

# Inhaltsverzeichnis Band 2c

Die Mathcad-Dateien sind, abhängig von der jeweiligen Anwendung, auf unterschiedliche Feldindizes eingestellt. Um Missverständnisse zu vermeiden, wird der Feldindex mithilfe des Schlüsselworts **ORIGIN** zu Beginn jeder Datei abgefragt.

Auf der beigelegten CD befinden sich zwei Verzeichnisse:  
Inhalt\_Mathcad und Inhalt\_pdf

In diesen Verzeichnissen sind alle Mathcad-Dateien (\*\*\*.xmcd) und zum farbigen Ausdrucken von Mathcad in PDF-Dokumente umgewandelte Dateien (\*\*\*.pdf) abgelegt.

Das folgende Inhaltsverzeichnis zeigt sämtliche Mathcad-Dateien auf der CD. Nur ein kleiner Teil der Dokumente ist ausgedruckt und mit einer Seitenzahl gekennzeichnet.

	Seite
<b>1. Analysis</b>	
<b>1.1 Spezielle Funktionen</b>	
1.1.01 Arcussinusfunktion – Einführung	
1.1.02 Arcuskosinusfunktion – Einführung	
1.1.03 Arcustangensfunktion – Einführung	
1.1.04 Arcussinusfunktion – Kurvendiskussion	
1.1.05 Arcuskosinusfunktion – Kurvendiskussion	11
1.1.06 Arcustangensfunktion – Kurvendiskussion	
1.1.07 Sinus-Hyperbolicus-Funktion – Einführung	
1.1.08 Kosinus-Hyperbolicus-Funktion – Einführung	15
1.1.09 Tangens-Hyperbolicus-Funktion – Einführung	
1.1.10 Ortskurve der allgemeinen quadratischen Funktion	
1.1.11 Ortskurve einer Kurvenschar mit Logarithmusfunktion	17
1.1.12 Wurzelfunktionen: Kreis in funktionaler Darstellung	
<b>1.2 Anwendungen der Differentialrechnung</b>	
1.2.01 Krümmungskreis als Maß für die Krümmung - Theorie	
1.2.02 Krümmungskreise - Aufgaben 1	
1.2.03 Krümmungskreise - Aufgaben 2	25
1.2.04 Herleitung der Krümmung über das Bogenintegral	
1.2.05 Symmetriebeweis mithilfe einer Koordinatentransformation	
1.2.06 Formel von Cardano: Herleitung	
1.2.07 Formel von Cardano: Fallunterschg. u. graphische Veranschaulichung	
<b>1.3 Hüllkurven</b>	
1.3.01 Hüllkurve einer Kurvenschar - Einführung	
1.3.02 Hüllkurve zu einer Geradenschar: Animation	
1.3.03 Hüllkurve zu einer Geradenschar: Aufgaben	30
1.3.04 Hüllkurve zu einer Schar von Geraden: Anwendungsaufgabe Tor	35
1.3.05 Hüllkurve zu einer Schar von Geraden: Anwendungsaufgabe Leiter	
1.3.06 Hüllkurve zu einer Schar von Kreisen mit Trägergraph 1	
1.3.07 Hüllkurve zu einer Schar von Kreisen mit Trägergraph 2	
1.3.08 Hüllkurve zu einer Schar von Kreisen mit Trägergraph 3	

	Seite
1.3.09 Hüllkurve zu einer Schar von Kreisen mit Trägergraph 4	38
1.3.10 Hüllkurve zu einer Schar von Kreisen mit Trägergraph 5	
1.3.11 Hüllkurve zu einer Schar von Kreisen mit Trägergraph 6	
1.3.12 Hüllkurve zu einer Schar von Kreisen mit Trägergraph 7	
1.3.13 Hüllkurve zu einer Schar von Exponentialfunktionen	
1.3.14 Hüllkurve einer Parabel: Neilsche Parabel	
1.3.15 Hüllkurve beim schiefen Wurf	40
<b>1.4 Weiterführende Integralrechnung</b>	
1.4.01 Partielle Integration	
1.4.02 Integration durch Substitution	
1.4.03 Integration der Gauß'schen Glockenkurve	44
<b>1.5 Anwendung der Integralrechnung</b>	
1.5.01 Rotation um die x-Achse: Näherung über ein- und umbeschr. Zylinder	
1.5.02 Rotation um die x-Achse: Beispiel Zylinder	
1.5.03 Rotation um die x-Achse: Beispiel Kegelstumpf	
1.5.04 Rotation um die x-Achse: Beispiel Paraboloid	
1.5.05 Rotation um die y-Achse: Näherung über ein- und umbeschr. Zylinder	
1.5.06 Rotation um die y-Achse: Beispiel Zylinder	
1.5.07 Rotation um die y-Achse: Beispiel Ring	
1.5.08 Rotation um die y-Achse: Beispiel Paraboloid	
1.5.09 Rotation um die y-Achse: Beispiel Kegel	
1.5.10 Rotation um die y-Achse: Beispiel Kelch	
1.5.11 Rotation um die y-Achse: Beispiel Mulde	
1.5.12 Rotation um die y-Achse: Beispiel Wall	
1.5.13 Rotation um die y-Achse: Berechnung mithilfe der Umkehrfunktion	48
1.5.14 Rotation um die x-Achse: Aufgabe 1	
1.5.15 Rotation um die x-Achse: Aufgabe 2	
1.5.16 Rotation um die x-Achse: Aufgabe 3	
1.5.17 Rotation um die x-Achse: Aufgabe 4	51
1.5.18 Rotation um die x-Achse: Aufgabe 5	
1.5.19 Rotation um die y-Achse: Aufgabe 6	55
1.5.20 Rotation um die x- und die y-Achse: Aufgabe 7	
1.5.21 Rotation um die x- und die y-Achse: Aufgabe 8	59
<b>1.6 Numerische Integration</b>	
1.6.01 Integral numerisch: Einführung	
1.6.02 Integral numerisch: Riemann	
1.6.03 Integral numerisch: Mittelpunktverfahren	
1.6.04 Integral numerisch: Trapezverfahren	
1.6.05 Integral numerisch: Simpsonsche Regel	
1.6.06 Integral numerisch: Vergleich von allen Verfahren	
1.6.07 Graphische Integration	
<b>1.7 Folgen und Reihen</b>	
1.7.01 Folgen - Theorie	
1.7.02 Folgen - Grenzwert	
1.7.03 Arithmetische Folge	

1.7.04 Geometrische Folge	
1.7.05 Fibonacci-Folge	
1.7.06 Berechnung der Euler'schen Zahl $e$	
1.7.07 Berechnung der Kreiszahl $\pi$	
1.7.08 Reihen - Theorie	
1.7.09 Potenzreihe der Sinusfunktion	
1.7.10 Potenzreihe der Kosinusfunktion	
1.7.11 Potenzreihe der natürlichen Exponentialfunktion	
1.7.12 Potenzreihe der natürlichen Logarithmusfunktion	
1.7.13 Reihen - Integration mithilfe einer Potenzreihe	61
1.7.14 Reihen - Potenzreihe der Lösung einer Differentialgleichung 1	
1.7.15 Reihen - Potenzreihe der Lösung einer Differentialgleichung 2	
1.7.16 Gleitender Mittelwert	
1.7.17 Berechnen von Logarithmen durch Reihenentwicklung	
1.7.18 Butterfly-Effekt: Lorenzattraktor	

## 1.8 Algebraische Kurven

1.8.01 Gerade in Polarkoordinaten	
1.8.02 Archimedische Spirale	
1.8.03 Logarithmische Spirale	
1.8.04 Hyperbolische Spirale 1. und 2. Ordnung	66
1.8.05 Spiralen der Form $(r(\varphi))^n = a \cdot \varphi$	
1.8.06 Cornu Spirale	
1.8.07 Weitere Spiralen	
1.8.08 Abrollkurven: Zykloiden (Kreis rollt längs einer Geraden)	
1.8.09 Abrollkurven: Hypozykloiden - Theorie	
1.8.10 Abrollkurven: Hypozykloiden - Beispiele	70
1.8.11 Abrollkurven: Epizykloiden - Theorie	73

## 2. Differentialgleichungen

### 2.1 Lösung durch Integration von $y' = f(x)$

2.1.01 DGL Typ 1: Einführung in die Methode ( $y' = 3x^2 - 6x$ )	
2.1.02 DGL Typ 1: Aufgabe 1 ( $y' = 3x^3 - 6x$ )	
2.1.03 DGL Typ 1: Aufgabe 2 ( $y' = \frac{2x}{x^2 + 1}$ )	
2.1.04 DGL Typ 1: Aufgabe 3 ( $y' = \ln(x) - 1$ )	
2.1.05 DGL Typ 1: Aufgabe 4 (physikalisches Beispiel, Bewegung)	

### 2.2 Lösung durch Integration von $y'' = f(x)$

2.2.01 DGL Typ 1: Einführung in die Methode ( $y'' = 0,75x$ )	
2.2.02 DGL Typ 1: Aufgabe 1 ( $y'' = -12x^2 + 8$ )	
2.2.03 DGL Typ 1: Aufgabe 2 (physikalisches Beispiel, Bewegung)	

	Seite
<b>2.3 Graphische Lösung über das Richtungsfeld</b>	
2.3.01 DGL Typ 1: Theorie Richtungsfeld, Einführung ( $y' - 2xy - x = 0$ )	75
2.3.02 DGL Typ 2: Richtungsfeld Aufgabe 1 ( $y' - y \cdot \cos x = 0$ )	
2.3.03 DGL Typ 3: Richtungsfeld Aufgabe 2 ( $y' + y + 2 \sin x = 0$ )	
2.3.04 DGL Typ 4: Richtungsfeld Aufgabe 3 ( $y' + 2x - y + 4 = 0$ )	
2.3.05 DGL Typ 4: Richtungsfeld Aufgabe 4 ( $y' = \left( \cos\left(\frac{y}{x}\right) \right)^2 + \frac{y}{x} - 1$ )	
<b>2.4 Separation der Variablen</b>	
2.4.01 DGL Typ 2: Methode Separation der Variablen, graphische Lösung über Richtungsfelder ( $y' - xy = 0$ )	
2.4.02 DGL Typ 2, Aufgabe 1 ( $y' + 2xy = 0$ )	
2.4.03 DGL Typ 2, Aufgabe 2 ( $y' + 2x - xy = 0$ )	
2.4.04 DGL Typ 2, Aufgabe 3 ( $y' - \sin(x) \cdot y = 0$ )	
2.4.05 DGL Typ 2, Aufgabe 4 ( $y' - y^2 - 1 = 0$ )	
2.4.06 DGL Typ 2, Aufgabe 5 ( $y' + x^2 \cdot (y - 1) = 0$ )	76
2.4.07 DGL Typ 2, Aufgabe 6 ( $y' + y \cdot x^{-1} = 0$ ) – Richtungsfeld	
2.4.08 DGL Typ 2, Aufgabe 7 ( $y' + y^2 = 0$ )	
2.4.09 DGL Typ 2, Aufgabe 8 ( $y' - \sqrt{x} \cdot y^2 = 0$ )	
2.4.10 DGL Typ 2, Aufgabe 9 ( $y' + 2x \cdot e^{y-1} = 0$ )	
2.4.11 DGL Typ 2, Aufgabe 10 ( $y' - 2xy^2 = 0$ )	
2.4.12 DGL Typ 2, Aufgabe 11 ( $y' - \frac{x^2}{1-y^2} = 0$ ) – Richtungsfeld	80
2.4.13 DGL Typ 2: Physikalische Grundlagen zu Kondensator und Spule	
2.4.14 DGL Typ 2: Ein- und Ausschaltvorgang am Kondensator	
2.4.15 DGL Typ 2: Ein- und Ausschaltvorgang an der Spule	
2.4.16 DGL Typ 2: Lösung der DGL zum natürlichen Wachstum	
2.4.17 DGL Typ 2: Lösung der DGL zum radioaktiven Zerfall	
<b>2.5 Variation der Konstanten</b>	
2.5.01 DGL Typ 3: Methode Variation der Konstanten ( $y' + 2xy = 0$ )	
2.5.02 DGL Typ 3, Aufgabe 1 ( $y' + y - x^2 = 0$ )	
2.5.03 DGL Typ 3, Aufgabe 2 ( $y' - 3y - x + \frac{1}{3} = 0$ )	
2.5.04 DGL Typ 3, Aufgabe 3 ( $y' + 2y - e^{-2x} = 0$ )	
2.5.05 DGL Typ 3, Aufgabe 4 ( $y' - \frac{y}{x} + x^2 = 0$ )	
2.5.06 DGL Typ 3, Aufgabe 5 ( $y' - \frac{y}{x} - \frac{x-1}{x} = 0$ )	
2.5.07 DGL Typ 3, Aufgabe 6 ( $xy' + y + x^3 - x^2 = 0$ )	82
2.5.08 DGL Typ 3, Aufgabe 7 ( $x^2 y' + y' - xy - 1 = 0$ )	
2.5.09 DGL Typ 3, Aufgabe 8 ( $y' \cdot \cos(x) + y \cdot \sin(x) - 2 \cdot \sin(x) \cdot \cos(x) = 0$ )	

