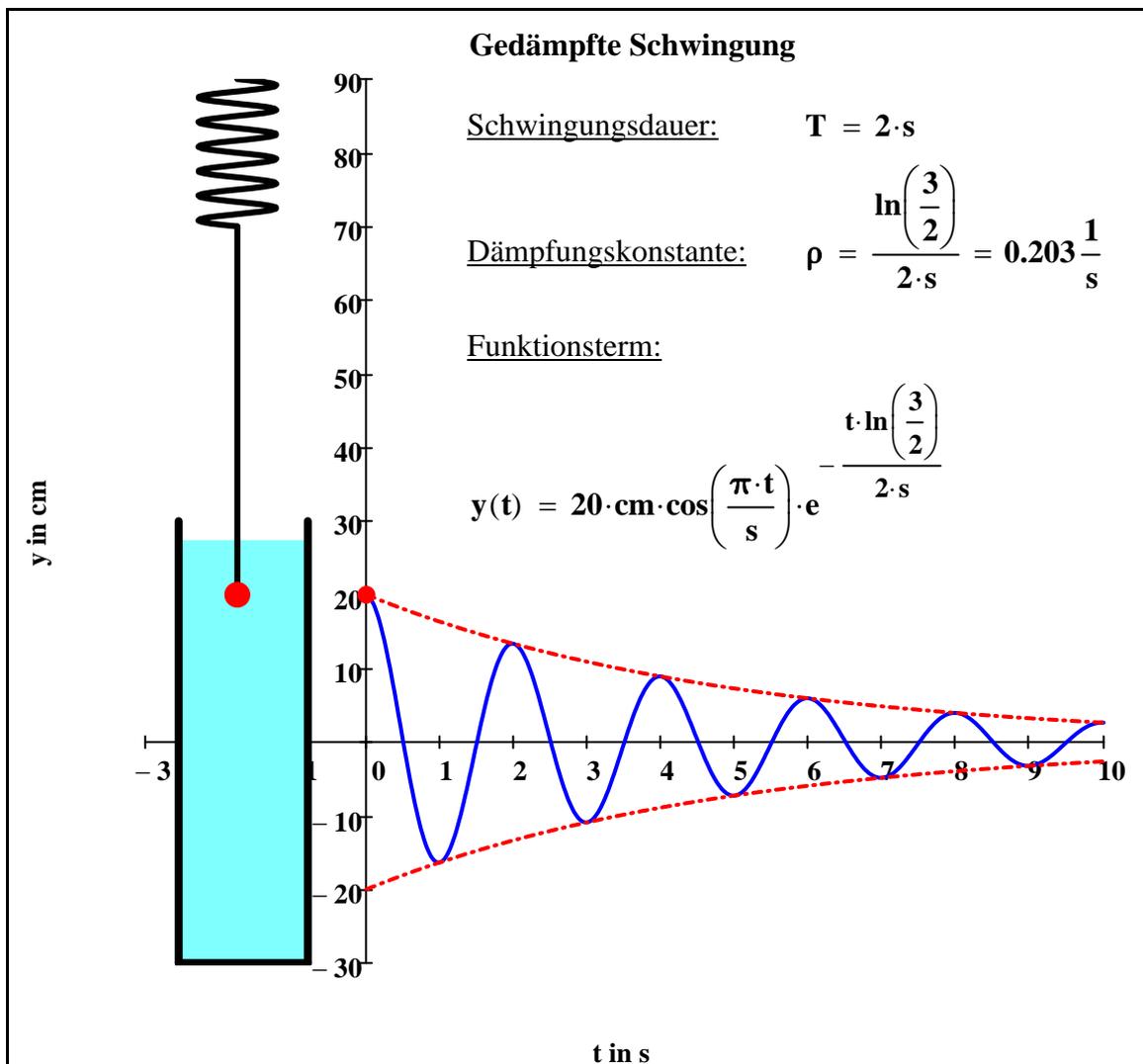
$$m_4 = 2.5 \text{ kg}$$

Anwendung der Exponentialfunktion - Gedämpfte Schwingung -

Modellversuch: Ungedämpfte und gedämpfte Schwingung

Der Massenpunkt am Federpendel führt im Idealfall (außerhalb der Flüssigkeit) eine ungedämpfte Schwingung aus. Er schwingt dann mit konstanter Amplitude, die mathematisch durch eine trigonometrische Funktion $y(t) = y_{\max} \cdot \cos(\omega \cdot t)$

beschrieben werden kann. Schwingt der Massenpunkt in der Flüssigkeit, so wird seine Amplitude ständig kleiner, er führt eine gedämpfte Schwingung aus. Die Abnahme der Amplitude kann durch die "einhüllenden" Exponentialfunktionen, also durch $y_{e1} = y_{\max} \cdot e^{-\rho \cdot t}$ bzw. $y_{e2} = -y_{\max} \cdot e^{-\rho \cdot t}$ beschrieben werden.



