Geraden im Raum
- Spurpunkte im Koordinatensystem - Lösung zum Arbeitsblatt -

Expertenrunde 1 - Grundlagen

Gegeben ist eine Gerade $\mathbf{g{:}\ x = OA} + \sigma\cdot\mathbf{u}$ mit $\sigma \in \mathbf{IR}$.
Um eine Vorstellung vom Verlauf der Geraden im dreidimensionalen Koordinatensystem zu bekommen, bestimmt man die ***Durchstoßpunkte*** der Geraden in den Koordinatenebenen, das sind die sogenannten ***Spurpunkte***.

Mit Hilfe der Vektorgleichung für die Gerade g: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \sigma\cdot\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$

können diese Spurpunkte ermittelt werden.

(1) Für den Spurpunkt in der x_1-x_2-Ebene gilt: $x_3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 0 = a_3 + \sigma\cdot u_3$

Auflösen nach σ: $\Leftrightarrow \quad \sigma_3 = -\frac{a_3}{u_3}$ wobei $u_3 \neq 0$

Einsetzen in die Geradengleichung ergibt den Spurpunkt S_3 mit $OS_3 = \begin{pmatrix} a_1 + \sigma_3\cdot u_1 \\ a_2 + \sigma_3\cdot u_2 \\ 0 \end{pmatrix}$

Für $u_3 = 0$ gibt es keinen Spurpunkt in der x_1-x_2-Ebene, die Gerade g ist entweder parallel zur Ebene, in ihr enthalten oder parallel zu einer der beiden Koordinatenachsen.

(2) Für den Spurpunkt in der x_1-x_3-Ebene gilt: $x_2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 0 = a_2 + \sigma\cdot u_2$

Auflösen nach σ: $\Leftrightarrow \quad \sigma_2 = -\frac{a_2}{u_2}$ wobei $u_2 \neq 0$

Einsetzen in die Geradengleichung ergibt den Spurpunkt S_2 mit $OS_2 = \begin{pmatrix} a_1 + \sigma_2\cdot u_1 \\ 0 \\ a_3 + \sigma_2\cdot u_3 \end{pmatrix}$

Für $\mathbf{u_2 = 0}$ gibt es keinen Spurpunkt in der x_1-x_3-Ebene, die Gerade g ist entweder parallel zur Ebene, in ihr enthalten oder parallel zu einer der beiden Koordinatenachsen.

(3) Für den Spurpunkt in der x_2-x_3-Ebene gilt: $\mathbf{x_1 = 0} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{0 = a_1} + \sigma \cdot \mathbf{u_1}$

Auflösen nach σ: $\Leftrightarrow \quad \sigma_1 = -\frac{\mathbf{a_1}}{\mathbf{u_1}}$ wobei $\mathbf{u_1} \neq 0$

Einsetzen in die Geradengleichung ergibt den Spurpunkt $\mathbf{S_1}$ mit $\mathbf{OS_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ a_2 + \sigma_1 \cdot u_2 \\ a_3 + \sigma_1 \cdot u_3 \end{pmatrix}$

Für $\mathbf{u_1 = 0}$ gibt es keinen Spurpunkt in der x_2-x_3-Ebene, die Gerade g ist entweder parallel zur Ebene, in ihr enthalten oder parallel zu einer der beiden Koordinatenachsen.

Gruppe A

Gegeben sind die Geraden $\mathbf{g_i}$ mit Ortsvektor **OA** des Aufpunktes **A** und Richtungsvektor **u**.

a) Geben Sie die Geradengleichung **g** an und bestimmen Sie die Koordinaten der Spurpunkte.

b) Stellen Sie die Gerade **g** mit Hilfe ihrer Spurpunkte graphisch dar.