2.5.10 DGL Typ 3, Aufgabe 9 ( $y' + 2y - \cos(x) = 0$ )

2.5.11 DGL Typ 3, Aufgabe 10 ( $y' \cdot (x+1) + y + x^2 = 0$ )

2.5.12 DGL Typ 3, Aufgabe 11 ( $x y' - 3y' + y - \frac{x-3}{x^2+1} = 0$ )

## 2.6 Substitution 1

2.6.01 DGL Typ 4: Substitution 1, Einführung ( $y' = 2x + y + 3$ )

2.6.02 DGL Typ 4: Substitution 1, Aufgabe 1 ( $y' = x + y$ )

2.6.03 DGL Typ 4: Substitution 1, Aufgabe 2 ( $y' = 2x - y + 3$ )

2.6.04 DGL Typ 4: Substitution 1, Aufgabe 3 ( $y' = (x + y)^2$ )

2.6.05 DGL Typ 4: Substitution 1, Aufgabe 4 ( $y' = \frac{1}{x+y} - 1$ )

2.6.06 DGL Typ 4: Substitution 1, Aufgabe 5 ( $y' = (\cos(y-x))^2 + 1$ )

2.6.07 DGL Typ 4: Substitution 1, Aufgabe 6 ( $y' = \frac{-1}{\cos(y-x)} + 1$ )

## 2.7 Substitution 2

2.7.01 DGL Typ 4: Substitution 2, Einführung ( $y' = -\frac{y}{x} - 2$ )

2.7.02 DGL Typ 4: Substitution 2, Aufgabe 1 ( $y' = \frac{y}{2x} - \frac{x}{2y}$ )

2.7.03 DGL Typ 4: Substitution 2, Aufgabe 2 ( $y' = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$ )

2.7.04 DGL Typ 4: Substitution 2, Aufgabe 3 ( $y' = 2 - 3 \cdot \frac{y}{x}$ )

2.7.05 DGL Typ 4: Substitution 2, Aufgabe 4 ( $x^3 y' = -y^3 + x^2 \cdot y$ )

2.7.06 DGL Typ 4: Substitution 2, Aufgabe 5 ( $x^3 y' = \sin\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{y}{x}$ )

2.7.07 DGL Typ 4: Substitution 2, Aufgabe 6 ( $y' = \frac{y}{x} \cdot \left(1 - \ln\left(\frac{y}{x}\right)\right)$ )

## 2.8 Wachstumsfunktionen

2.8.01 Lineares Wachstum

2.8.02 Exponentielles Wachstum

2.8.03 Beschränktes Wachstum

2.8.04 Logistisches Wachstum

2.8.05 Superexponentielles Wachstum

2.8.06 Explosives Wachstum

2.8.07 Stufenförmiges Wachstum

## 2.9 Reihenentwicklungen

2.9.01 Lösung DGL durch Reihenentwicklung – Einführung ( $y' = x - 2xy$ )

2.9.02 Lösung DGL durch Reihenentwicklung – Aufgabe ( $y' = y \cdot \sin(x)$ )

**2.10 Differentialgleichungen 2. Ordnung**2.10.01 DGL Typ  $y''=c$  ( $y''=0$ )2.10.02 DGL Typ  $y''=f(y')$  ( $y''=y'$ )2.10.03 DGL Typ  $y''=f(x,y')$  ( $(x^2+1) \cdot y''-2xy'=0$ )2.10.04 DGL Typ  $y''=f(y,y')$  ( $2yy''=(y')^2$ )2.10.05 DGL Typ  $y''+ay'+by=0$ : Einführung und Beispiele

87

2.10.06 DGL Typ  $y''+ay'+by=0$ : Aufgaben( $y''-6y'+5y=0$ ;  $y''-4y'+4y=0$ ;  $y''-2y'+10y=0$ ;  $y''+y=0$ ; $y''+y'+y=0$ ,  $y''+5y'+6y=0$ )2.10.07 DGL Typ  $y''+ay'+by=q(x)$ : Einführung2.10.08 DGL Typ  $y''+ay'+by=q(x)$ : Beispiel 1 ( $y''-y'-2y=4 \cdot e^{3x}$ )2.10.09 DGL Typ  $y''+ay'+by=q(x)$ : Beispiel 2 ( $y''-2y'+y=5 \cdot \sin(2x)$ )2.10.10 DGL Typ  $y''+ay'+by=q(x)$ : Beispiel 3 ( $\frac{145}{16}y + \frac{1}{2}y' + y'' = e^x$ )2.10.11 DGL Typ  $y''+ay'+by=q(x)$ : Beispiel 4 ( $y''+y=e^{-x}$ )2.10.12 DGL Typ  $y''+by=0$ : Beispiel 1 - Ungedämpfte mech. Schwingung2.10.13 DGL Typ  $y''+by=0$ : Beispiel 2 - Ungedämpfte el. Schwingung2.10.14 DGL Typ  $y''+ay'+by=0$ : Einführung gedämpfte mech. Schwingung2.10.15 DGL Typ  $y''+ay'+by=0$ : Mech. Bsp. 1, schwache D., Schwingfall2.10.16 DGL Typ  $y''+ay'+by=0$ : Mech. Bsp. 2, starke D., aperiod. Grenzfall2.10.17 DGL Typ  $y''+ay'+by=0$ : Mech. Bsp. 3, starke Dämpfung, Kriechfall2.10.18 DGL Typ  $y''+ay'+by=0$ : Einführung gedämpfte el. Schwingung2.10.19 DGL Typ  $y''+ay'+by=0$ : El. Bsp. 1, schwache Dämpfung, Schwingfall2.10.20 DGL Typ  $y''+ay'+by=0$ : El. Bsp. 2, starke D., aperiod. Grenzfall2.10.21 DGL Typ  $y''+ay'+by=0$ : El. Bsp. 3, starke Dämpfung, Kriechfall2.10.22 DGL Typ  $y''+ay'+by=q(x)$ : Mech. Bsp. 1, erzwungene Schwingung**2.11 Bernoulli**2.11.01 Bernoulli – Einführung ( $y'+xy+xy^2=0$ )**2.12 Euler**

2.12.01 Euler-Verfahren 1. Ordnung

2.12.02 Euler-Verfahren 2. Ordnung

**2.13 Runge-Kutta-Verfahren**2.13.01 Runge-Kutta-Verfahren, Einführung ( $y'=\sin(x) \cdot \cos(x)$ )2.13.02 Runge-Kutta-Verfahren 1. Ordnung, Aufg. ( $y'-\sin(x) \cdot x = e^{-\cos(x)}$ )2.13.03 Runge-Kutta-Verfahren 2. Ordnung, Aufgabe ( $y''=2-y$ )

2.13.04 Runge-Kutta-Verfahren, Räuber-Beute-Modell

**3. Stochastik****3.1 Kombinatorik**

3.1.01 Das Pascalsche Dreieck

3.1.02 Das Zählprinzip und Pfadregeln im Baumdiagramm

	Seite
3.1.03 Stichproben	
3.1.04 Würfelexperiment	92
<b>3.2 Baumdiagramme</b>	
3.2.01 Ein 2-2-Baumdiagramm mit 2 Entscheidungen	
3.2.02 Ein 2-3-Baumdiagramm mit 2 Entscheidungen	
3.2.03 Ein 2-4-Baumdiagramm mit 2 Entscheidungen	
3.2.04 Ein 3-2-Baumdiagramm mit 2 Entscheidungen	
3.2.05 Ein 3-3-Baumdiagramm mit 2 Entscheidungen	
3.2.06 Ein 3-4-Baumdiagramm mit 2 Entscheidungen	
3.2.07 Ein 4-2-Baumdiagramm mit 2 Entscheidungen	
3.2.08 Ein 4-3-Baumdiagramm mit 2 Entscheidungen	
3.2.09 Ein 4-4-Baumdiagramm mit 2 Entscheidungen	
3.2.10 Ein 2-2-2-Baumdiagramm mit 3 Entscheidungen	
3.2.11 Ein 2-2-3-Baumdiagramm mit 3 Entscheidungen	95
3.2.12 Ein 2-3-2-Baumdiagramm mit 3 Entscheidungen	
3.2.13 Ein 2-3-3-Baumdiagramm mit 3 Entscheidungen	
3.2.14 Ein 3-2-2-Baumdiagramm mit 3 Entscheidungen	
3.2.15 Ein 3-2-3-Baumdiagramm mit 3 Entscheidungen	
3.2.16 Ein 3-3-2-Baumdiagramm mit 3 Entscheidungen	
3.2.17 Ein 3-3-3-Baumdiagramm mit 3 Entscheidungen	
3.2.18 Baumdiagramm zum Urnenmodell, zwei Ziehungen, zwei Merkmale	
3.2.19 Baumdiagramm zum Urnenmodell, zwei Ziehungen, drei Merkmale	
3.2.20 Baumdiagramm zum Urnenmodell, zwei Ziehungen, vier Merkmale	
3.2.21 Baumdiagramm zum Urnenmodell, zwei Ziehungen, fünf Merkmale	
3.2.22 Baumdiagramm zum Urnenmodell, drei Ziehungen, zwei Merkmale	
3.2.23 Baumdiagramm zum Urnenmodell, drei Ziehungen, drei Merkmale	
<b>3.3 Interessante Aufgaben</b>	
3.3.01 Bedingte Wahrscheinlichkeit: Einführung	
3.3.02 Bedingte Wahrscheinlichkeit: Aufgabe 1	
3.3.03 Bedingte Wahrscheinlichkeit: Aufgabe 2	
3.3.04 Zahlenlotto <i>6 aus 49</i>	96
<b>3.4 Verteilungen</b>	
3.4.01 Beliebige Wahrscheinlichkeitsverteilung und Verteilungsfunktion	101
3.4.02 Maßzahlen von Zufallsgrößen beliebiger Verteilungen	
3.4.03 Die hypergeometrische Verteilung	
3.4.04 Die Binomialverteilung	105
3.4.05 Vergleich hypergeometrische Verteilung und Binomialverteilung	
3.4.06 Simulation der Binomialverteilung mit dem Galtonbrett	107
3.4.07 Binomialverteilte Zufallsgrößen und kumulative Verteilungsfunktion	
3.4.08 Maßzahlen von binomialverteilten Zufallsgrößen	
3.4.09 Abhängigkeit der Binomialverteilung von $n$ und $p$	
3.4.10 Binomialverteilte Zufallsgrößen und Streuung um den Erwartungswert	
3.4.11 Normalverteilung – Einführung	109
3.4.12 Normalverteilung – Koordinatentransformation	
3.4.13 Normalverteilung – standardisiert	
3.4.14 Normalverteilung – Aufgaben für stetige Zufallsgrößen	116

- 3.4.15 Normalverteilung - Aufgaben für diskrete Zufallsgrößen
- 3.4.16 Normalverteilung - Aufgaben Anwendungen diskrete Zufallsgrößen
- 3.4.17 Poissonverteilung

### **3.5 Hypothesentest**

- 3.5.01 Alternativtest
- 3.5.02 Allgemeiner Signifikanztest
- 3.5.03 Zweiseitiger Signifikanztest: Theorie
- 3.5.04 Linksseitiger Signifikanztest: Theorie
- 3.5.05 Rechtsseitiger Signifikanztest: Theorie
- 3.5.06 Zweiseitiger Signifikanztest: automatisiert
- 3.5.07 Linksseitiger Signifikanztest: automatisiert
- 3.5.08 Rechtsseitiger Signifikanztest: automatisiert
- 3.5.09 Alle Signifikanztests mit Schaltflächen automatisiert
- 3.5.10 Linksseitiger Signifikanztest mit Verwendung der Normalverteilung
- 3.5.11 Rechtsseitiger Signifikanztest mit Verwendung der Normalverteilung