Einhüllende: $y_{e1}(t) = 20 \cdot \text{cm} \cdot e^{-\frac{t \cdot \ln\left(\frac{3}{2}\right)}{2 \cdot s}}$ $y_{e2}(t) = -20 \cdot \text{cm} \cdot e^{-\frac{t \cdot \ln\left(\frac{3}{2}\right)}{2 \cdot s}}$

Mehrstufige Zufallsexperimente - Dreimaliges Ziehen mit zwei Merkmalen -

Aufgabe:

In einem Gefäß befinden sich Kugeln mit den zwei Merkmalen S_1 und S_2 . Die Anzahl der Kugeln mit den Merkmalen sei Z_1 und Z_2 . Es wird dreimal ohne bzw. mit Zurücklegen gezogen.

Stellen Sie den Ergebnisraum in Form eines Baumdiagrammes dar und geben Sie jeweils die Wahrscheinlichkeit an.

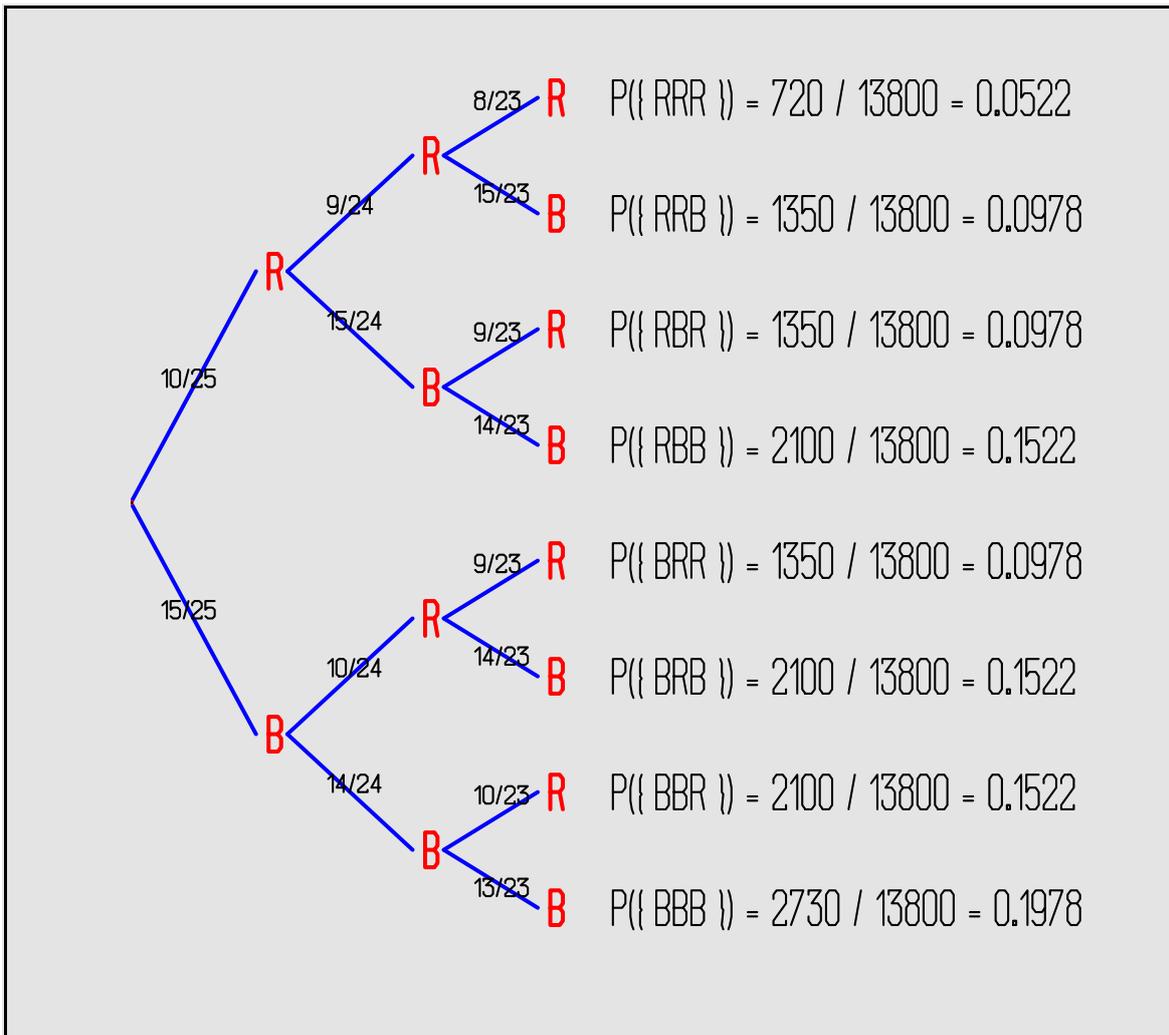
Wähle: Ziehen mit Zurücklegen

Ziehen ohne Zurücklegen

Bezeichnungen der einzelnen Merkmale (veränderbar): $S_1 := "R"$ $S_2 := "B"$

Anzahl der einzelnen Merkmale(veränderbar): $Z_1 := 10$ $Z_2 := 15$

Baumdiagramm:



Ebene Geometrie - Anwendung zum Satz des Pythagoras -

Aufgabe 2:

Die Punkte **A** bis **H** sind die Ecken einer Schachtel. Die Kanten haben die Längen $AB = 3 \cdot \text{cm}$; $BC = 4 \cdot \text{cm}$ und $AE = 2 \cdot \text{cm}$.

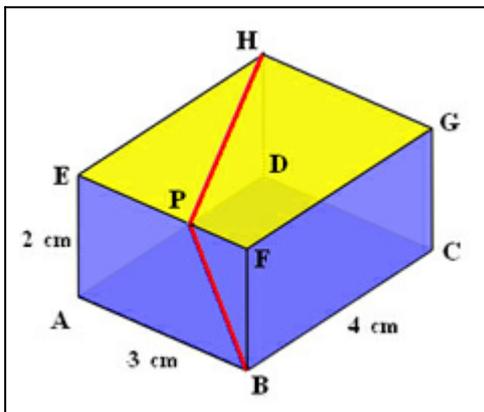
Der Punkt **P** liegt auf der Kante **EF** und kann verschoben werden.

a) Finden Sie durch Verschieben des Schiebereglers den minimalen Wert für

$$d = \overline{HP} + \overline{PB}.$$

b) Klappen Sie den Deckel der Schachtel auf und begründen die Lage des Punktes **P** mit Worten. (Zwischenergebnis: $p = 2$)

c) Berechnen Sie d_{\min} auf drei Stellen nach dem Komma und überprüfen Sie im Diagramm.



Lösung:

$$\overline{HP} = \sqrt{(\overline{EH})^2 + (\overline{EP})^2} = \sqrt{16 + p^2}$$

$$\overline{PB} = \sqrt{(\overline{FB})^2 + (\overline{PF})^2} = \sqrt{4 + (3 - p)^2}$$

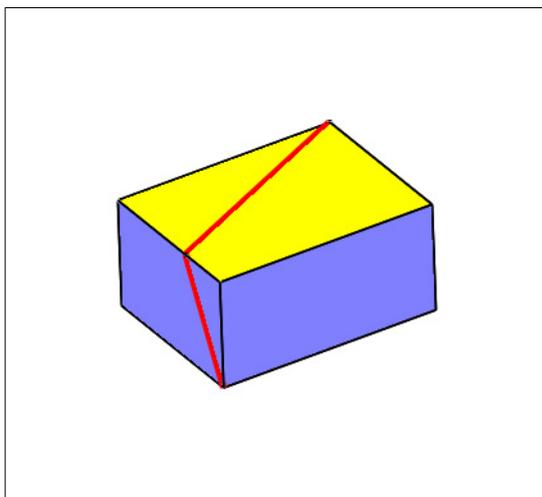
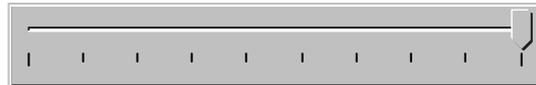
Gesuchte Länge:

$$d_{\text{HPB}} = \overline{HP} + \overline{PB}$$

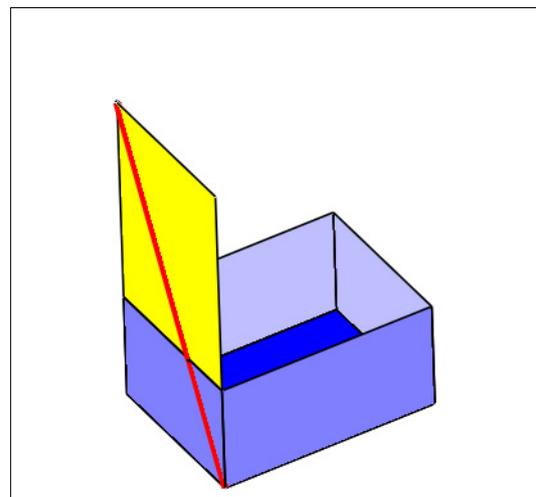
Verschiebung des Punktes P:



Anhebung des Deckels:



für $p = 2$ gilt



Länge_{HPB} = 6.708

► Lösung über Differentialrechnung