# Differentialrechnung
## - Differenzenquotient - Differentialquotient -

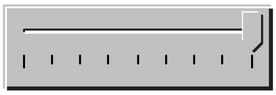
**Vorbemerkung**

Die Differentialrechnung ermöglicht es, auf der Grundlage des Grenzwertbegriffs Eigenschaften von Funktionen zu untersuchen.
Bekannt ist der Funktionswert einer Funktion an einer bestimmten Stelle $x_0$.
Interessant ist nun die ***Änderung des Funktionswerts***, wenn sich das Argument um $\Delta x$ ändert.

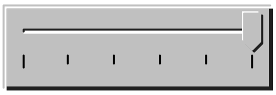
**Beispiel**

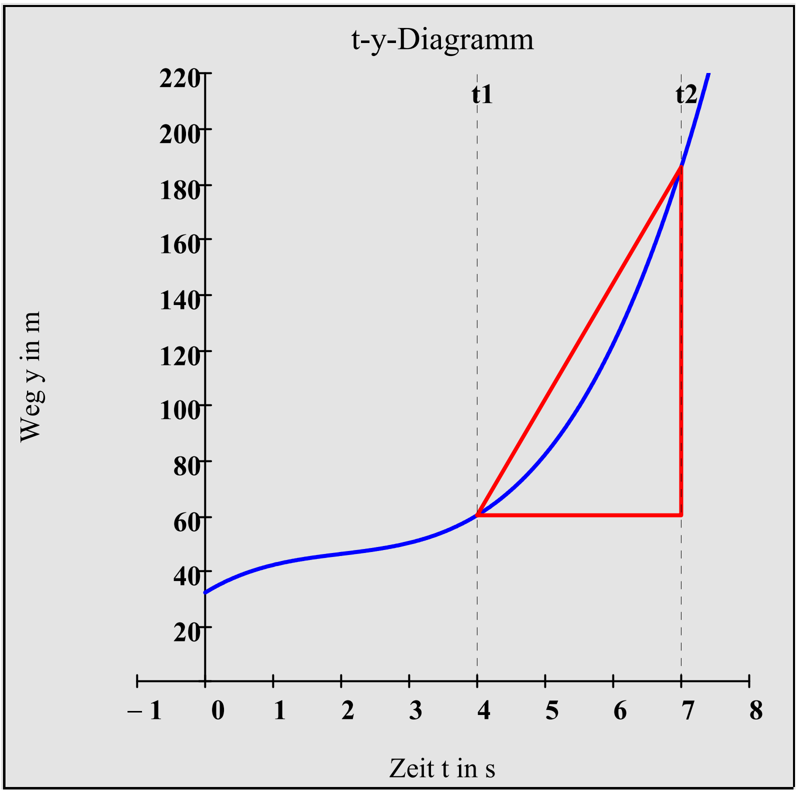
Das im Diagramm dargestellte t-y-Diagramm zeigt die Bewegung eines Körpers.
Wie groß ist die Durchschnittsgeschwindigkeit in einem mit dem Schieberegler gewählten Intervall $[t_1\ ;\ t_2]$?

Zeitpunkt $t_1$:



Zeitpunkt $t_2$:






Zeitpunkt 1:

$t_1 = 4\,\mathrm{s}$

$y(t_1) = 60\,\mathrm{m}$

Zeitpunkt 2:

$t_2 = 7\,\mathrm{s}$

$y(t_2) = 186\,\mathrm{m}$

Zeitintervall:

$\Delta t = 3\,\mathrm{s}$

$\Delta y = 126\,\mathrm{m}$

Mittlere Geschwindigkeit:

$v_m = 42\,\dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$

## Vorbemerkung

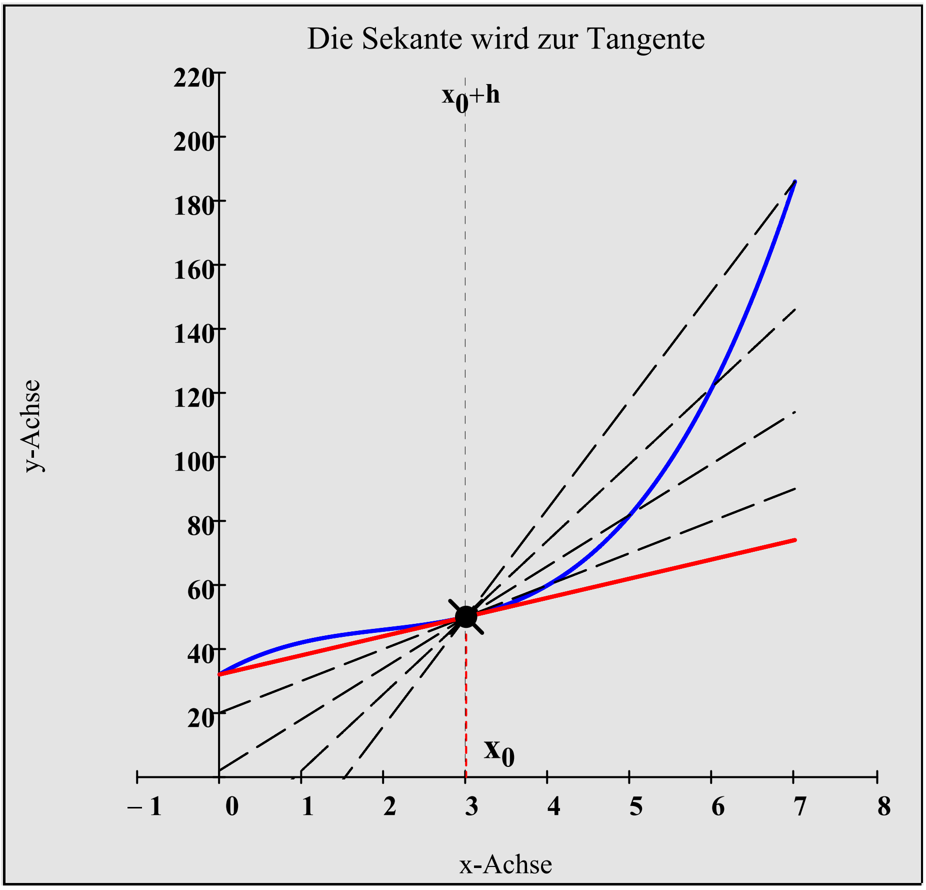
Nun soll die ***lokale Änderungsrate*** an der Stelle $x_0$ untersucht werden.

Hierzu wird das Intervall $\Delta x$ immer kleiner gemacht.

## Aufgabe

Gegeben ist eine Funktion f mit $\mathbf{f(x) := x^3 - 6 \cdot x^2 + 15 \cdot x + 32}$ und $\mathbf{x} \in$ **IR**.
Untersuchen Sie mit dem Schieberegler die Veränderung der Sekante.

Wahl des oberen Sekantenpunktes:




1-2-01_diffquotient.avi

$\mathbf{h = 0}$

Linker Punkt:

$\mathbf{x_0 = 3}$

Rechter Punkt:

$\mathbf{x_0 + h = 3}$

Steigung:

$\mathbf{m = 6}$

Die Untersuchung zeigt:

Die ***Intervallsekante*** geht in die ***Tangente,*** die ***Steigung der Sekante*** geht in die ***Steigung der Tangente*** über.

# Differentialrechnung
## - Physikalische Anwendung der Änderungsrate -

### Theorie

Der ***Differenzenquotient*** entspricht anschaulich der Steigung der Sekante, die die Punkte $P(x_0 / f(x_0))$ und $Q(x_0 + h / f(x_0 + h))$ verbindet.

Rechnerisch entspricht das der ***durchschnittlichen Änderungsrate*** $\Delta y$ im Intervall $\Delta x$.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

In der Physik: ***Durchschnittsgeschwindigkeit***.

Die ***lokale Änderungsrate*** ist definiert als die durchschnittliche Änderungsrate in sehr kleinen Zeitintervallen $\Delta x$, also in guter Näherung die Ableitung an einer Stelle $x_0$, kurz $f'(x_0)$.