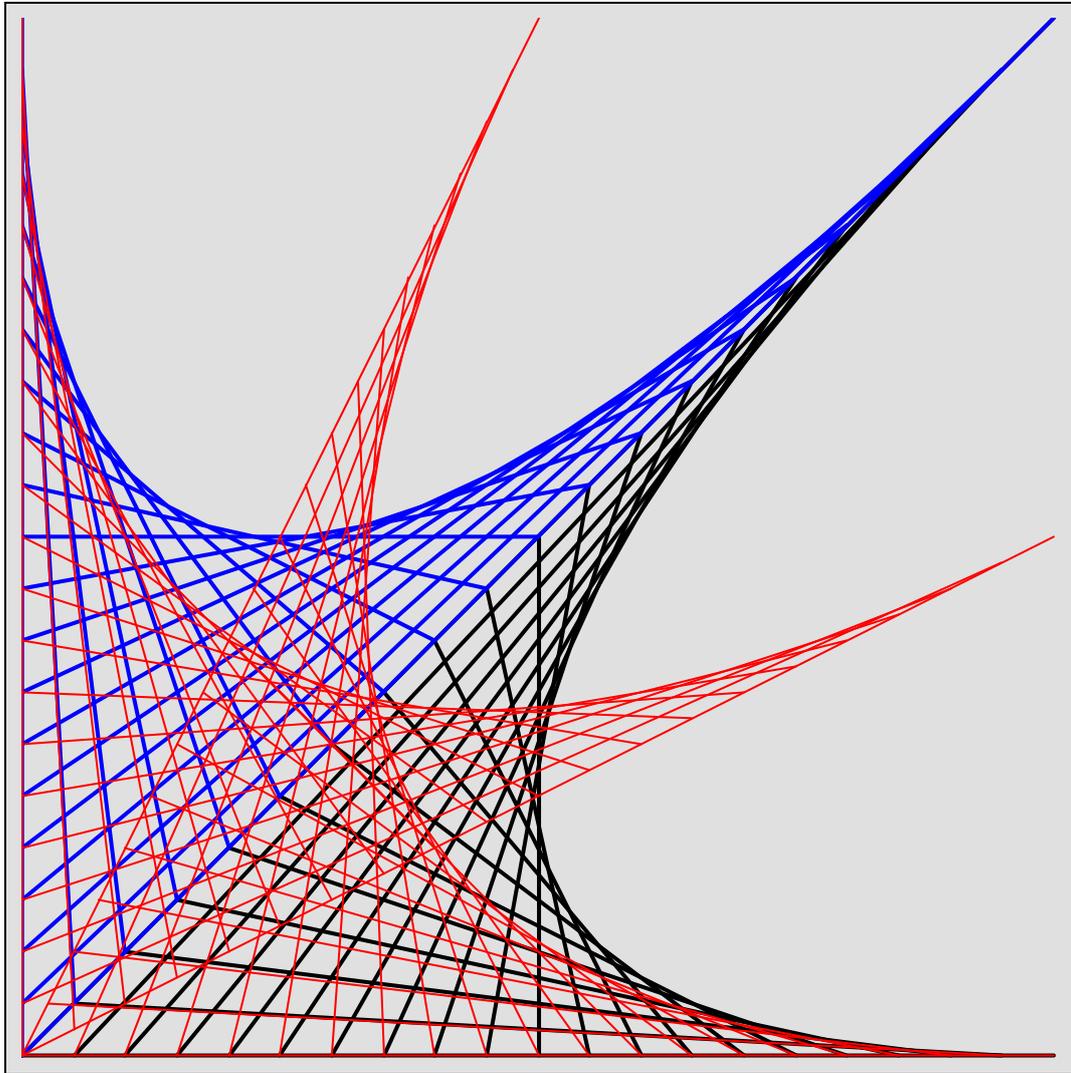
## **4. Leontief-Modell**

### **4.1 Grundaufgaben und Variationen**

- 4.1.01 Aufg. 1: Geg. Warenflussmatrix, Verbrauchsvekt., ges. Produktionsv.
- 4.1.02 Aufg. 2: Geg. Warenflussmatrix, ges. Verbrauchs- u. Produktionsvekt.
- 4.1.03 Aufg. 3: Geg. Inputmatrix u. Verbrauchsvekt., ges. Produktionsvekt.
- 4.1.04 Aufg. 4: Geg. Inputmatrix u. Produktionsvekt., ges. Verbrauchsvekt.
- 4.1.05 Aufg. 5: Geg. Inputmatrix, ges. Warenflussmatrix
- 4.1.06 Variation 1: Geg. Inputmatrix u.  $x(t)$ , ges. Verbrauchsvekt.  $y(t)$
- 4.1.07 Variation 2: Geg. Inputmatrix u.  $y(t)$ , ges. Produktionsvekt.  $x(t)$

### **4.2 Weitere Aufgaben**

- 4.2.01 Übungsaufgabe 1
- 4.2.02 Übungsaufgabe 2
- 4.2.03 Übungsaufgabe 3
- 4.2.04 Übungsaufgabe 4
- 4.2.05 Übungsaufgabe 5
- 4.2.06 Übungsaufgabe 6



## Kurvendiskussion - Die Arcuskosinusfunktion -

**Aufgabe** (aus der Abiturprüfung Berufliche Oberschule, 13 Technik, 1993/AI)  
Gegeben ist die reelle Funktion  $f$  mit der in  $\mathbf{IR}$  maximalen Definitionsmenge  $\mathbf{D}_f$  und

$$\text{dem Funktionsterm } f(x) := \arccos\left(\sqrt{\frac{2 \cdot x - 1}{x^2}}\right).$$

a) Bestimmen Sie die Definitionsmenge  $\mathbf{D}_f$  und die Nullstellen von  $f$  sowie das Verhalten von  $f(x)$  für  $x \rightarrow \infty$ .

b) Berechnen Sie  $f'(x)$  und bestimmen Sie  $\lim_{x \rightarrow 0.5^+} f'(x)$  und  $\lim_{x \rightarrow 1} f'(x)$ .

$$[\text{Teilergebnis: } f'(x) = \frac{x-1}{|x-1| \cdot x \cdot \sqrt{2 \cdot x - 1}}]$$

c) Ermitteln Sie das Monotonieverhalten und die Extrempunkte des Graphen von  $f$ . Untersuchen Sie, ob der Graph von  $f$  Wendepunkte besitzt.

d) Zeichnen Sie den Graphen von  $f$  unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse sowie des Funktionswerts  $f(3)$  im Bereich  $x \leq 6$  in ein kartesisches Koordinatensystem.

### Teilaufgabe a)

1. Bedingung:  $\frac{2 \cdot x - 1}{x^2} \geq 0$  auflösen,  $x \rightarrow \frac{1}{2} \leq x$

2. Bedingung:  $-1 \leq \sqrt{\frac{2 \cdot x - 1}{x^2}} \leq 1$  auflösen,  $x \rightarrow \frac{1}{2} \leq x$

$$\Rightarrow \mathbf{D}_f = \left[ \frac{1}{2}; \infty[ \right.$$

Nullstellenbedingung:

$$f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \arccos\left(\sqrt{\frac{2 \cdot x - 1}{x^2}}\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{\frac{2 \cdot x - 1}{x^2}} = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{2 \cdot x - 1}{x^2} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad 2 \cdot x - 1 = x^2 \text{ auflösen, } x \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Nullstelle:  $\mathbf{N(1/0)}$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \arccos\left(\sqrt{\frac{2 \cdot x - 1}{x^2}}\right) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \text{horizontale Asymptote } y = \frac{\pi}{2}$$

$$\downarrow$$

$$0$$

Teilaufgabe b)

$$f'(x) := \frac{d}{dx} f(x) \left| \begin{array}{l} \text{annehmen, } x \geq \frac{1}{2} \\ \text{vereinfachen} \end{array} \right. \rightarrow \frac{x-1}{x \cdot \sqrt{2 \cdot x - 1} \cdot \sqrt{(x-1)^2}}$$

Vereinfachen:

$$f'(x) := \frac{x-1}{x \cdot |x-1| \cdot \sqrt{2 \cdot x - 1}}$$

Fallunterscheidung für  $|x-1|$ :

$$f'(x) \text{ annehmen, } x < 1 = -\frac{1}{x \cdot \sqrt{2 \cdot x - 1}}$$

$$f'(x) \text{ annehmen, } x > 1 = \frac{1}{x \cdot \sqrt{2 \cdot x - 1}}$$

$$f'(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x \cdot \sqrt{2 \cdot x - 1}} & \text{if } \frac{1}{2} < x < 1 \\ \frac{1}{x \cdot \sqrt{2 \cdot x - 1}} & \text{if } x > 1 \end{cases}$$

Grenzverhalten:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} \left( -\frac{1}{x \cdot \sqrt{2 \cdot x - 1}} \right) \rightarrow -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \left( \frac{1}{x \cdot \sqrt{2 \cdot x - 1}} \right) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \left( -\frac{1}{x \cdot \sqrt{2 \cdot x - 1}} \right) = -1$$

### Teilaufgabe c)

Vorzeichentabelle für f

	$x \neq 0.5$	$x = 1$	
Zähler	nicht def.	neg	pos
Nenner	nicht def.	pos	pos
Abl. f'(x)	nicht def.	neg	pos
$G_f$	nicht def.	smf	sms

TP

Funktionswert Tiefpunkt:  $f(1) = 0$

Darstellung mit Mathcad:

$f'(x) \geq 0$  auflösen,  $x \rightarrow 1 \leq x$

$f'(x) \leq 0$  auflösen,  $x \rightarrow \frac{1}{2} < x \leq 1$

$G_f$  ist streng monoton fallend in  $x \in ] 0.5 ; 1 ]$ .

$\Rightarrow$  lok. Tiefpunkt **TP(1/0)**

$G_f$  ist streng monoton steigend in  $x \in [ 1 ; \infty ]$ .

Der Graph  $G_f$  besitzt ein Randmaximum: **RM** $\left(\frac{1}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

Bestimmung der 2. Ableitung:

$$f''_1(x) := \frac{d}{dx} f'(x) \left| \begin{array}{l} \text{annehmen, } x < 1 \\ \text{Faktor} \end{array} \right. \rightarrow \frac{3 \cdot x - 1}{x^2 \cdot (2 \cdot x - 1)^2}$$

$$f''_2(x) := \frac{d}{dx} f'(x) \left| \begin{array}{l} \text{annehmen, } x > 1 \\ \text{Faktor} \end{array} \right. \rightarrow -\frac{3 \cdot x - 1}{x^2 \cdot (2 \cdot x - 1)^2}$$

$$f''(x) := \begin{cases} \frac{3 \cdot x - 1}{x^2 \cdot (2 \cdot x - 1)^{\frac{3}{2}}} & \text{if } \frac{1}{2} < x < 1 \\ \frac{3 \cdot x - 1}{x^2 \cdot (2 \cdot x - 1)^{\frac{3}{2}}} & \text{if } x > 1 \end{cases}$$

Existenz eines Wendepunktes:

Nullstelle der 2. Ableitung:  $3 \cdot x - 1 = 0$  auflösen,  $x \rightarrow \frac{1}{3} \notin D_f$

Vorzeichen der 2. Ableitung an der Intervallgrenze:

Linksseitiger Grenzwert:

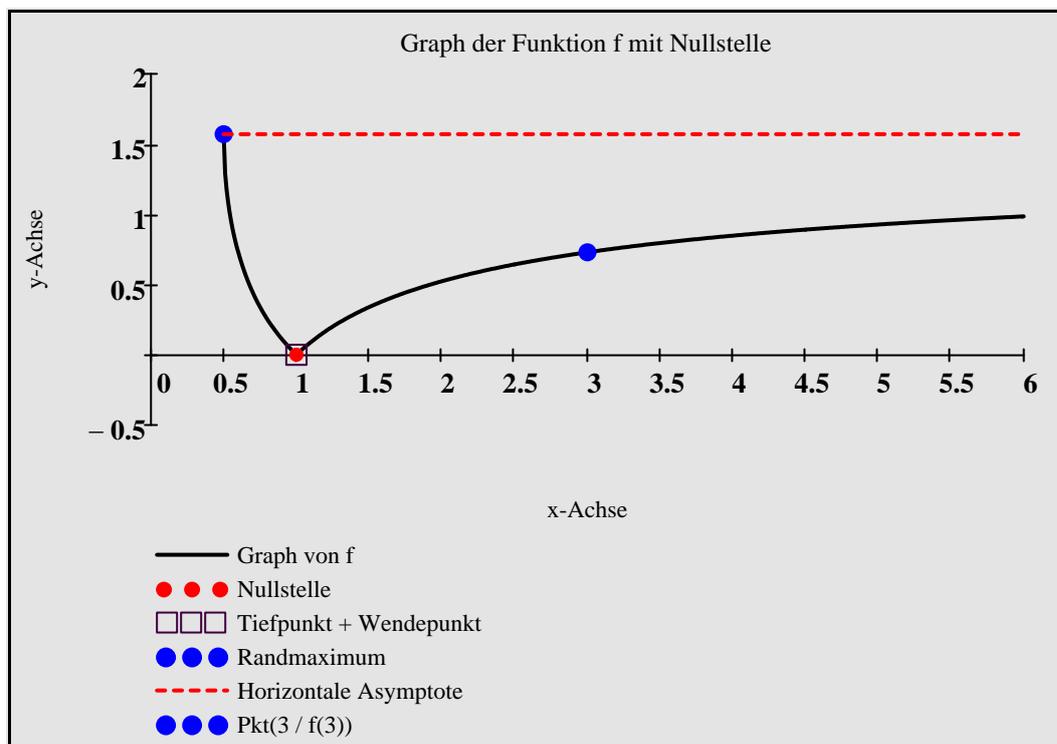
$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{3 \cdot x - 1}{x^2 \cdot (2 \cdot x - 1)^{\frac{3}{2}}} \rightarrow 2$$

Rechtsseitiger Grenzwert:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \left[ \frac{3 \cdot x - 1}{x^2 \cdot (2 \cdot x - 1)^{\frac{3}{2}}} \right] \rightarrow -2$$

$\Rightarrow$  Wendepunkt: **WP (1 / 0)** Dieser Wendepunkt ist zugleich Nullstelle und Tiefpunkt.