Gerade 1:

$\mathbf{OA} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$

Gerade 4:

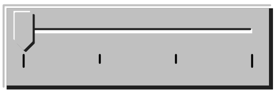
$\mathbf{OA} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} \quad \mathbf{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$

Gerade 7:

$\mathbf{OA} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} \quad \mathbf{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Gerade 10:

$\mathbf{OA} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{u} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

Auswahl der verschiedenen Geraden: 

Definitionen

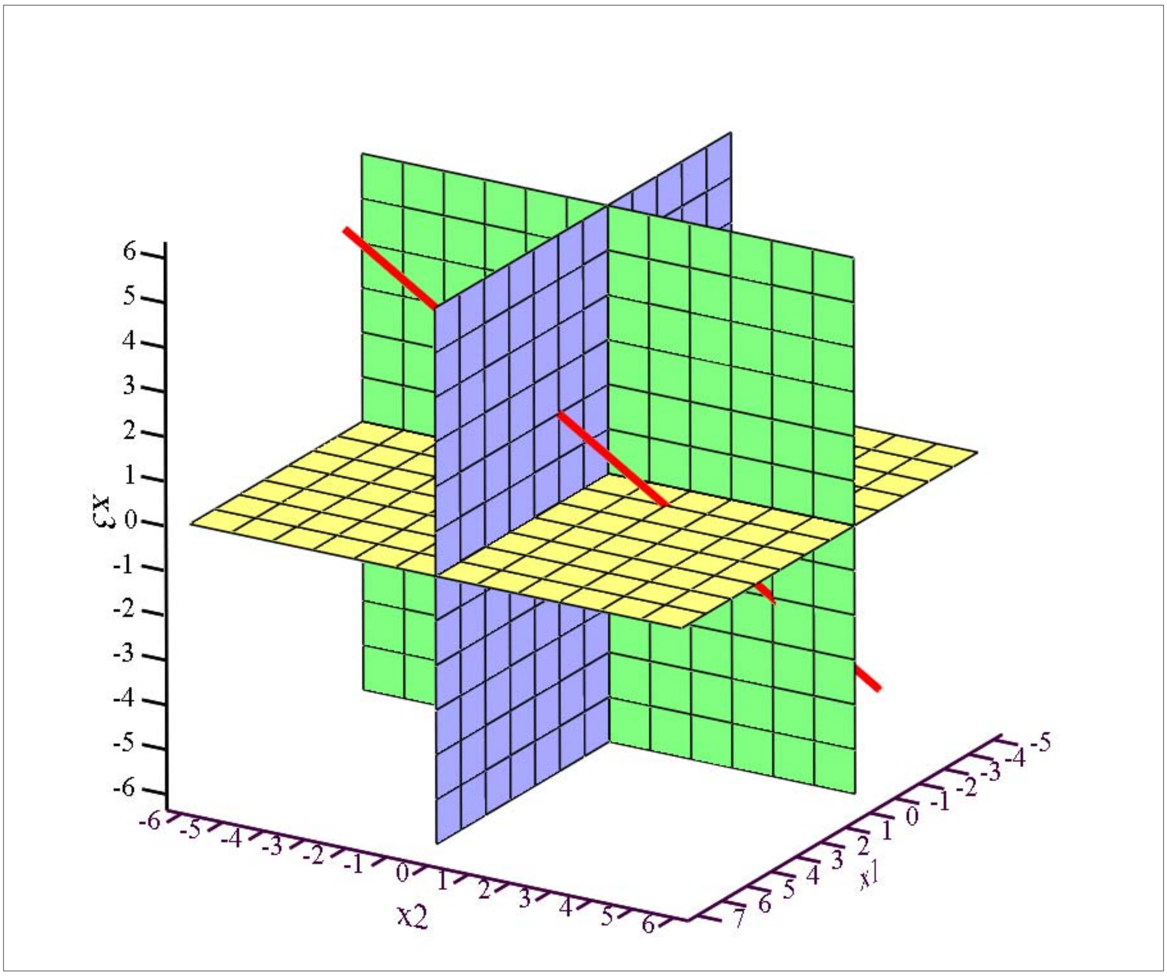
Teilaufgabe a)

Ausgewählte Gerade: $\mathbf{n = 1}$

$$\mathbf{g(\sigma)} = \begin{pmatrix} \sigma + 3 \\ -2\cdot\sigma - 2 \\ 2\cdot\sigma + 4 \end{pmatrix}$$

Spurpunkte: $S_1 \rightarrow (0 \quad 4 \quad -2)$ $S_2 \rightarrow (2 \quad 0 \quad 2)$ $S_3 \rightarrow (1 \quad 2 \quad 0)$

Teilaufgabe b)



Bemerkung:
Im Diagramm wird auf das Eintragen der Spurpunkte mit einem Symbol verzichtet, da alle Spurpunkte auf ganzzahligen Gitterpunkten liegen.