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \left( \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \right)$$

In der Physik: ***Momentangeschwindigkeit***.

### Aufgabe

Der bei einer Bewegung eines Körpers zurückgelegte Weg entlang einer Geraden lässt sich modellhaft und ohne Einheiten durch folgende Funktion beschreiben:

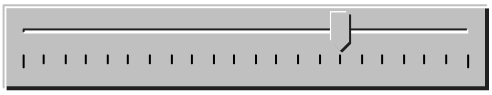
$$y = f(t) = 2 \cdot t^3 - 10 \cdot t^2 + 20 \cdot t + 30$$

a) Beobachten Sie mithilfe des Schiebereglers die Änderungsrate und die Momentangeschwindigkeit.

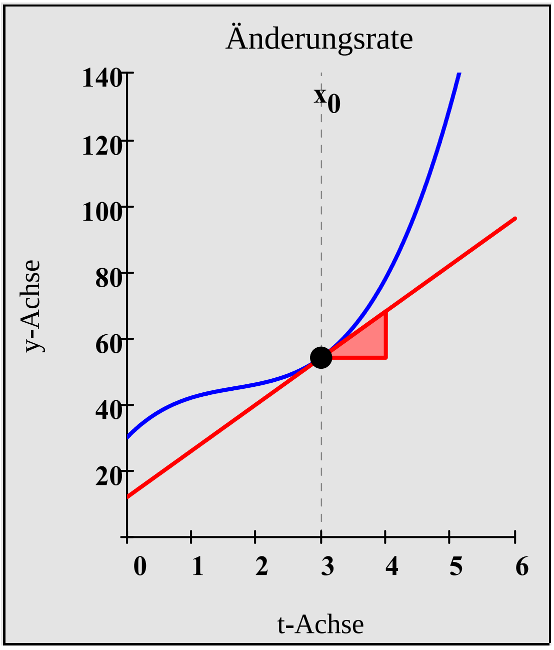
b) Skizzieren Sie die Funktionen $f(t)$, $f'(t)$ und $f''(t)$ in einem gemeinsamen Diagramm und erklären Sie ihre physikalische Bedeutung.

**Teilaufgabe a)**

Wählen Sie den Zeitpunkt:



1-2-05_y-v-a-math.avi




**Mathematik:** $\mathbf{x_0 = 3.00}$

Funktionswert: $\mathbf{f(x_0) = 54}$

Steigung: $\mathbf{f'(x_0) = 14.00}$

Krümmung: $\mathbf{f''(x_0) = 16.00}$

**Physik:** $\mathbf{t_0 = 3.00\,s}$

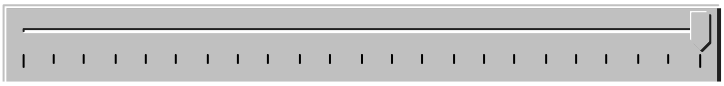
Ort: $\mathbf{y_0 = 54.00\,m}$

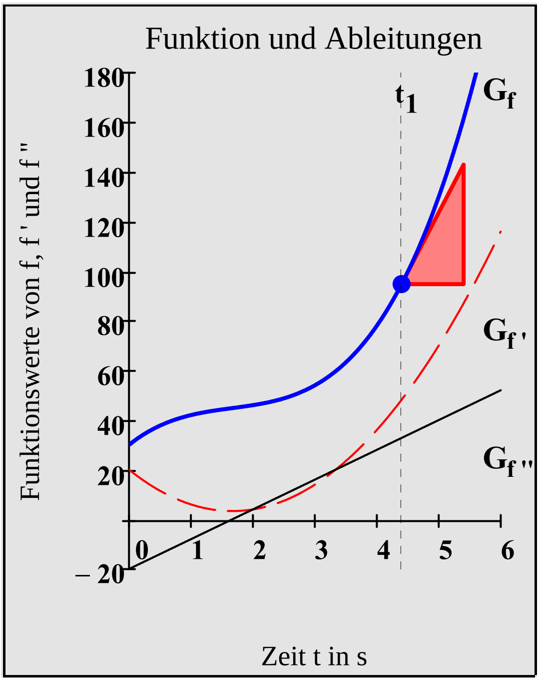
Geschwindigkeit: $\mathbf{v_0 = 14.00 \frac{m}{s}}$

Beschleunigung: $\mathbf{a_0 = 16.00 \cdot \frac{m}{s^2}}$

**Teilaufgabe b)**

Wählen Sie den Zeitpunkt:






Zeitpunkt $t_1$ in s: $\mathbf{t_1 = 4.4}$

Ort $y_0$ in m: $\mathbf{y_1 = 94.8}$

Steigung: $\mathbf{m_1 = 48.2}$

Krümmung: $\mathbf{f''(t_1) = 32.8}$

Momentangeschwindigkeit $\mathbf{v_1}$ in $\frac{m}{s}$:

$\mathbf{v_1 = 48.2}$

Beschleunigung $\mathbf{a_1}$ in $\frac{m}{s^2}$: $\mathbf{a_1 = 32.8}$

# Differentialrechnung
## - Vergleich Logarithmusfunktion und Potenzfunktion -

### Methodische Vorüberlegung

Gegeben sind die Logarithmusfunktion zur natürlichen Basis e $\mathbf{f(x) = ln(x)}$ mit $\mathbf{x} \in \mathbf{IR}^+$

und die Potenzfunktionen $\mathbf{p(x) = x^n}$ mit $\mathbf{n} \in \mathbf{IR}^+$.

Es soll gezeigt werden, dass die Logarithmusfunktion langsamer nach Unendlich geht als jede Potenzfunktion mit positivem Exponenten.

Es wird die Quotientenfunktion $\mathbf{q(x) = \frac{ln(x)}{x^n}}$ betrachtet, die demnach für $x \to \infty$ den

Grenzwert Null haben müsste. Die Grenzwerte $\lim\limits_{x \to \infty} q(x) = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{\ln(x)}{x^n}$

werden mithilfe der Regeln von L'Hospital gelöst.

### Aufgabe 1

Gegeben sind die Logarithmusfunktion $\mathbf{f(x) := ln(x)}$ mit $\mathbf{x} \in \mathbf{IR}$ und die Potenzfunktionen $\mathbf{p(x) = x^n}$ mit $\mathbf{x} \in \mathbf{IR}$ und $\mathbf{n} \in \mathbf{IN}$.

a) Vergleichen Sie für $\mathbf{n} \in$ **{ 1; 0,9; 0.5; 0.4; 0.3; 0.2 }** die Funktionswerte mithilfe einer Wertetabelle.

b) Zeichnen Sie die Graphen.