### Teilaufgabe d)



## Hüllkurven - Erzeugung von Hüllkurven einer Geradenschar -

### Theorie

Gegeben sind die Punkte  $A(10 - n / 0)$  und  $B(0 / n + 1)$  einer Geradenschar in Abhängigkeit vom Parameter  $n \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$ .

Man kann sich nun vorstellen, dass auf Koordinatenachsen aus Holz in den Punkten A bzw. B kleine Nägel befestigt sind und ein Faden in der Reihenfolge der Punkte  $(10/0) \rightarrow (0/1) \rightarrow (9/0) \rightarrow (0/2) \rightarrow (8/0) \rightarrow (0/3)$  usw. um die Nägel geführt wird, wodurch ein **Fadenbild** entsteht.

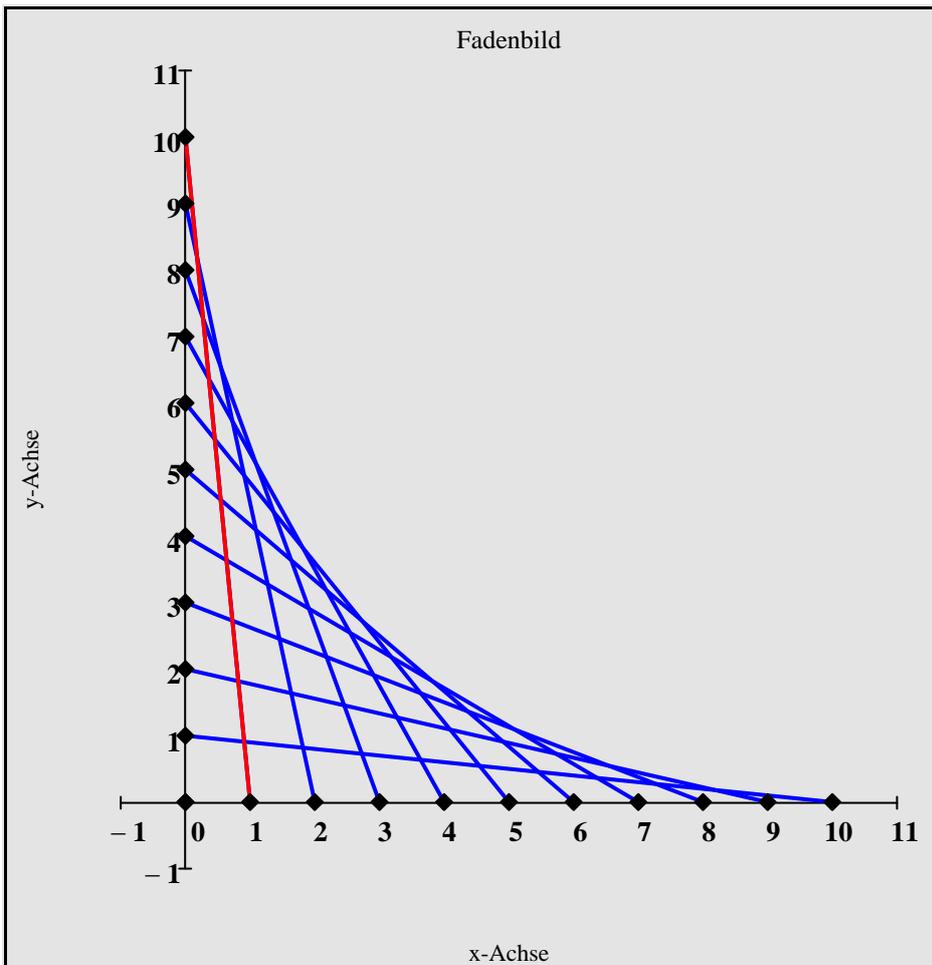
Aus der Zuordnung einer Vielzahl gespannter Fäden mit Fadenverdichtungen sowie Fadenüberkreuzungen ergeben sich kurvige Formbegrenzungen.

Mathematisch entsteht dadurch eine **Kurvenschar aus Geraden**, die eine **Hüllkurve** besitzen.

Wählen Sie die Punkte:



Darstellung



Konkreter  
Parameter:

$$n1 = 9$$

Punkte:

$$A \rightarrow (1 \ 0)$$

$$B \rightarrow (0 \ 10)$$

### Aufgabe 1

Gegeben sind die Punktemengen  $A1(x_0 / y_0)$  und  $B1(x_1 / y_1)$  einer Geradenschar.

- Betrachten Sie die graphische Darstellung und bestimmen Sie den Funktionsterm der Geradenschar in Abhängigkeit von  $n$ .
- Bestimmen Sie den Funktionsterm der Hüllkurve der Geradenschar.
- Tragen Sie die Hüllkurve in die graphische Darstellung ein.

#### Teilaufgabe a)

$x_0$	$y_0$
1	0
2	0
3	0
4	0
5	0
6	0
7	0
8	0
9	0
10	...

$x_1$	$y_1$
0	30
0	29
0	28
0	27
0	26
0	25
0	24
0	23
0	22
0	...

Bestimmung des Funktionsterms der Geradenschar:

Allgemeine Punkt-Steigungs-Form:  $y = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \cdot (x - x_0)$

Konkrete Geraden:  $y_0 = 0 + \frac{30 - 0}{0 - 1} \cdot (x - 1) \rightarrow y_0 = 30 - 30 \cdot x$

$$y_1 = 0 + \frac{29 - 0}{0 - 2} \cdot (x - 2) \rightarrow y_1 = 29 - \frac{29 \cdot x}{2}$$

$$y_2 = 0 + \frac{28 - 0}{0 - 3} \cdot (x - 3) \rightarrow y_2 = 28 - \frac{28 \cdot x}{3}$$

Allgemein:  $y = (30 - n) - \frac{(30 - n)}{n + 1} \cdot x$

Scharkurve:  $f1(n, x) := -\frac{30 - n}{n + 1} \cdot x + (30 - n)$

### Teilaufgabe b)

Bestimmung der Hüllkurve der Geradenschar:

Ableitung nach dem Parameter :

$$f_1'(n, x) := \frac{d}{dn} f_1(n, x) = \frac{31 \cdot x}{(n + 1)^2} - 1$$

Bestimmung des Extremums des Parameters:

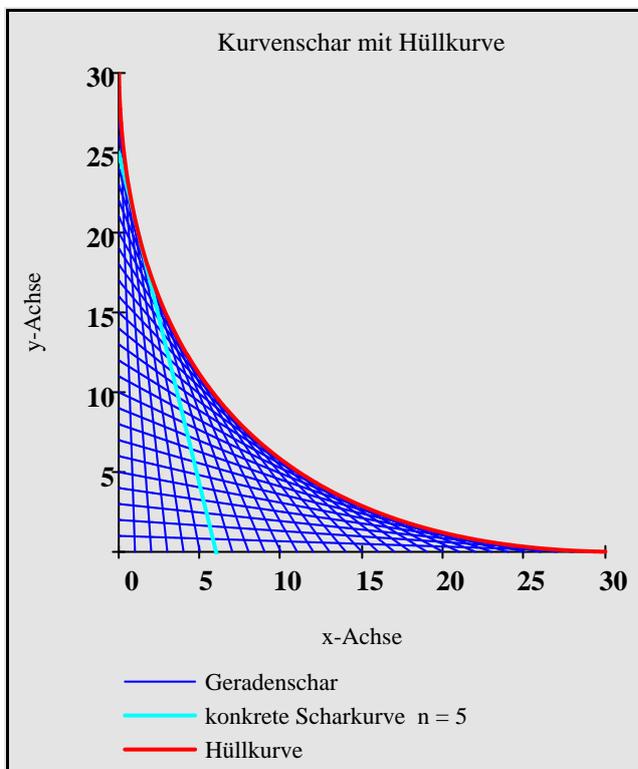
$$f_1'(n, x) = 0 \text{ auflösen, } n \rightarrow \begin{cases} \sqrt{31} \cdot \sqrt{x} - 1 & \text{Lösung} \\ -\sqrt{31} \cdot \sqrt{x} - 1 & \text{keine Lösung} \end{cases}$$

Einsetzen in den Funktionsterm und Lösung des Gleichungssystems:

$$f_1(\sqrt{31} \cdot \sqrt{x} - 1, x) = x - 2 \cdot \sqrt{31} \cdot \sqrt{x} + 31$$

Hüllkurve 1:  $h_1(x) := -\sqrt{124 \cdot x + x + 31}$

### Teilaufgabe c)



## Aufgabe 2

Gegeben sind die Punktemengen  $A_i(x_0 / y_0)$  und  $B_i(x_1 / y_1)$  für Geradenscharen zu den jeweils über das Eck der Quadratseiten gehenden Geraden.

Des Weiteren sind die zugehörigen Funktionsterme  $f_i$  und die Hüllkurven  $h_i$  gegeben.

- Betrachten Sie die Graphen der Scharkurven und Hüllkurven im Diagramm unten.
- Berechnen Sie die Fläche der *Linse*, von zwei unterschiedlich gekrümmten Hüllkurven begrenzt wird.
- Berechnen Sie die innere Fläche, die von den vier Hüllkurven begrenzt wird.

$$f_2(n, x) := 30 + \frac{30 - n}{n + 1} \cdot (x - n - 1)$$

$$h_2(x) := \sqrt{124 \cdot x} - x - 1$$

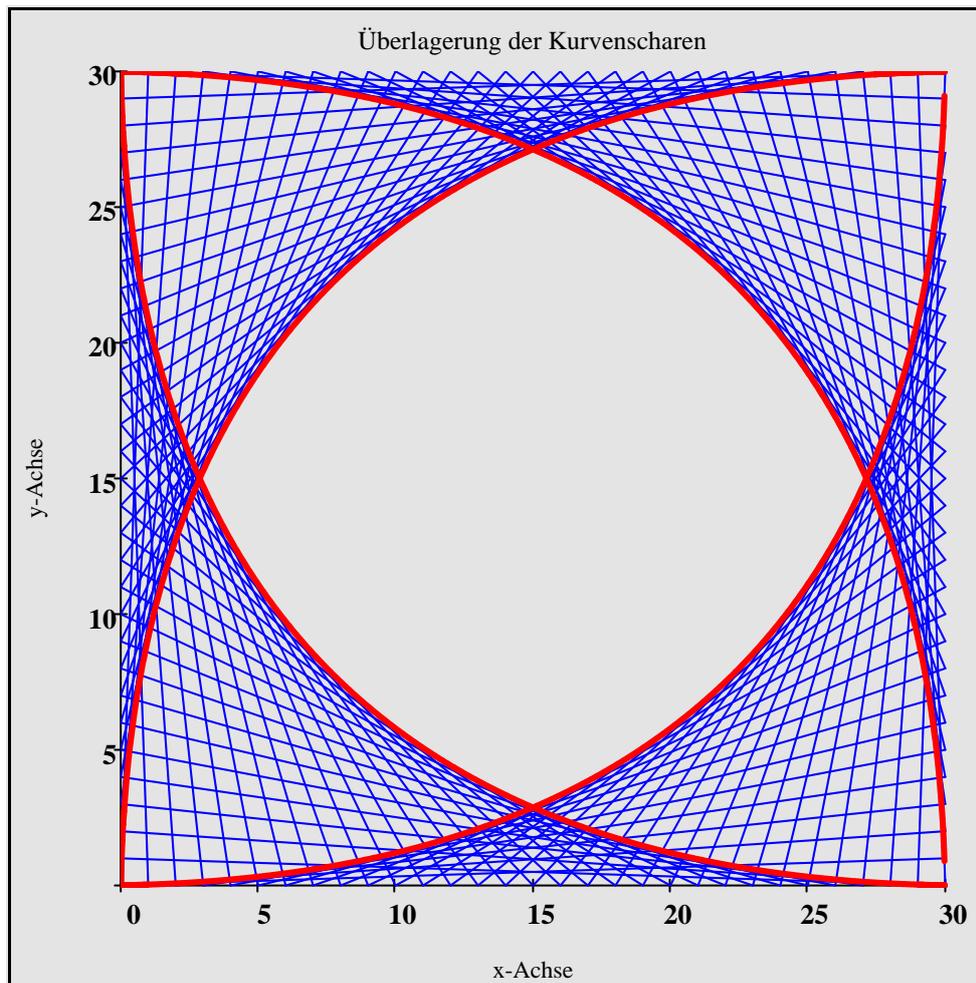
$$f_3(n, x) := 30 + \frac{-n - 1}{30 - n} \cdot (x - n)$$

$$h_3(x) := x + \frac{60 \cdot \sqrt{31}}{\sqrt{30 - x}} - \frac{2 \cdot \sqrt{31} \cdot x}{\sqrt{30 - x}} - 31$$

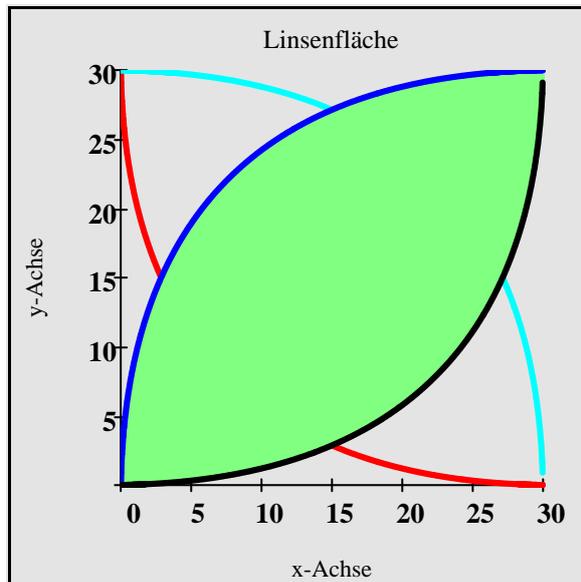
$$f_4(n, x) := \frac{n + 1}{30 - n} \cdot (x - n)$$

$$h_4(x) := \frac{2 \cdot \sqrt{31} \cdot x}{\sqrt{30 - x}} - \frac{60 \cdot \sqrt{31}}{\sqrt{30 - x}} - x + 61$$

### Teilaufgabe a)



### Teilaufgabe b)



Hüllkurven:

$$h_2(x) = 2 \cdot \sqrt{31} \cdot \sqrt{x} - x - 1$$

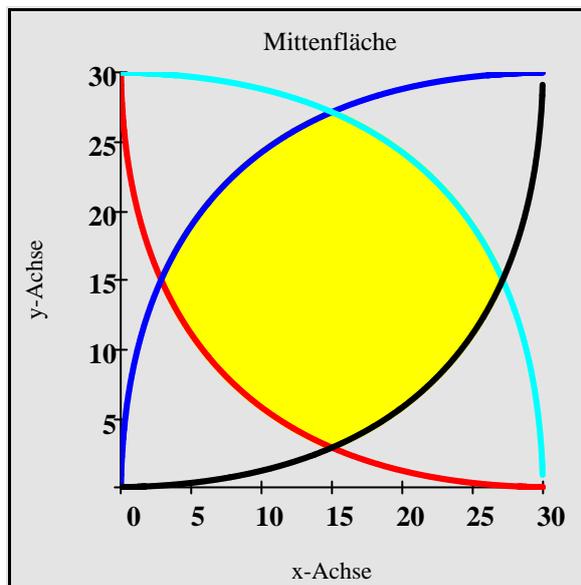
$$h_4(x) = \frac{2 \cdot \sqrt{31} \cdot x}{\sqrt{30-x}} - \frac{60 \cdot \sqrt{31}}{\sqrt{30-x}} - x + 61$$

Flächenberechnung:

$$A := \int_0^{30} (h_2(x) - h_4(x)) dx$$

$$A = 579.672$$

### Teilaufgabe c)



Hüllkurven:

$$h_1(x) = x - 2 \cdot \sqrt{31} \cdot \sqrt{x} + 31$$

$$h_2(x) = 2 \cdot \sqrt{31} \cdot \sqrt{x} - x - 1$$

Bestimmung Schnittpunkt (siehe unten)

$$x_S := 46 - 2 \cdot \sqrt{465} \quad x_S = 2.9$$

Teilfläche:

$$A_1 := \int_{x_S}^{15} (h_2(x) - 15) dx$$

$$A_1 = 92.721$$

Gesamtfläche:  $A_{\text{ges}} := 4 \cdot A_1$

$$A_{\text{ges}} = 370.884$$

Schnittpunkt zweier Hüllkurven:

$$x_S := h_1(x) = h_2(x) \quad \left| \begin{array}{l} \text{auflösen, } x \\ \text{annehmen, } x < 3 \end{array} \right. \rightarrow 46 - 2 \cdot \sqrt{465} = 2.872$$

## Integralrechnung - Berechnung des Gauß'schen Integrals -

### Aufgabe

Gegeben ist die Funktion  $f(x) := e^{-x^2}$  mit  $x \in \mathbb{R}$ .

Für das Integral  $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$  liefert Mathcad das exakte Ergebnis  $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \rightarrow \sqrt{\pi}$

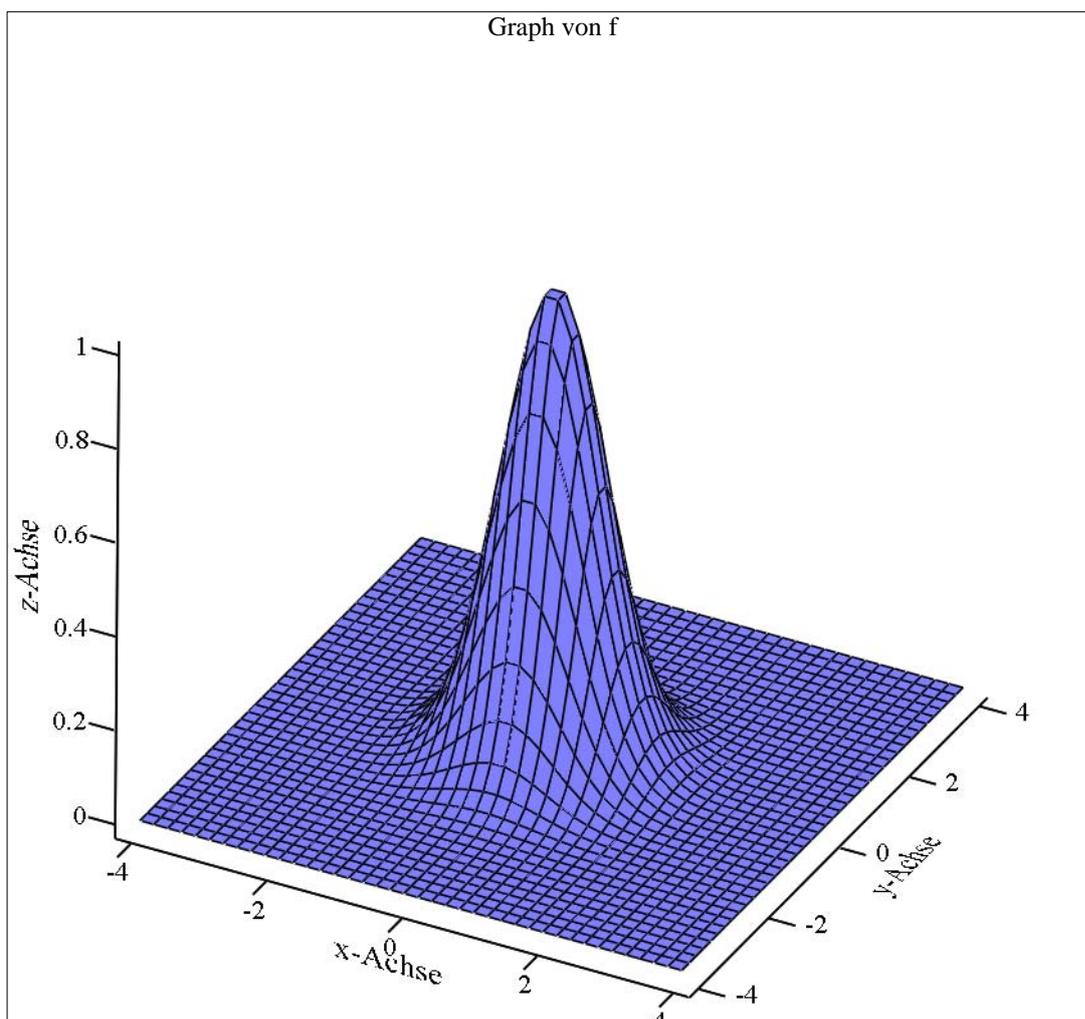
Wie lässt sich dieses Resultat nachvollziehen?

Betrachten wir den Term  $f(x, y) := e^{-(x^2+y^2)}$ .

Dieser kann aufgefasst werden als ein Funktionsterm einer Funktion mit zwei Variablen.

Zu jedem Wertepaar  $(x_0/y_0)$  gibt es genau einen Funktionswert  $f(x_0, y_0)$ .

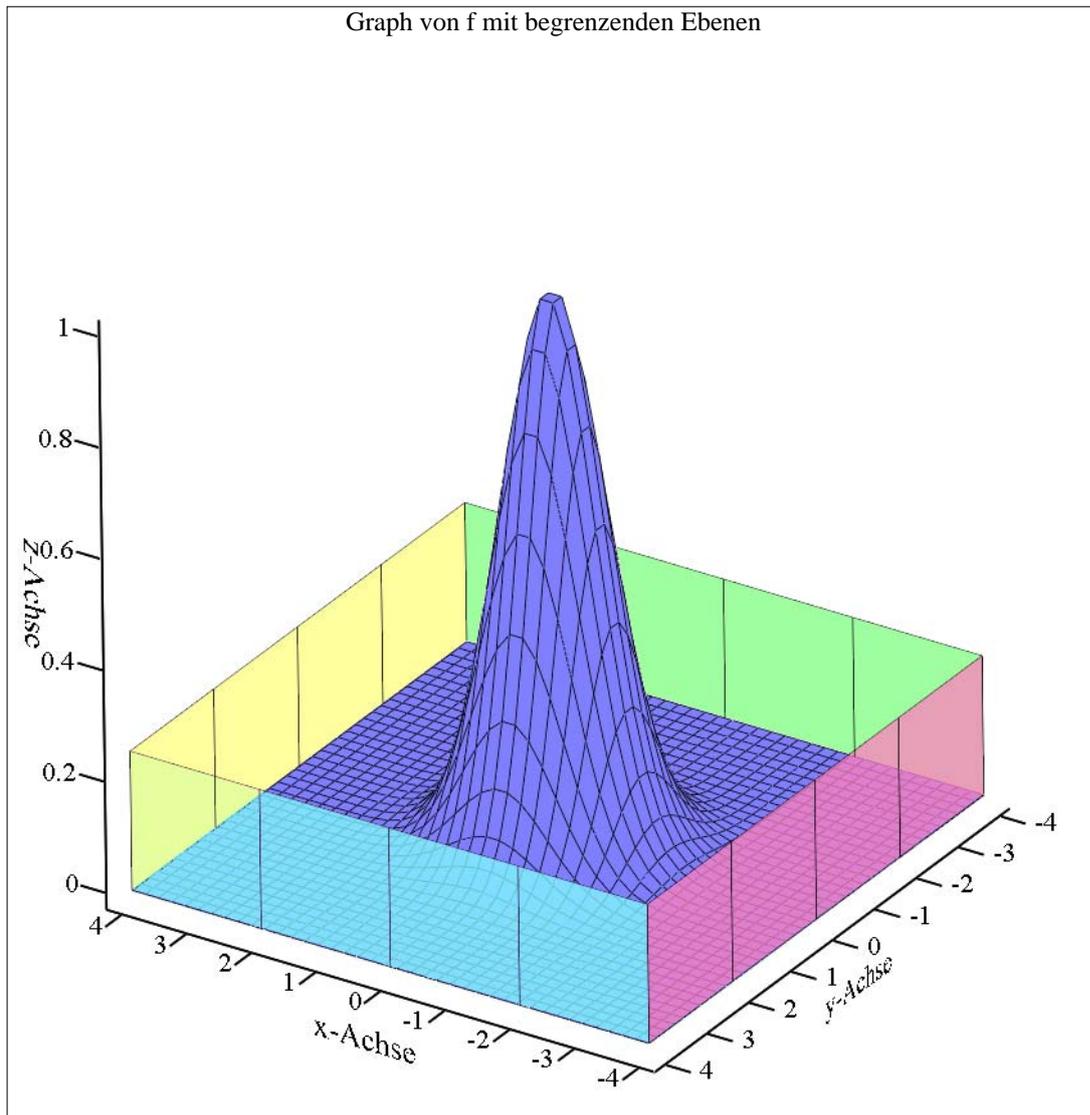
Daraus ergibt sich als Graph der Funktion  $f$  eine Fläche  $G_f$  im dreidimensionalen Raum.



Das Integral  $\int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} e^{-(x^2+y^2)} dx dy$  entspricht anschaulich dem Volumen,

das begrenzt ist durch die Fläche  $G_f$ , die x-y-Ebene und die vier Ebenen

$x = x_1, x = x_2, y = y_1$  und  $y = y_2$

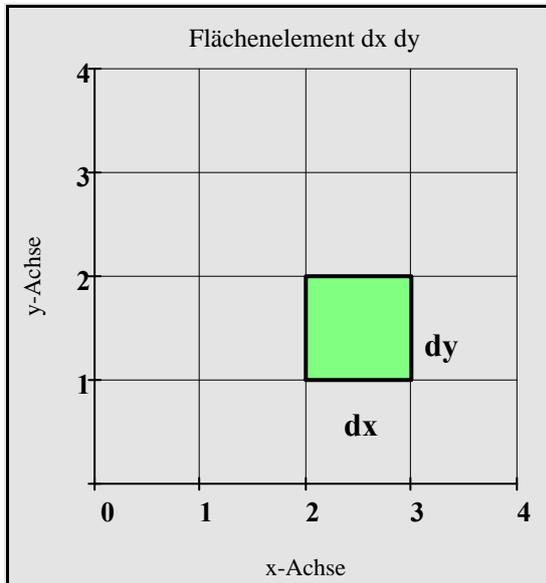


Die Ebenen werden nun beliebig weit nach außen verlagert.