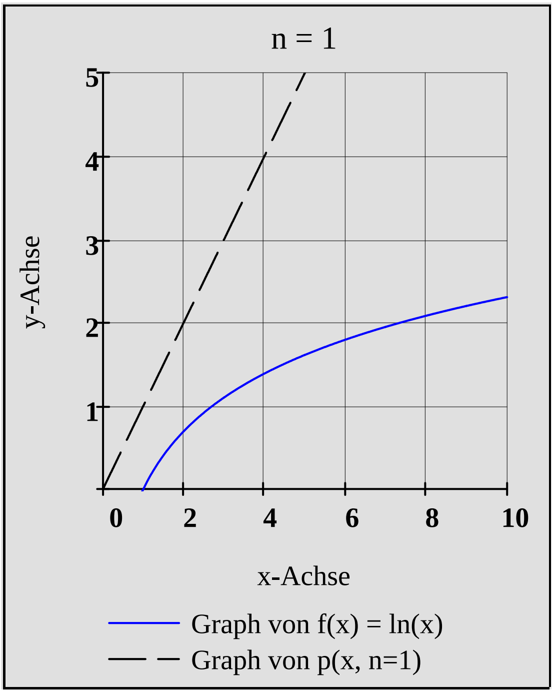
**Funktionswerte** =

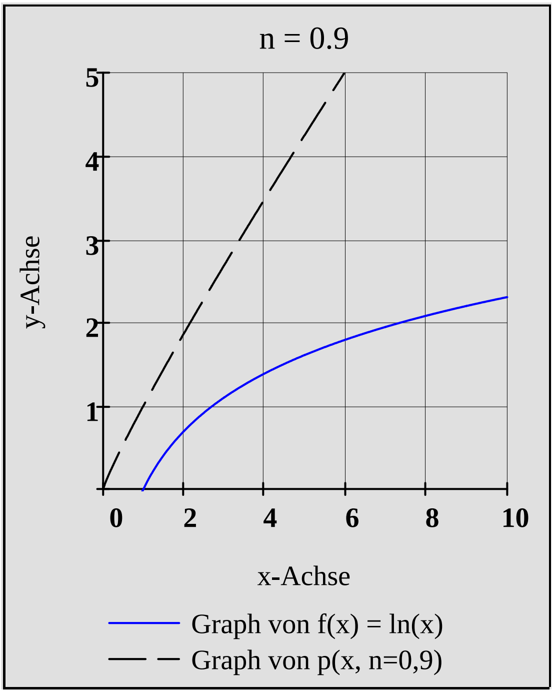
| $x^1$ | $x^{0.9}$ | $x^{0.5}$ | $x^{0.4}$ | $x^{0.3}$ | $x^{0.2}$ | $\ln(x)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 0.00 |
| 2.00 | 1.87 | 1.41 | 1.32 | 1.23 | 1.15 | 0.69 |
| 3.00 | 2.69 | 1.73 | 1.55 | 1.39 | 1.25 | 1.10 |
| 4.00 | 3.48 | 2.00 | 1.74 | 1.52 | 1.32 | 1.39 |
| 5.00 | 4.26 | 2.24 | 1.90 | 1.62 | 1.38 | 1.61 |
| 6.00 | 5.02 | 2.45 | 2.05 | 1.71 | 1.43 | 1.79 |
| 7.00 | 5.76 | 2.65 | 2.18 | 1.79 | 1.48 | 1.95 |
| 8.00 | 6.50 | 2.83 | 2.30 | 1.87 | 1.52 | 2.08 |
| 9.00 | 7.22 | 3.00 | 2.41 | 1.93 | 1.55 | 2.20 |
| 10.00 | 7.94 | 3.16 | 2.51 | 2.00 | 1.58 | 2.30 |

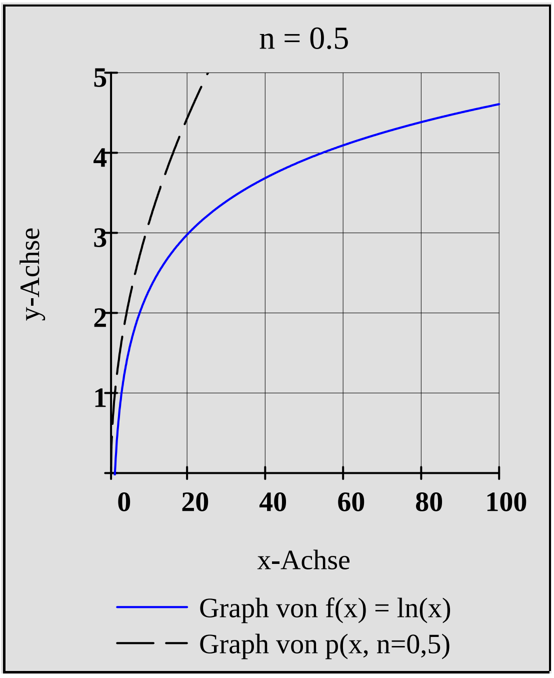
Der Graph der Funktion f mit **f(x) = ln(x)** liegt nicht überall unter dem Graphen der Funktion p mit **p(x) = $x^n$**, aber **p(x) = $x^n$** ***überholt*** die Logarithmusfunktion für wachsende x-Werte immer!

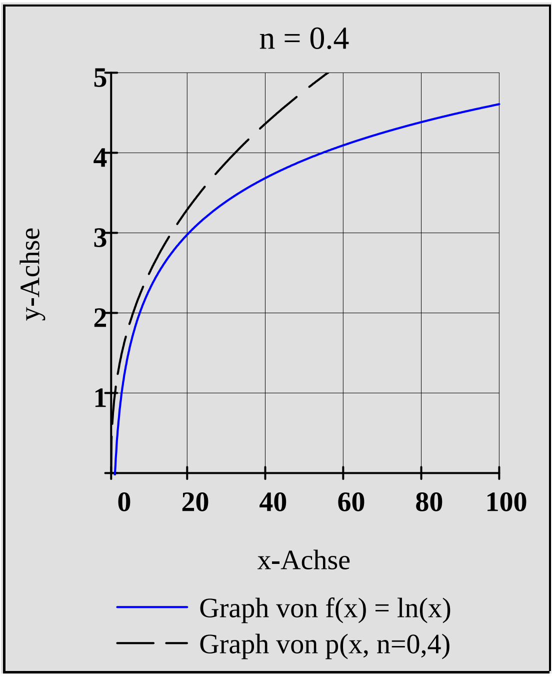
Wer wächst stärker?

$$\lim_{x \to \infty} \ln(x) \to \infty \qquad \text{oder} \qquad \lim_{x \to \infty} x^n \to \infty$$