Dies bedeutet, dass wir die Integrationsgrenzen gegen  $-\infty$  und  $\infty$  gehen lassen.

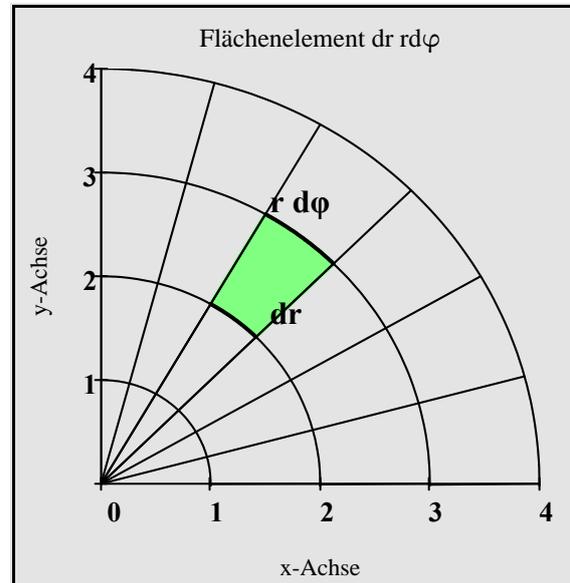
$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx dy$$

Der Differentialterm  $dx \cdot dy$  stellt in der  $x$ - $y$ -Ebene ein kleines rechteckiges Flächenstück dar. Integriert wird über die vollständige  $x$ - $y$ -Ebene.



Alternativ können auch Polarkoordinaten  $(r, \varphi)$  verwendet werden.

Die kleinen Flächenstücke werden hier zu Kreisringsektoren der Fläche  $dr \cdot r d\varphi$ .



$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \int_0^{\infty} \int_0^{2\cdot\pi} e^{-r^2} \cdot r d\varphi dr$$

Um über die vollständige  $x$ - $y$ -Ebene zu integrieren, läuft  $r$  von  $0$  bis  $\infty$  und  $\varphi$  von  $0$  bis  $2\cdot\pi$ . Die Regeln der Differentialrechnung für Funktionen mit mehreren Variablen, auf die wir hier nicht näher eingehen, erlauben folgende Auswertung des Integrals.

$$\int_0^{\infty} \int_0^{2\cdot\pi} e^{-r^2} \cdot r d\varphi dr = \int_0^{\infty} \left( \int_0^{2\cdot\pi} 1 d\varphi \right) \cdot r \cdot e^{-r^2} dr = \int_0^{\infty} 2\cdot\pi \cdot r \cdot e^{-r^2} dr$$

$$\text{Stammfunktion: } H(r) := \int r \cdot e^{-r^2} dr \Rightarrow H(r) = -\frac{e^{-r^2}}{2}$$

Also:

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b 2\cdot\pi \cdot r \cdot e^{-r^2} dr = \lim_{b \rightarrow \infty} [2\cdot\pi \cdot (H(b) - H(0))] = 2\cdot\pi \cdot \left( 0 + \frac{1}{2} \right) = \pi$$

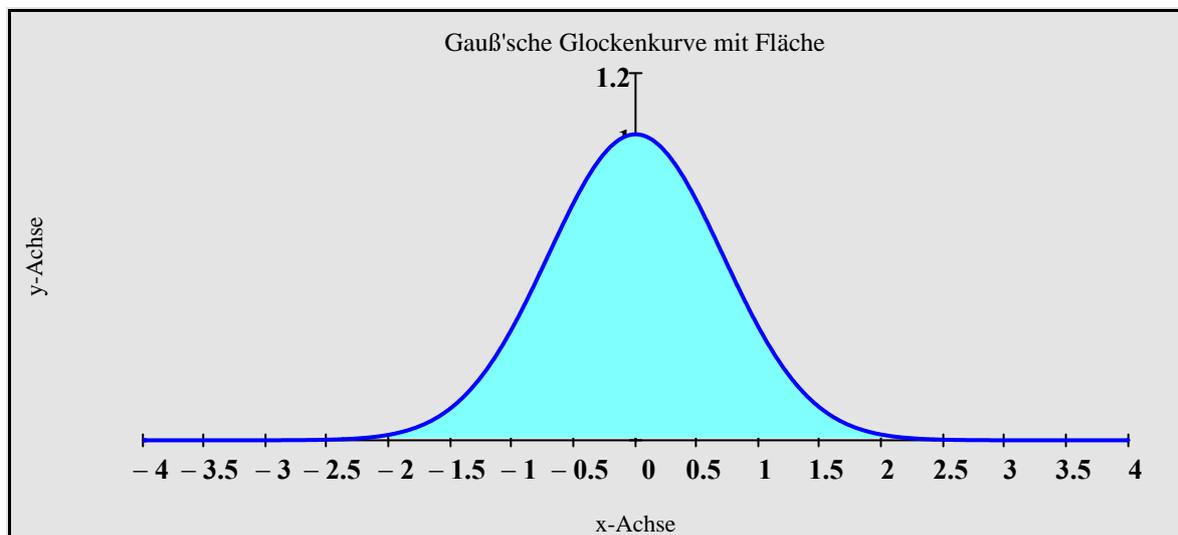
Umformungen:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \cdot e^{-y^2} dx dy = \dots$$
$$\dots = \left( \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \right) \cdot \left( \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy \right) = \left( \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \right)^2$$

Mit obigem Ergebnis folgt:

$$\left( \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \right)^2 = \pi \quad \Rightarrow \quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

Gauß'sche Glockenkurve  $G(x) := e^{-x^2}$



## Rotationskörper

### - Rotation um die y-Achse, Volumenberechnung über die Umkehrfunktion -

#### Theorie

Gegeben ist der Funktionsterm  $f$  einer Rotationskurve im Intervall  $[a;b]$ .

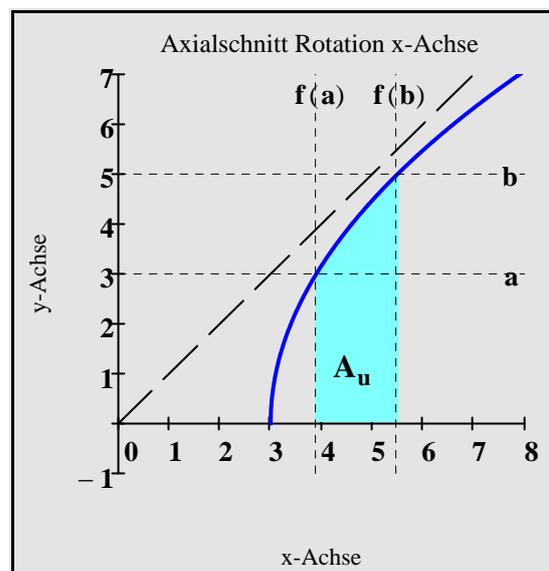
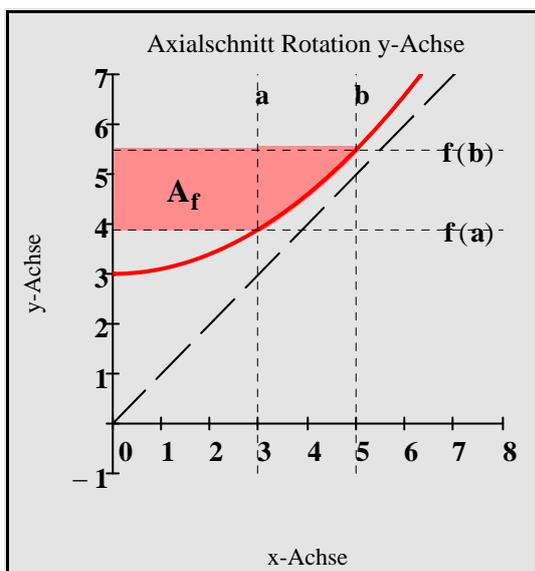
Der Graph der Funktion  $f$  rotiert um die y-Achse. Betrachtet wird die Fläche  $A_f$  zwischen dem Graphen von  $f$  und der y-Achse.

Spiegelt man den Funktionsgraphen und damit die betrachtete Fläche  $A_f$  an der Winkelhalbierenden des 1. und 3. Quadranten, erhält man eine Fläche  $A_u$  mit identischer Flächenmaßzahl, die bei der Rotation um die x-Achse einen Rotationskörper mit identischer Volumenmaßzahl erzeugt.

$$\text{Für das Volumen gilt somit: } V = \pi \cdot \left| \int_{f(a)}^{f(b)} (u(x))^2 dx \right|$$

Bemerkung:

Der Betrag steht deshalb, weil bei streng monoton fallenden Funktionsgraphen die Integrationsgrenzen bei der Spiegelung an der Winkelhalbierenden vertauscht sind.



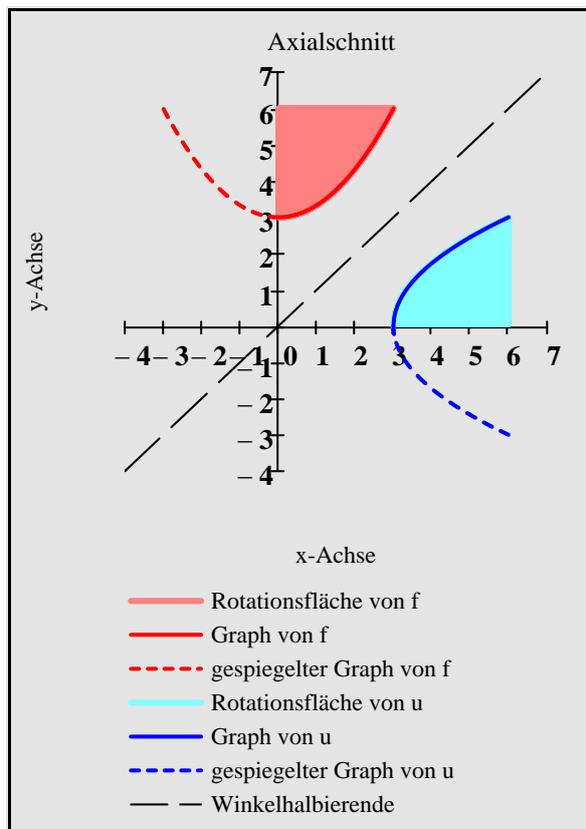
#### Beispiel

Gegeben ist der Funktionsterm  $f(x) := \frac{1}{3} \cdot x^2 + 3$  einer Rotationskurve im Intervall  $[0;3]$ .

Der Graph der Funktion  $f$  im Intervall  $[0;3]$  rotiert um die y-Achse. Betrachtet wird die Fläche zwischen dem Graphen von  $f$  und der y-Achse.

- Stellen Sie die Axialschnitte der Rotationsflächen graphisch dar.
- Berechnen Sie das Volumen des Rotationskörpers mithilfe der Umkehrfunktion  $u$ .
- Berechnen Sie das Volumen des Rotationskörpers mithilfe des Differentials  $dy$ .
- Betrachten Sie die 3D-Darstellung der Rotationskörper mit winkelhalbierender Ebene.