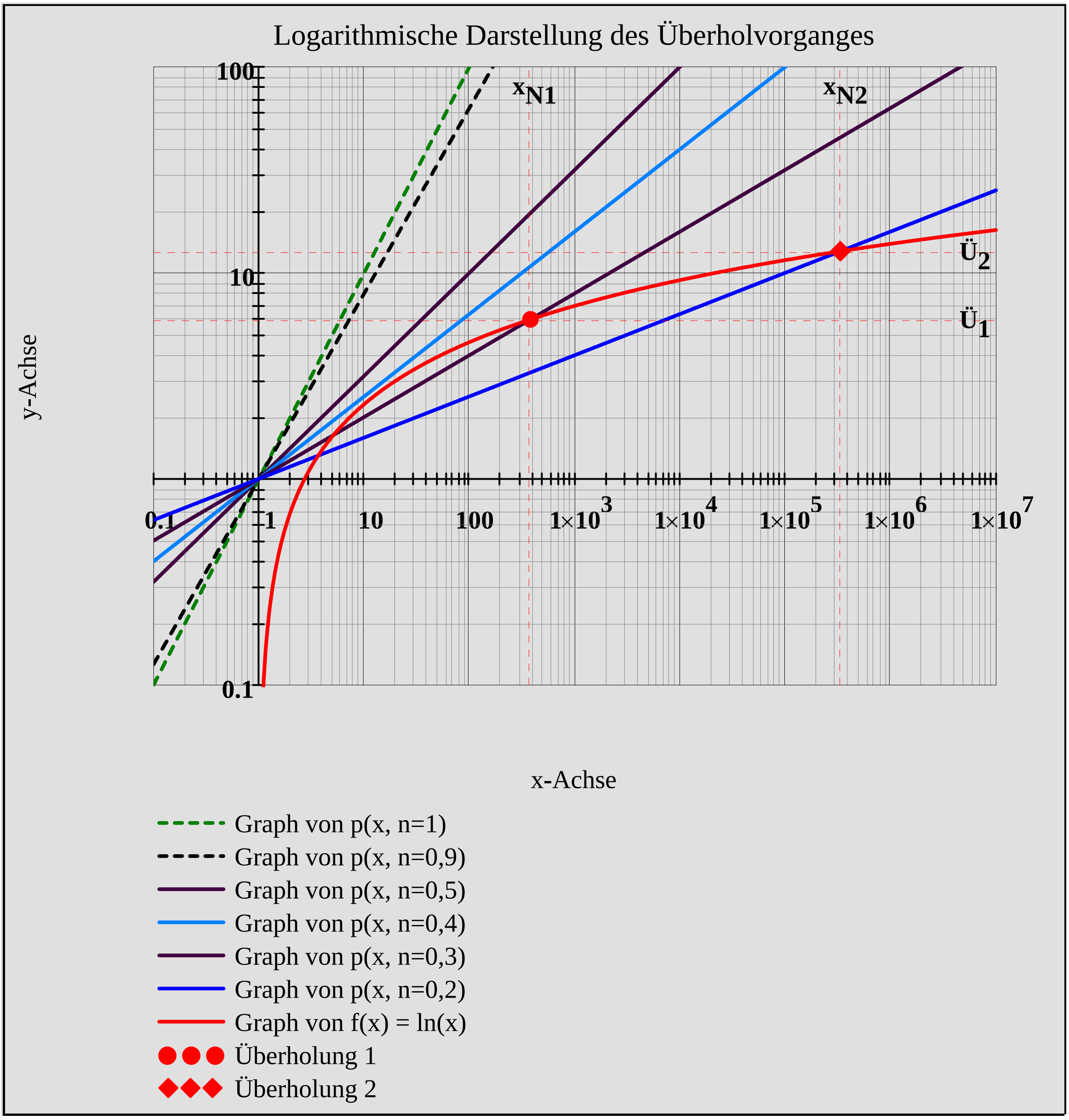



Der Graph der Funktion f mit **f(x) = ln(x)** muss nicht überall unter dem Graphen der Funktion p mit **p(x) = $x^n$** liegen.
Aber für wachsendes x gilt: ***p(x) = $x^n$ überholt f(x) = ln(x)*.**

***Überholspur für n = 0,3:*** **$Ü_1 = 5.94$** ***Überholspur für n = 0,2:*** **$Ü_2 = 13$**



## Aufgabe 2

Gegeben ist die Quotientenfunktion $\mathbf{q}(\mathbf{x},\mathbf{n}) := \dfrac{\ln(\mathbf{x})}{\mathbf{x}^{\mathbf{n}}}$ mit $\mathbf{x} \in \mathbf{IR} \setminus \{0\}$ und $\mathbf{n} \in \mathbf{IN}$.

Zeigen Sie für $\mathbf{n} = 3$ mithilfe der Regeln von L'Hospital, dass die Potenzfunktion stärker gegen Unendlich geht als die Exponentialfunktion.

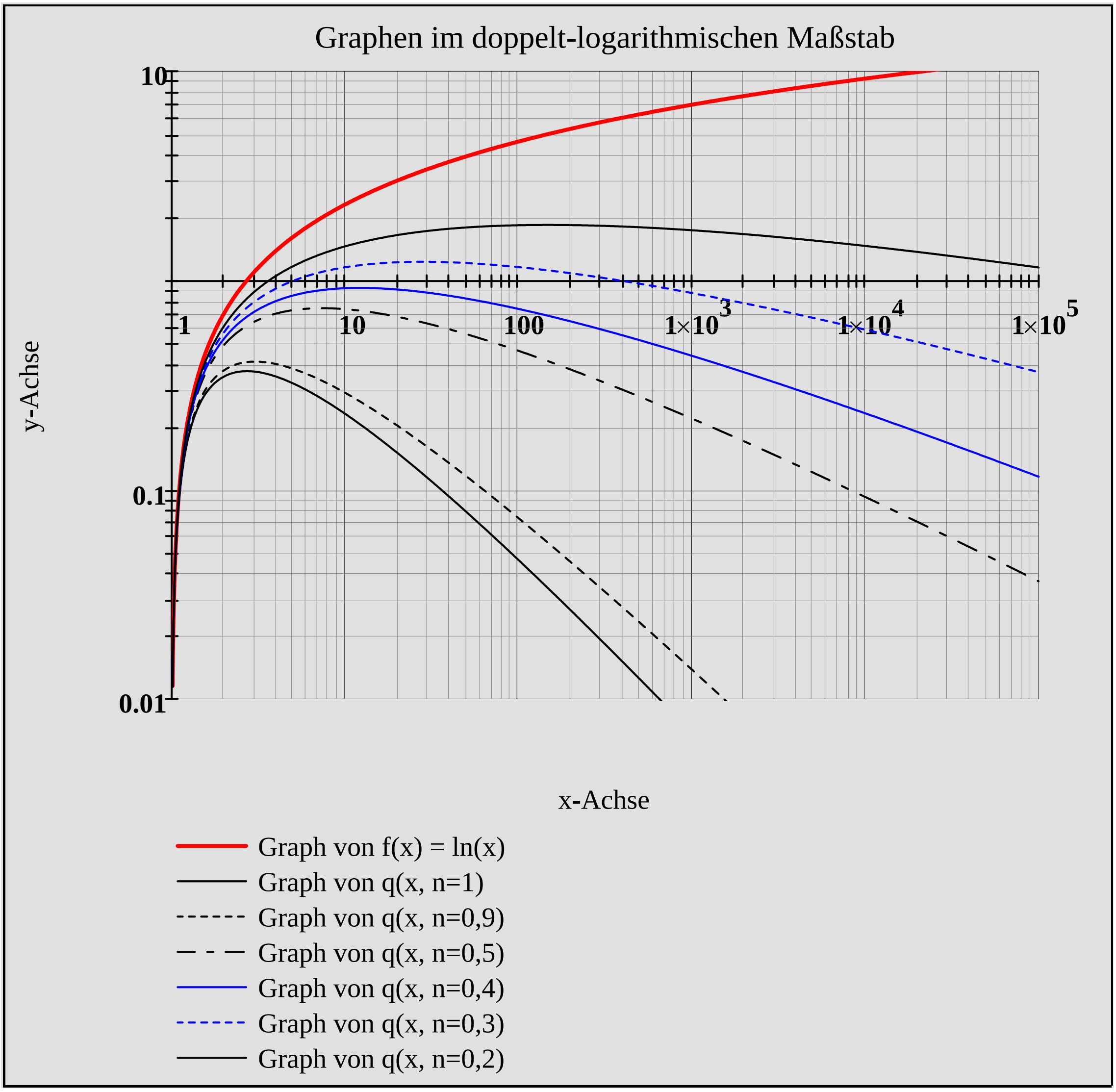
$\infty$

$\uparrow$ **l. H.**

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\ln(x)}{x^3}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{\frac{1}{x}}{3\cdot x^2}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{3\cdot x^3}\right) = 0$$

$\downarrow$ $\downarrow$

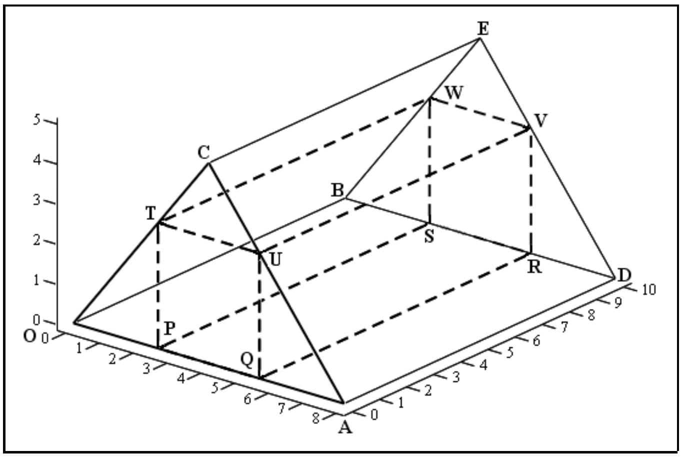
$\infty$ $\infty$



# Differentialrechnung
## - Dachgiebelausbau -

**Aufgabe**
Der Dachboden eines Einfamilienhauses (dreiseitiges Prisma) soll ausgebaut werden. Der vorhandene Raum soll bei rechteckigem Zimmerquerschnitt maximal ausgenutzt werden.
Der Dachgiebel hat folgende Abmessungen in **LE**:
Breite: $\mathbf{a} := \mathbf{8}$ ; Länge: $\mathbf{b} := \mathbf{10}$ , Höhe: $\mathbf{c} := \mathbf{5}$
Bestimmen Sie die Abmessungen des Zimmers mit größtmöglichem umbauten Raum.