### Teilaufgabe a)



### Teilaufgabe b)

Gegeben:  $f(x) = \frac{x^2}{3} + 3$       $a := 0$       $b := 3$

Definitionsmenge:      $D = [0; 3]$

Grenzen der Wertemenge:  $c := f(a) = 3$       $d := f(b) = 6$

Wertemenge:      $W = [3; 6]$

Ermittlung der Umkehrfunktion:

Funktionsterm:  $y = \frac{x^2}{3} + 3$

Vertauschung der Variablen und auflösen nach y:

$$y = \frac{1}{3} \cdot x^2 + 3 \text{ ersetzen, } y = x, x^2 = y^2 \rightarrow x = \frac{y^2}{3} + 3 \text{ auflösen, } y \rightarrow \begin{pmatrix} \sqrt{3} \cdot \sqrt{x-3} \\ -\sqrt{3} \cdot \sqrt{x-3} \end{pmatrix}$$

Umkehrfunktion:  $u(x) := \sqrt{3 \cdot x - 9}$

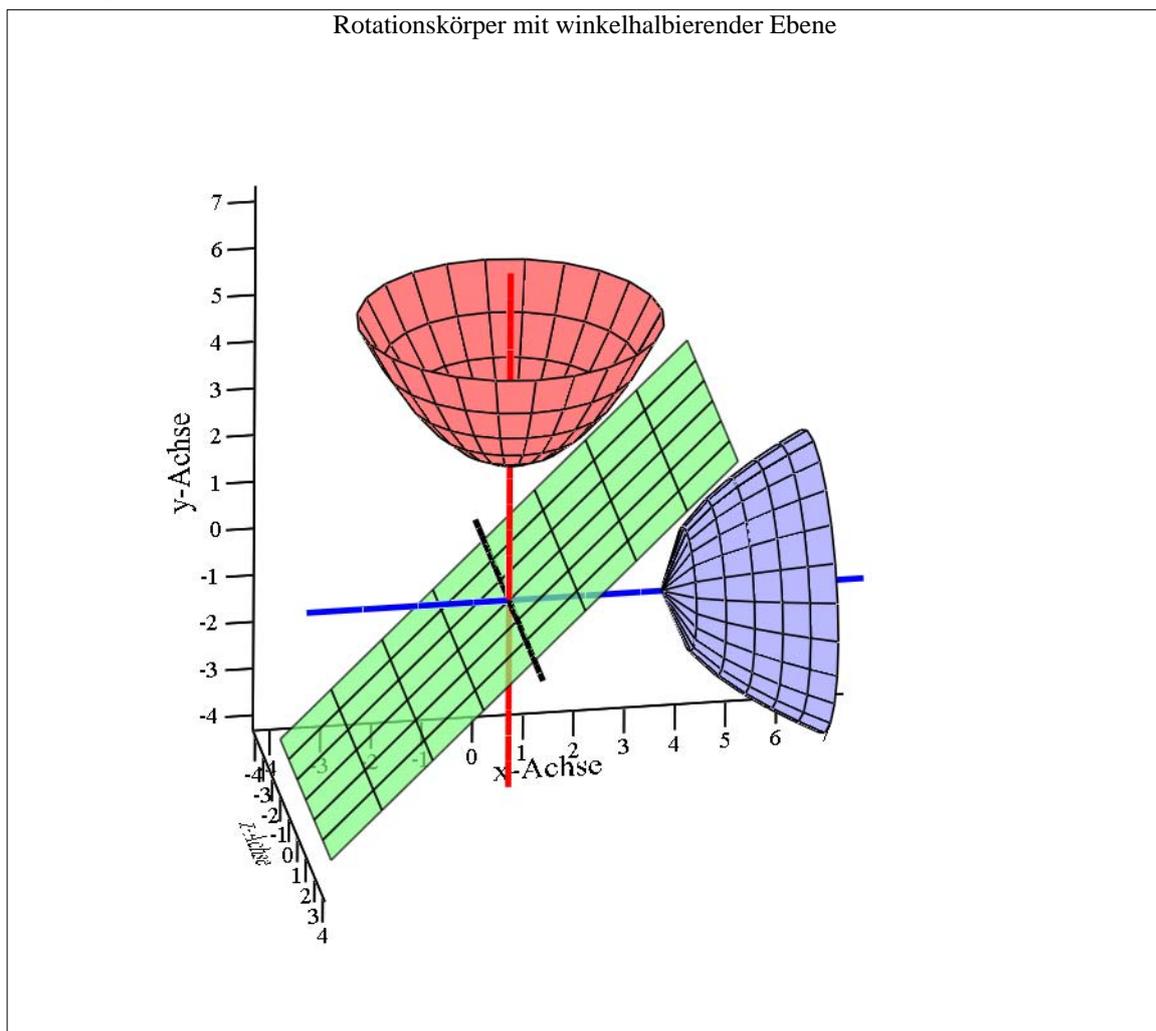
Rotationsvolumen:  $V_x := \pi \cdot \left| \int_c^d (u(x))^2 dx \right|$   $V_x = \frac{27 \cdot \pi}{2} = 42.41$

**Teilaufgabe c)**

$f'(x) := \frac{d}{dx} f(x)$        $f'(x) = \frac{2 \cdot x}{3}$

Rotationsvolumen:  $V_y := \pi \cdot \int_a^b x^2 \cdot f'(x) dx$   $V_y = \frac{27 \cdot \pi}{2} = 42.41$

**Teilaufgabe d)**



## Rotationsfläche um die x-Achse - Volumenberechnung, Guldin'sche Regel -

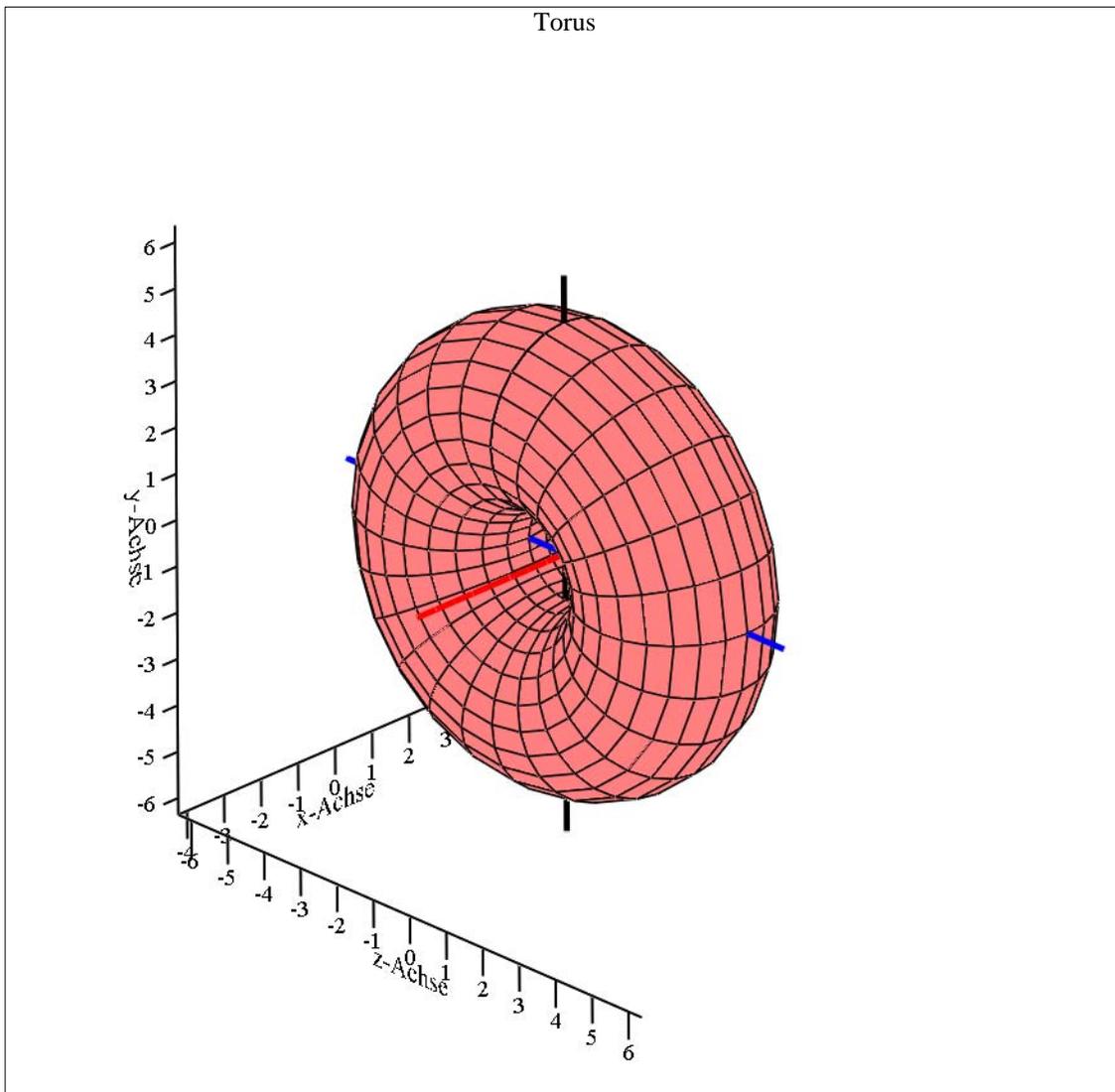
### Aufgabe (Torus oder Fahrradreifen)

Gegeben sind die Radien  $r := 2$ ;  $R := 3$  und die beiden Halbkreise

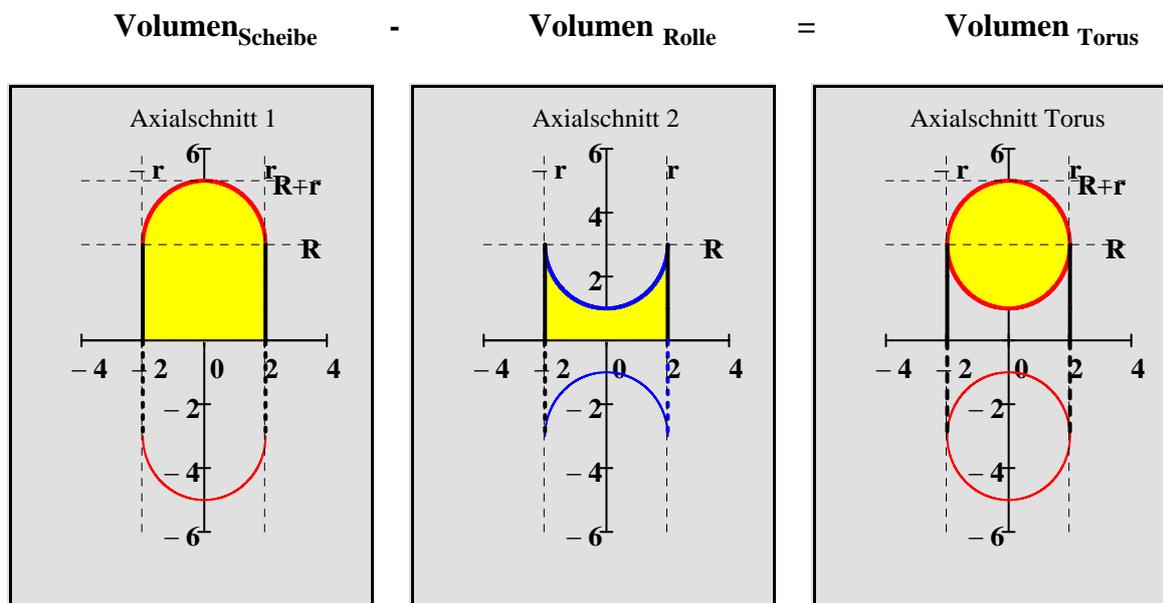
$$f(x) := \sqrt{r^2 - x^2} + R \text{ und } g(x) := -\sqrt{r^2 - x^2} + R \text{ im Intervall } [-r; r].$$

Der damit erzeugte Vollkreis rotiert um die x-Achse und erzeugt einen Torus (siehe Abb.).

- Stellen Sie den Rotationskörper als Axialschnitt dar. Zerlegen Sie den Axialschnitt in zwei integrierbare Teilaxialschnitte.
- Bestimmen Sie das Volumen des Rotationskörpers in allgemeiner Form mithilfe der Integralrechnung.
- Berechnen Sie das Volumen des Rotationskörpers (Torus).
- Berechnen Sie das Volumen mithilfe der Guldin'schen Regel.



### Teilaufgabe a)



### Teilaufgabe b)

Oberer Halbkreis:

$$f(x) := \sqrt{r^2 - x^2} + R \qquad (f(x))^2 = R^2 + r^2 - x^2 + 2 \cdot R \cdot \sqrt{r^2 - x^2}$$

Unterer Halbkreis:

$$g(x) := -\sqrt{r^2 - x^2} + R \qquad (g(x))^2 \rightarrow R^2 + r^2 - x^2 - 2 \cdot R \cdot \sqrt{r^2 - x^2}$$

Differenzfunktion für die Integration:

$$(f(x))^2 - (g(x))^2 = 4 \cdot R \cdot \sqrt{r^2 - x^2}$$

Stammfunktion aus der Formelsammlung:

$$\int \sqrt{r^2 - x^2} \, dx = \frac{r^2 \cdot \arcsin\left(\frac{x}{r}\right)}{2} + \frac{x \cdot \sqrt{r^2 - x^2}}{2}$$

Rotationsvolumen:

$$V_T := \pi \cdot \int_{-r}^r 4 \cdot R \cdot \sqrt{r^2 - x^2} \, dx = 2 \cdot \pi^2 \cdot R \cdot r^2$$

### Teilaufgabe c)

Gegeben:  $r := 2$        $R := 3$

Funktionsterm 1:

#### Volumen des Rotationskörpers 1 (Abb. 1)

$$f(x) := \sqrt{4 - x^2} + 3$$

$$V_1 := \pi \cdot \int_{-r}^r (f(x))^2 dx = \pi \cdot \left( 12 \cdot \pi + \frac{140}{3} \right)$$

Funktionsterm 2:

#### Volumen des Rotationskörpers 2 (Abb. 2)

$$g(x) := 3 - \sqrt{4 - x^2}$$

$$V_2 := \pi \cdot \int_{-r}^r (g(x))^2 dx = -\pi \cdot \left( 12 \cdot \pi - \frac{140}{3} \right)$$

#### Volumen des Torus (Abb. 3) ↓

$$V_{\text{Torus}} := V_1 - V_2 = 24 \cdot \pi^2$$

### Teilaufgabe d)

#### **Guldin'sche Regel**

Das Volumen eines Rotationskörpers errechnet sich als Produkt aus dem Flächeninhalt  $A$  der rotierenden Fläche und der Wegstrecke  $U$ , die der Flächenschwerpunkt zurücklegt:

$$V = A \cdot U$$

Speziell für den Torus gilt:

Die rotierende Fläche ist eine Kreisfläche mit Radius  $r$ :  $A = r^2 \cdot \pi$

Der Schwerpunkt des rotierenden Kreises ist der Kreismittelpunkt  $M$ .