Größen des Dachgiebels:




Abmessungen des Dachgiebels:

$\mathbf{a} = \mathbf{8}$ $\mathbf{b} = \mathbf{10}$ $\mathbf{c} = \mathbf{5}$

Koordinaten der Eckpunkte: Ortsvektoren:

$\mathbf{O} := (0 \quad 0 \quad 0)$ $\mathbf{O} \rightarrow (0 \quad 0 \quad 0)$ $\mathbf{o_d} := \mathbf{O}^T = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\mathbf{A} := (\mathbf{a} \quad 0 \quad 0)$ $\mathbf{A} \rightarrow (8 \quad 0 \quad 0)$ $\mathbf{a_d} := \mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

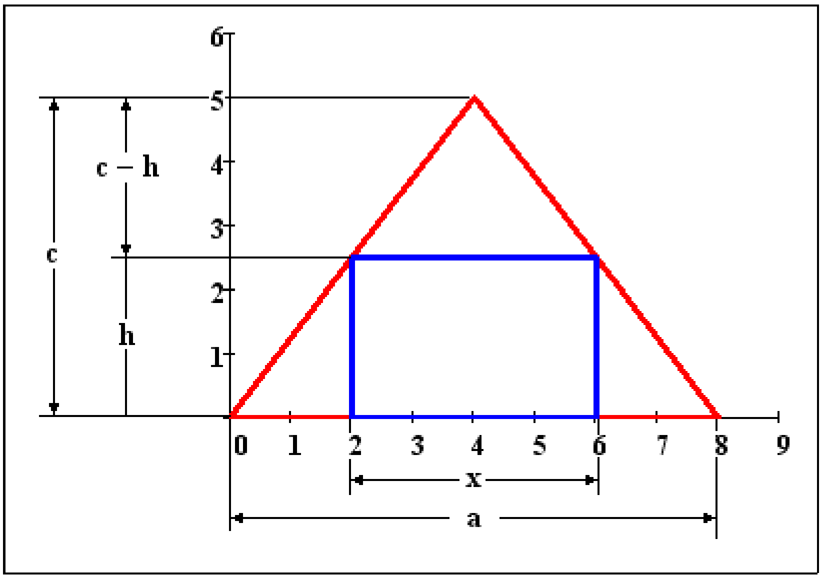
$\mathbf{C} := \left(\frac{1}{2} \cdot \mathbf{a} \quad 0 \quad \mathbf{c}\right)$ $\mathbf{C} \rightarrow (4 \quad 0 \quad 5)$ $\mathbf{c_d} := \mathbf{C}^T = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$

$\mathbf{B} := (0 \quad \mathbf{b} \quad 0)$ $\mathbf{B} \rightarrow (0 \quad 10 \quad 0)$ $\mathbf{b_d} := \mathbf{B}^T = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\mathbf{D} := (\mathbf{a} \quad \mathbf{b} \quad \mathbf{0}) \qquad \mathbf{D} \rightarrow (8 \quad 10 \quad 0) \qquad \mathbf{d_d} := \mathbf{D}^{\mathbf{T}} = \begin{pmatrix} 8 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{E} := \left(\frac{1}{2}\cdot\mathbf{a} \quad \mathbf{b} \quad \mathbf{c}\right) \qquad \mathbf{E} \rightarrow (4 \quad 10 \quad 5) \qquad \mathbf{e_d} := \mathbf{E}^{\mathbf{T}} = \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Größen des Zimmers:




Zielfunktion: $\mathbf{V(x,h) = x \cdot h \cdot b}$

Nebenbedingung über ähnliche Dreiecke:

$\mathbf{\frac{c-h}{c} = \frac{x}{a}}$ aufgelöst nach h: $\mathbf{h = c - \frac{c}{a}\cdot x}$

und eingesetzt: $\mathbf{V(x,h) = x\cdot\left(c - \frac{c}{a}\cdot x\right)\cdot b}$

ergibt die Zielfunktion: $\mathbf{V(x) := c\cdot b\cdot x - \frac{c\cdot b}{a}\cdot x^2 = 50\cdot x - \frac{25\cdot x^2}{4}}$

Definitionsmenge: $\mathbf{D = [0; a]}$

Bestimmung des Extremums:

1. Ableitung: $\mathbf{V'(x) := \frac{d}{dx}V(x) = 50 - \frac{25\cdot x}{2}}$

Bedingung für Extremum:

$$V'(x) = 0 \to 50 - \frac{25 \cdot x}{2} = 0 \text{ auflösen}, x \to 4$$

Extremum:

$x_E := V'(x) = 0$ auflösen $, x \to 4$ $\quad x_E = 4 \quad$ Rauminhalt: $\quad V(x_E) = 100$

$$HP := \left( x_E \quad V(x_E) \right) \to (4 \quad 100)$$

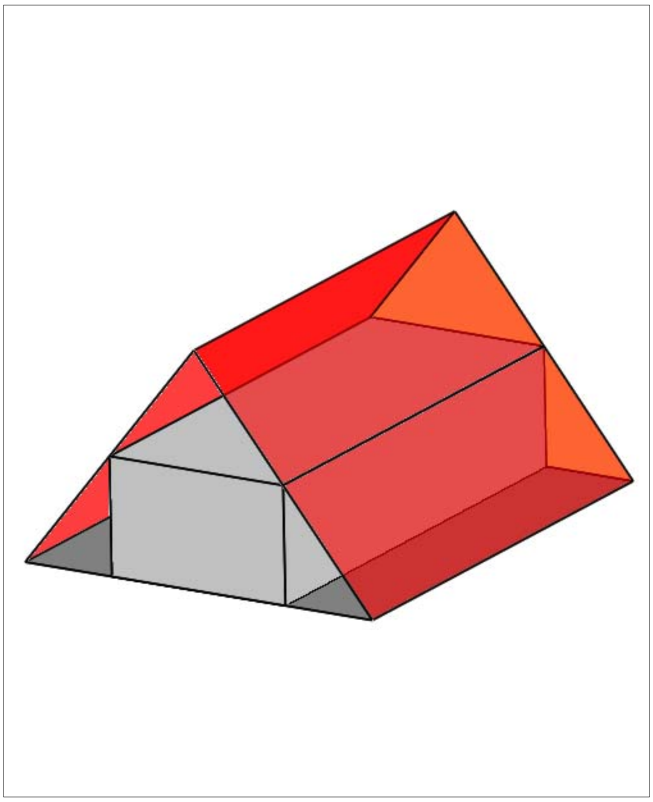
Vergleich mit den Randwerten:

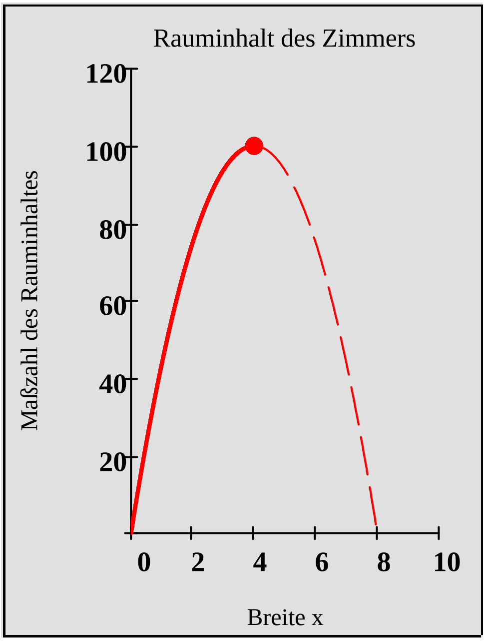
$$\lim_{x \to x_0^{+}} V(x) = 50 \cdot x_0 - \frac{25 \cdot x_0^2}{4} \qquad \lim_{x \to x_1^{-}} V(x) = 50 \cdot x_1 - \frac{25 \cdot x_1^2}{4}$$

$\Rightarrow$ **absoluter HP** $\to (4 \quad 100)$

Wählen Sie die Zimmerbreite:

Darstellung Dachgiebel






$x = 4.00 \cdot LE \qquad x_E = 4.0 \cdot LE$

$V(x) = 100.0 \cdot VE \qquad V(x_E) = 100.0$

# Modellaufgaben
## - Ganzrationale Funktion -

**Aufgabe** (Hochschulreife, FOS/BOS Nachtermin 2002 für Techniker)
Aus der Eintauchtiefe **h** einer Kugel mit dem Radius **r** in Wasser kann die Dichte $\rho_K$ einer Kugel bestimmt werden. Dabei gilt, dass die Gewichtskraft der Kugel gleich der Gewichtskraft des verdrängten Wassers ist. Diese Aussage wird als das ***archimedische Prinzip*** bezeichnet.
**Physikalische Formeln:**

Gewichtskraft des verdrängten Wasservolumens: $F_W = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot h^2 \cdot (3 \cdot r - h) \cdot \rho_W \cdot g$

Gewichtskraft der Kugel: $F_K = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 \cdot \rho \cdot g$

a) Leiten Sie aus der Gleichung $F_W = F_K$ und der Substitution $x = \frac{h}{r}$ die folgende Funktion für $\rho$ in Abhängigkeit von **x** her. Ohne Verwendung von Einheiten und mit dem Wert für die Dichte von Wasser $\rho_W = 1$ und der Fallbeschleunigung **g** ergibt sich:

$$\rho(x) = \frac{3}{4} \cdot x^2 - \frac{1}{4} \cdot x^3$$

Begründen Sie genau, warum $D_\rho = ]\,0\,;\,2\,]$ eine sinnvolle Definitionsmenge für $\rho(x)$ ist.

b) Berechnen Sie die Dichte der Kugel mit dem Radius $r_0 := 1$ und der Eintauchiefe $h_0 := 1.5$.

c) Begründen Sie, dass es einen x-Wert aus $D_\rho$ gibt, für den $\rho(x) = 0.2$ gilt.

***Archimedes von Syrakus***
***(287 v. Chr. bis 202 v. Chr)***

Großer Mathematiker der Antike:
Er formulierte das Hebelgesetz, das Auftriebsgesetz, berechnete die Kreiszahl Pi, fand Formeln für Volumen und Oberfläche der Kugel. Seinen Zeitgenossen war er jedoch mehr durch die Erfindungen der praktischen Mechanik, wie Wasserschnecke oder archimedische Schraube, Flaschenzug oder Kriegsmaschinen, bekannt.

Portrait mit freundlicher Genehmigung von:

**http://turnbull.mcs.st-and.ac.uk/history/PictDisplay/Archimedes.html**

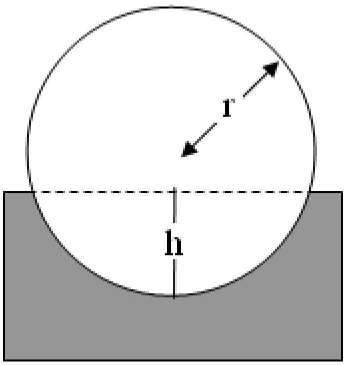
**Teilaufgabe a)**

Kräfteansatz:

$$\frac{1}{3}\cdot\pi\cdot h^2\cdot(3\cdot r - h)\cdot\rho_W\cdot g = \frac{4}{3}\cdot\pi\cdot r^3\cdot\rho\cdot g$$

$$\rho(r,h) := \frac{1}{3}\cdot\pi\cdot h^2\cdot(3\cdot r - h)\cdot\rho_W\cdot g = \frac{4}{3}\cdot\pi\cdot r^3\cdot\rho\cdot g \;\left|\; \begin{array}{l}\textbf{ersetzen}, \rho_W = 1\\ \textbf{auflösen}, \rho\\ \textbf{erweitern}\end{array}\right. \rightarrow \frac{3\cdot h^2}{4\cdot r^2} - \frac{h^3}{4\cdot r^3}$$

$$\rho(r,h) = \frac{3\cdot h^2}{4\cdot r^2} - \frac{h^3}{4\cdot r^3}$$




Substitution $x = \frac{h}{r}$ : $\rho(x) := \frac{3}{4}\cdot x^2 - \frac{1}{4}\cdot x^3$

Begründung der Definitionsmenge:

$x = 0$ $\frac{h}{r} = 0$ $h = 0$ Kugel taucht nicht ein.

$x = 2$ $\frac{h}{r} = 2$ $h = 2\cdot r$ Kugel taucht vollständig ein.

**Teilaufgabe b)**

$x_0 := \frac{h_0}{r_0}$ $\rho(x_0) = 0.844$

**Teilaufgabe c)**

$$\lim_{x \to 0^+} \rho(x) = 0 \qquad \rho(2) = 1$$

Funktion $\rho(x)$ ist stetig auf dem Intervall **] 0;2 [**, also muss es nach dem **Zwischenwertsatz** einen Wert zwischen 0 und 1 geben.

## Physikalischer Hintergrund

Spezifisches Gewicht: $\rho = \frac{m}{V}$

Masse bei festem spez. Gewicht und Volumen des Körpers: $m_K = \rho_K \cdot V$

Gesamtvolumen des Probekörpers: $V_K = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$

Gewichtskraft des Probekörpers: $F_K = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 \cdot \rho_K \cdot g$

Gewichtskraft des verdrängten Wasservolumens:

Volumen des Kugelsegments: $V_S = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot h^2 \cdot (3 \cdot r - h)$

Masse des verdrängten Wassers: $m_W = \rho_W \cdot V_S$

Auftriebskraft des Wassers: $F_W = m_W \cdot g = \rho_W \cdot V_S \cdot g = \rho_W \cdot \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot h^2 \cdot (3 \cdot r - h) \cdot g$

Kräfte gleichsetzen und nach der Dichte des Körpers auflösen: $F_W = F_K$

$$\frac{1}{3} \cdot \rho_W \cdot \pi \cdot h^2 \cdot (3 \cdot r - h) \cdot g_0 = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 \cdot \rho_K \cdot g_0 \text{ auflösen}, \rho_K \rightarrow -\frac{h^2 \cdot \rho_W \cdot (h - 3 \cdot r)}{4 \cdot r^3}$$

Zielfunktion: spez. Dichte des Probekörpers: $\rho_K = \frac{1}{4} \cdot \rho_W \cdot h^2 \cdot \frac{(3 \cdot r - h)}{r^3}$

<u>Gegeben:</u>

spez. Dichte von Wasser: $\rho_W := 0.998 \cdot 10^3 \cdot \frac{kg}{m^3}$

Radius der Probekugel (fest): $r := 0.10 \cdot m$

Eintauchtiefe (materialabhängig): $h := 0.15 \cdot m$

<u>Gesucht:</u> Spezifische Dichte des Probekörpers in Abhängigkeit der Eintauchtiefe h:

$\rho_K(h) := \frac{1}{4} \cdot \rho_W \cdot h^2 \cdot \frac{(3 \cdot r - h)}{r^3}$ $\qquad$ $\rho_K(h) = 842 \frac{kg}{m^3}$

Umrechnung:

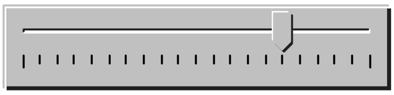
$1\,\frac{kg}{m^3} = 10^{-3}\cdot\frac{g}{cm^3}$ $\qquad$ $\boxed{\rho_K = 0.842\cdot\frac{g}{cm^3}}$ Das ist die Dichte eines Holzes

Dichte von Holz: $\rho_{Holz} = 700\cdot\frac{kg}{m^3}$ bis $900\cdot\frac{kg}{m^3}$

---

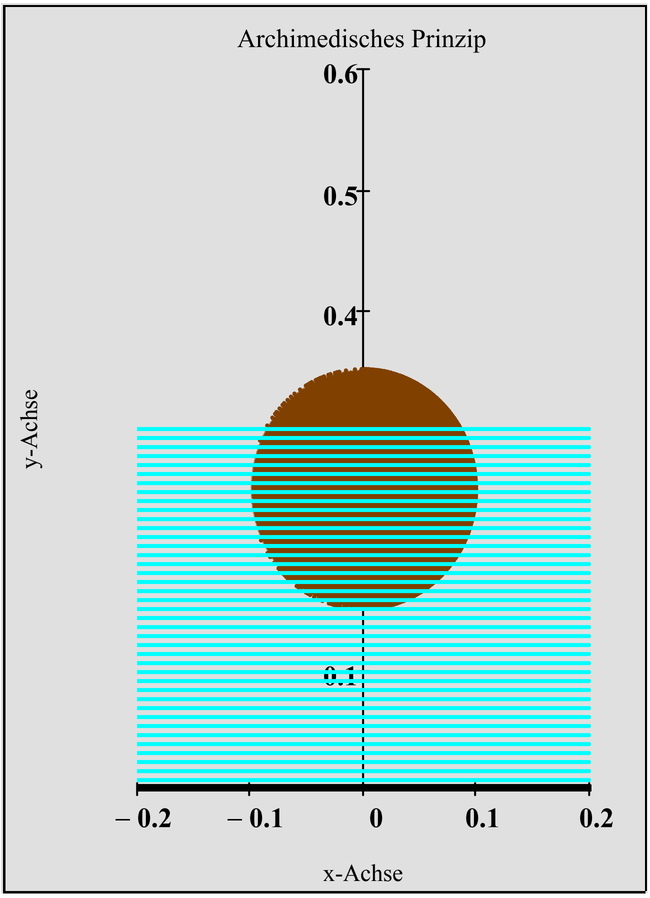
Bei dem Versuch soll es sich, wie auch Archimedes annahm, um ein sehr großes Gefäß handeln, sodass beim Eintauchen der Kugel die Wasseroberfläche nicht ansteigt.

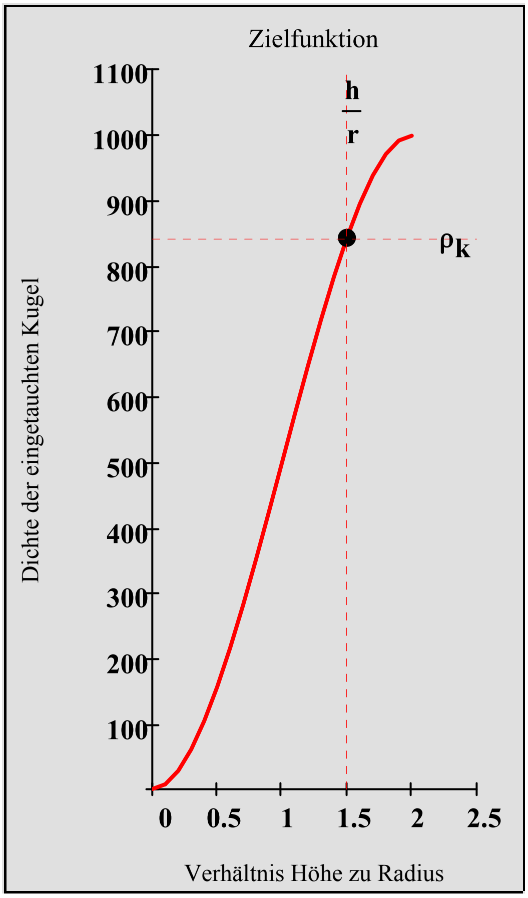
Wählen Sie die Höhe der Eintauchtiefe:



▶ Darstellung Gefäß und Wasser

$h = 0.15\,m$ $\qquad$ $\rho_K(h) = 842.1\,\frac{kg}{m^3}$



# Exponentialfunktionen
## - Anwendung der doppelt logarithmischen Darstellung -

### Aufgabe

Gegeben ist das ***dritte Keplersche Gesetz*** $\dfrac{T_1^{\ 2}}{T_2^{\ 2}} = \dfrac{a_1^{\ 3}}{a_2^{\ 3}}$ bzw. $\dfrac{T^2}{a^3} = C_S$,

wobei $C_S$ die ***Keplerkonstante des Sonnensystems*** ist.

Gegeben sind die Messwerte für die Umlaufzeiten T und die Entfernungen a (Bahnradien der großen Halbachsen der Ellipsenumlaufbahnen um die Sonne) der Planeten Merkur, Venus, Erde, Mars, Jupiter, Saturn, Uranus und Neptun.

a) Bestätigen Sie das Gesetz mithilfe der Messwerte und bestimmen Sie die Keplerkonstante.

b) Aus dem gegebenen Gesetz ergibt sich folgender funktionaler Zusammenhang:

$$T(a) = \sqrt{C_S a^3} = c \cdot a^{1.5} \quad \text{mit } c = \sqrt{C_S}.$$

Stellen Sie die Messwerte und den theoretischen Verlauf in einem linearen Koordinatensystem dar.

c) Stellen Sie die Messwerte und den theoretischen Verlauf in einem doppelt logarithmischen Koordinatensystem dar. Begründen Sie den linearen Verlauf.

d) Bestimmen Sie aus dem Verlauf des Graphen T(a) im doppelt logarithmischen Koordinatensystem die Konstanten c und C.
Bestätigen Sie auch den Zahlenwert **1.5** für den Exponenten.

Messwerte: Planet r in km T in Tagen

**MW** :=

| | | |
|---|---|---|
| "Merkur" | 57910000 | 87.969 |
| "Venus" | 108200000 | 224.701 |
| "Erde" | 149600000 | 365.256 |
| "Mars" | 227940000 | 686.98 |
| "Jupiter" | 778330000 | 4332.71 |
| "Saturn" | 1426980000 | 10759.5 |
| "Uranus" | 2870990000 | 30685 |
| "Neptun" | 4497070000 | 60190 |

Zuweisen der Messwerte:

Bahnradius in m: $a_P := MW^{\langle 2 \rangle} \cdot 10^3$

Umlaufszeit in s: $T_P := MW^{\langle 3 \rangle} \cdot 86400$

Umrechnung Tag in Sekunde:

$24 \cdot 3600 = 86400$

**Teilaufgabe a)**

Keplerkonstante: $C_S := \dfrac{T_P^{\,2}}{a_P^{\,3}}$

$$C_S = \begin{pmatrix} 29.746 \\ 29.755 \\ 29.746 \\ 29.748 \\ 29.72 \\ 29.741 \\ 29.702 \\ 29.736 \end{pmatrix} \cdot 10^{-20} \quad \text{in} \ \frac{s^2}{m^3}$$

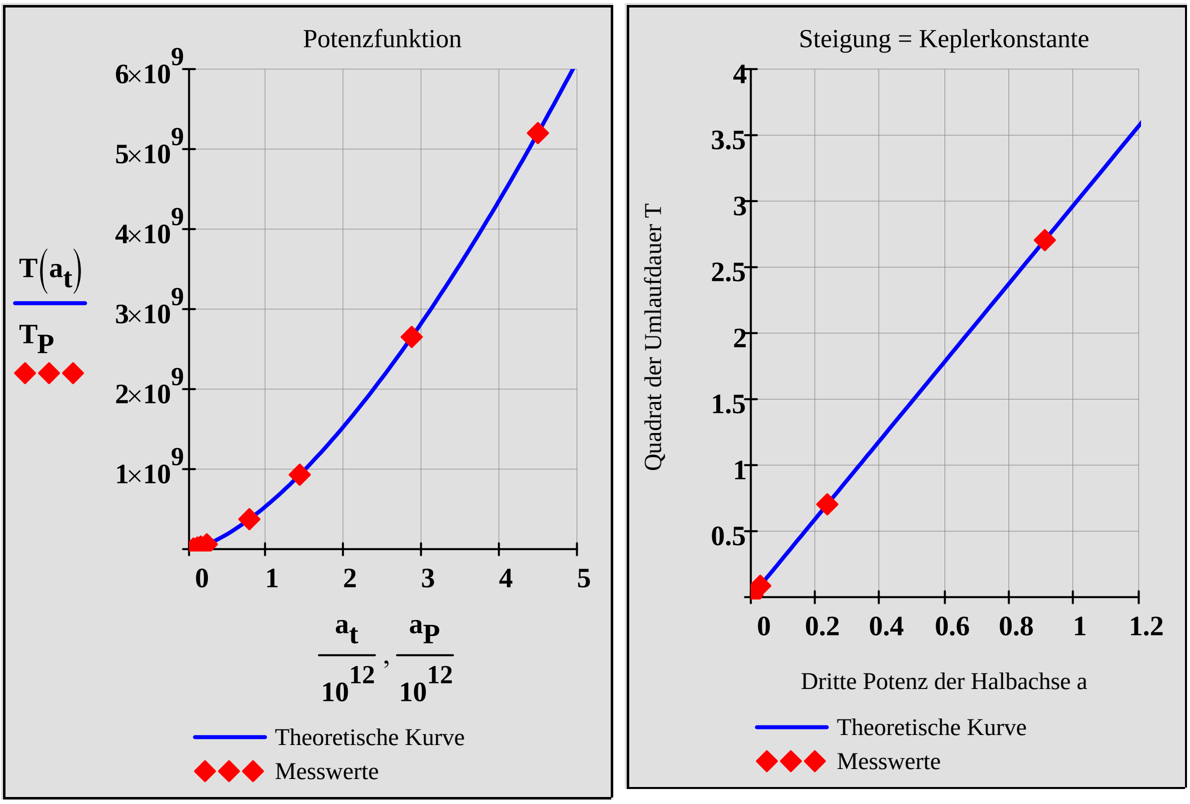
Mittelwert: $C_{Sm} := \text{mittelwert}(C_S)$

$$C_{Sm} = 29.737 \cdot 10^{-20} \ \text{in} \ \frac{s^2}{m^3}$$

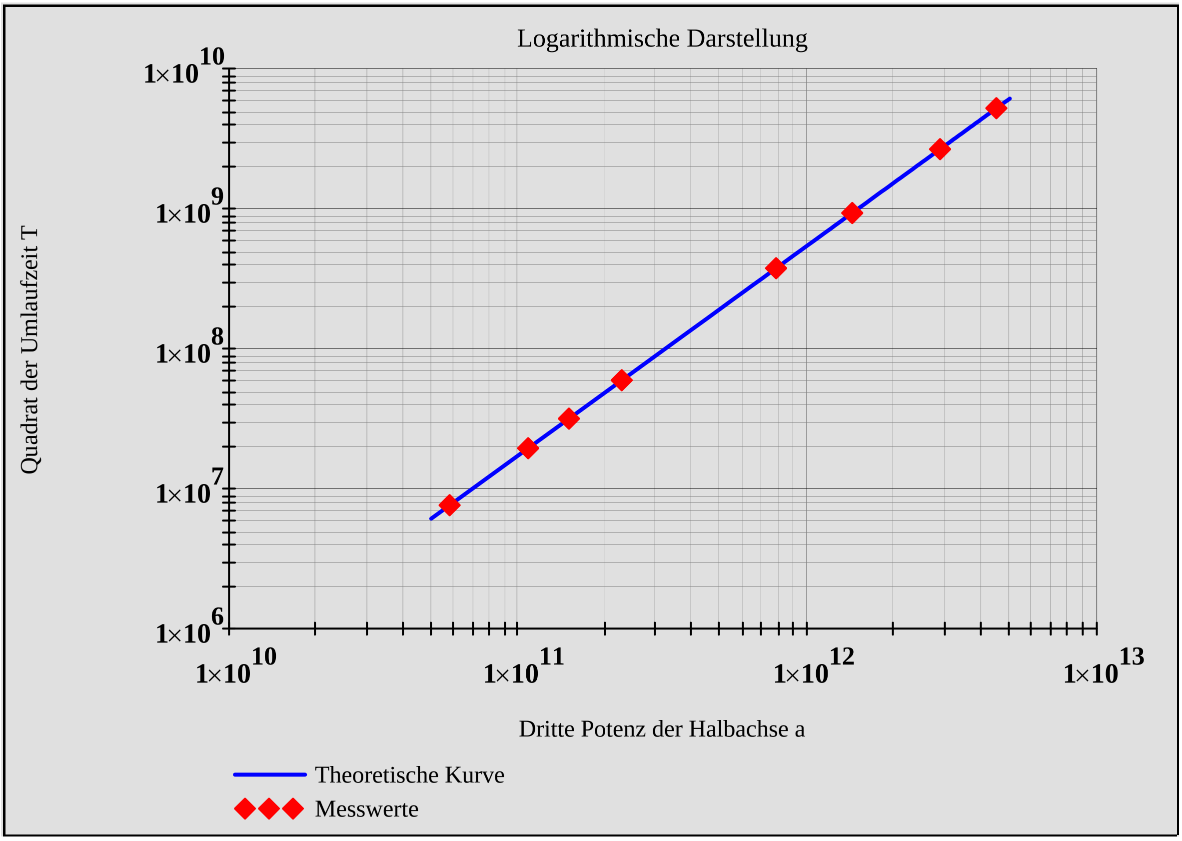
**Teilaufgabe b)**

Theoretische Potenzfunktion: $T(a) := \sqrt{C_{Sm} \cdot a^{1.5}}$

Graphische Darstellung:



**Teilaufgabe c)**




Begründung für den linearen Verlauf:

Funktionsterm: $T = c \cdot a^k$

Logarithmieren: $\ln(T) = \ln\left(c \cdot a^k\right)$

Argument aufspalten: $\ln(T) = \ln(c) + \ln\left(a^k\right)$ $\quad \ln(T) = \ln(c) + k \cdot \ln(a)$

Substitution: $\ln(T) = y \quad \ln(a) = x$

Geradengleichung: $y = \ln(c) + k \cdot x$

**Teilaufgabe d)**

Auswertung:

Steigung der Geraden: $k = 1.5$ Achsenabschnitt: $d = -21.326$

Konstante: $d = \ln(c) \quad c := e^d \quad c = 5.471 \times 10^{-10}$

Keplerkonstante: $C_S := c^2 \quad C_S = 29.931 \cdot 10^{-20}$ in $s^2 \cdot m^{-3}$

# Integralrechnung
## - Berechnung von beliebigen Flächen -

### Methodische Vorbemerkung
Mit den folgenden Aufgaben soll die Berechnung von Flächen unter Graphen ganzrationaler Funktionen geübt werden. Für die Bestimmung der Nullstellen werden bekannte Lösungsverfahren gefordert. Bei der Flächenberechnung werden Symmetrieeigenschaften, Eigenschaften mehrfacher Nullstellen usw. verwendet.

### Aufgabe
Gegeben sind die reellen Funktionen $f_i$ mit den Funktionstermen

$$f_1(x) := \frac{3}{4}\cdot\left(x^5 - 4\cdot x^3\right);$$

$$f_2(x) := -\frac{1}{3}\cdot\left(x^4 - 3\cdot x^3 - 3\cdot x^2 + 11\cdot x - 6\right);$$

$$f_3(x) := \frac{1}{2}\cdot\left(x^6 - 4\cdot x^3 - 5\right);$$

$$f_4(x) := -\frac{1}{2}\cdot\left(x^3 - x^2 - 5\cdot x - 3\right);$$

$$f_5(x) := \frac{1}{3}\cdot\left(x^4 - 8\cdot x^2 + 16\right);$$

$$f_6(x) := -\frac{6}{5}\cdot\left(x^4 - 5\cdot x^2 + 4\right);$$

a) Berechnen Sie Lage und Art der Nullstellen der Funktionen $f_i$.

b) Gegeben sind die Graphen (siehe nächste Seite) der reellen Funktionen $f_i$ mit den zugehörigen Flächenmaßzahlen.
Ordnen Sie den folgenden Diagrammen jeweils einen Funktionsterm aus Aufgabe a) zu. Begründen Sie Ihre Entscheidung.

c) Bestimmen Sie Stammfunktionen $F_i$ und die Flächen $A_i$ zwischen den Graphen $G_{f_i}$ der Funktionen $f_i$ und der x-Achse und vergleichen Sie die Maßzahlen der Flächeninhalte mit den Werten in den zugehörigen Diagrammen aus b).

---

## Graphen zu Teilaufgabe b)