Dieser Kreismittelpunkt  $M$  beschreibt einen Kreis mit Radius  $R$ .

Die zurückgelegte Wegstrecke entspricht also dem Umfang des Kreises mit Radius  $R$ :

$$U = 2 \cdot R \cdot \pi$$

Für das Rotationsvolumen folgt somit:

$$A := r^2 \cdot \pi \quad U := 2 \cdot R \cdot \pi \quad V := A \cdot U \quad V = 24 \cdot \pi^2$$

Abbildung 1:

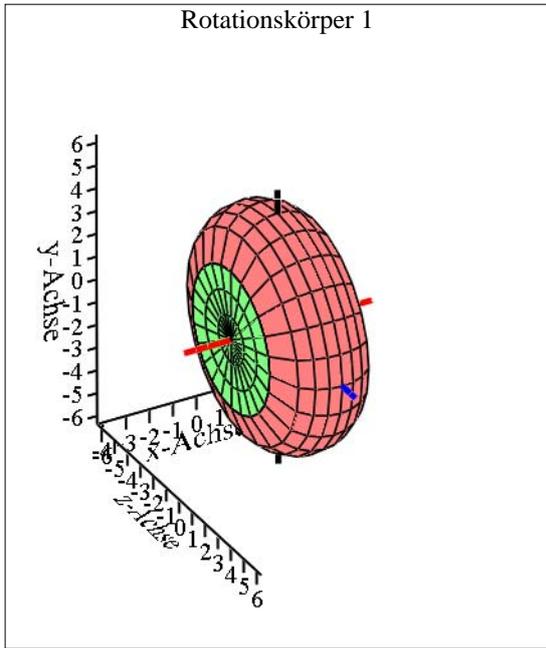


Abbildung 2:

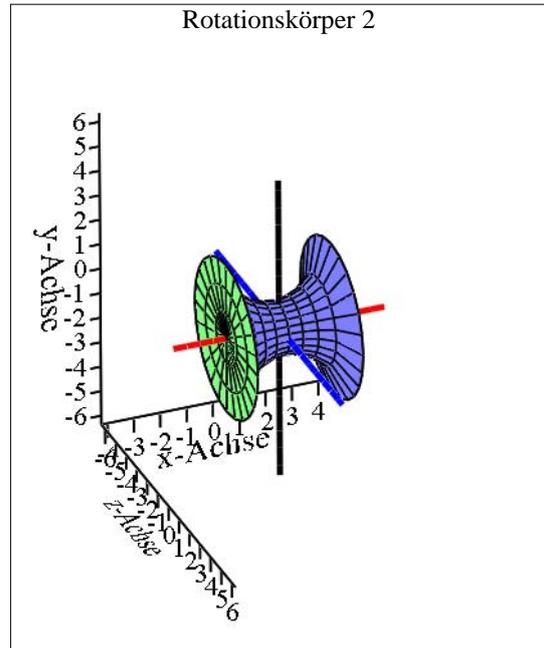
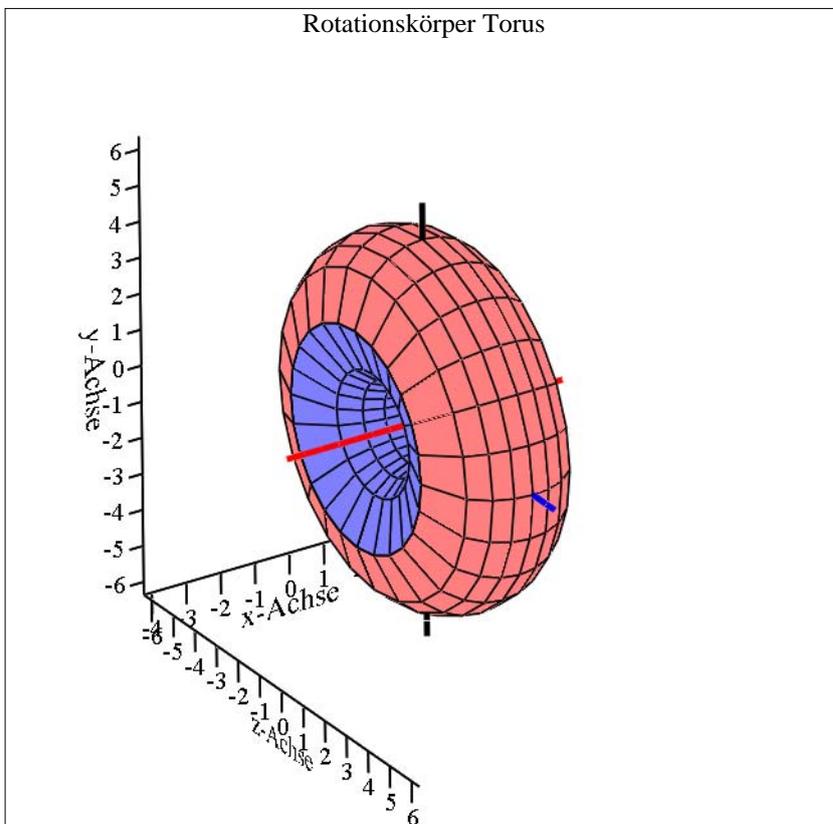


Abbildung 3:



## Rotationskörper - Rotation einer Fläche um die x-Achse -

### Aufgabe 8 (Rolle einer Seilbahn)

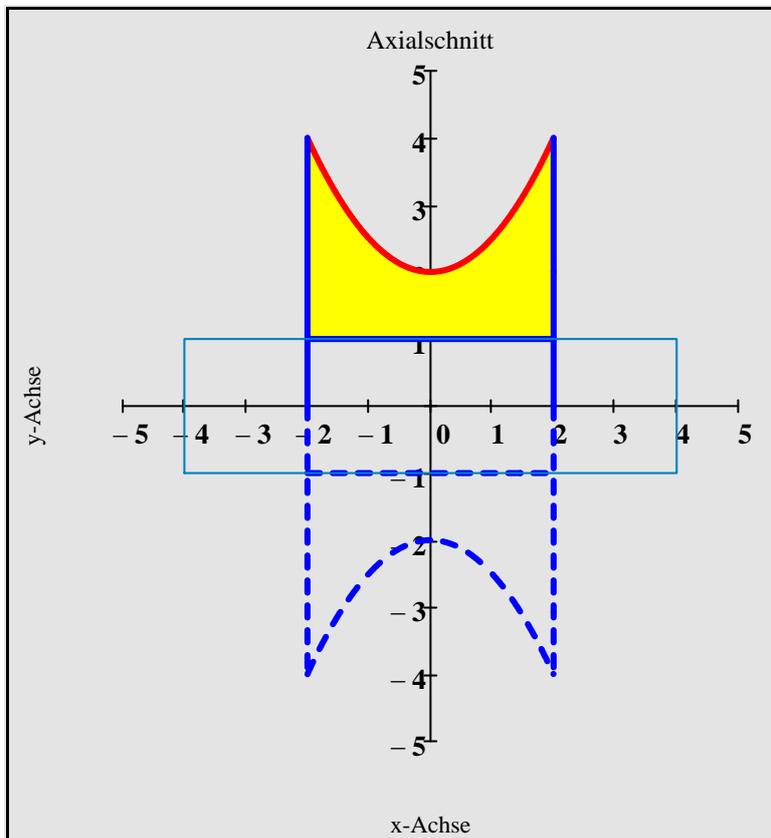
Gegeben ist die Funktion  $f$  mit  $f(x) := \frac{1}{2} \cdot x^2 + 2$  mit  $D = [a ; b]$  und  $a := -2$ ,  $b := 2$ .

Die Achse der Rolle hat den Durchmesser  $d := 2$  und die Länge  $l := 8$ .

Bei der Rotation um die x-Achse erzeugt der Graph von  $f$  einen Rotationskörper, der wie die Rolle einer Seilbahn aussieht.

- Stellen Sie den Rotationskörper der Rolle als Axialschnitt dar.
- Ermitteln Sie das Volumen des Rotationskörpers.
- Betrachten Sie den Rotationskörper und die Rolle in 3D.

#### Teilaufgabe a)



### Teilaufgabe b)

Volumen des Rotationskörpers zwischen Graph von  $f$  und  $x$ -Achse:

$$V_{\text{Rot}} := \pi \cdot \int_{-2}^2 (f(x))^2 dx \qquad V_{\text{Rot}} = \frac{448 \cdot \pi}{15} = 93.8$$

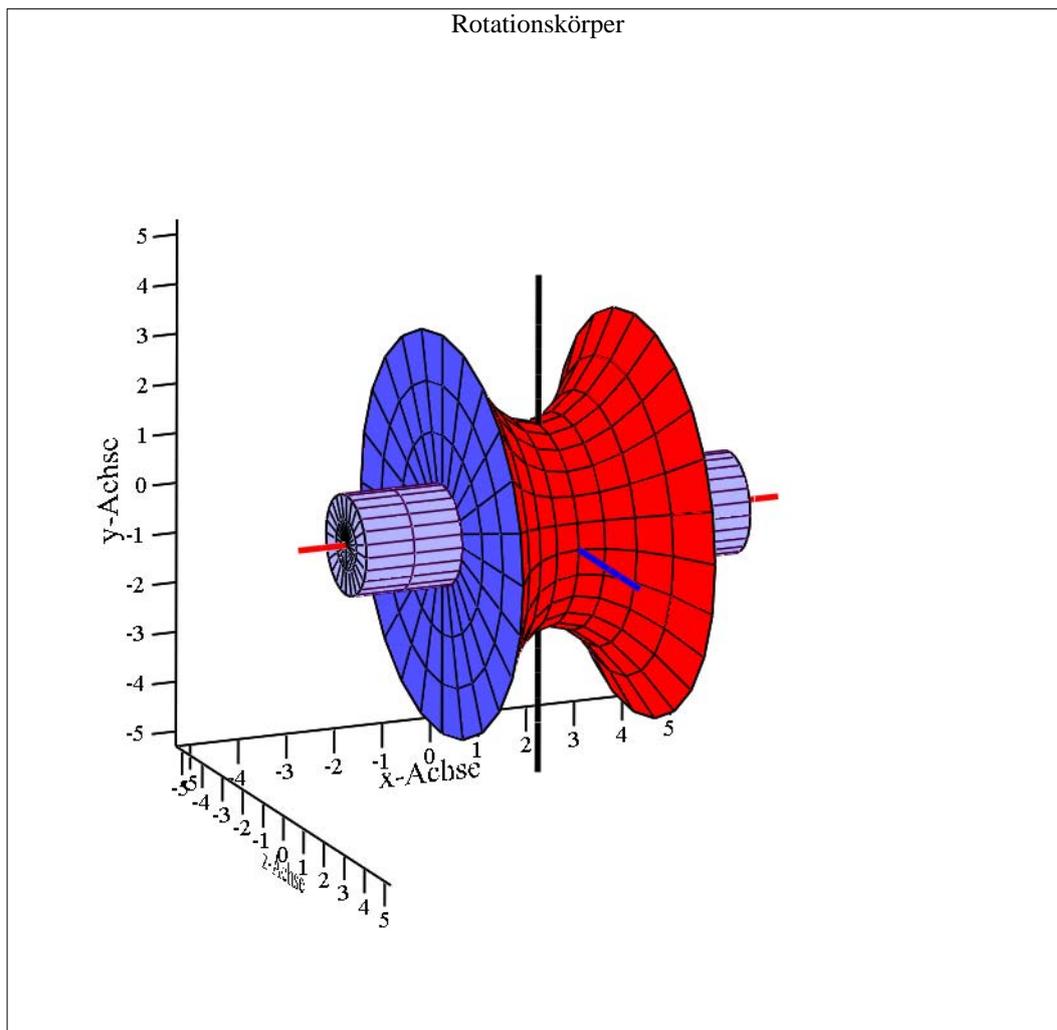
Volumen der Achse innerhalb des Rotationskörpers:

$$V_{\text{Zyl}} := \pi \cdot a^2 \cdot 1 \qquad V_{\text{Zyl}} = 4 \cdot \pi = 12.6$$

Volumen der Seilrolle:

$$V_{\text{Rolle}} := V_{\text{Rot}} - V_{\text{Zyl}} \qquad V_{\text{Rolle}} = \frac{388 \cdot \pi}{15} = 81.263$$

### Teilaufgabe c)



## Spiralen - Hyperbolische Spiralen -

### Beispiel 1

Gegeben ist die *Hyperbolische Spirale 1. Ordnung* in Polarkoordinaten:  $r(\varphi) = \frac{a}{\varphi}$ .

Bei der hyperbolischen Spirale liegt zwischen Radius und Polarwinkel eine umgekehrte Proportionalität vor. Die Kurve besteht für Winkel mit unterschiedlichem Vorzeichen aus zwei Zweigen.

Beobachten Sie die Spirale beim Verändern des Parameters  $a$  mit dem Schieberegler.

Wählen Sie  $a$ :

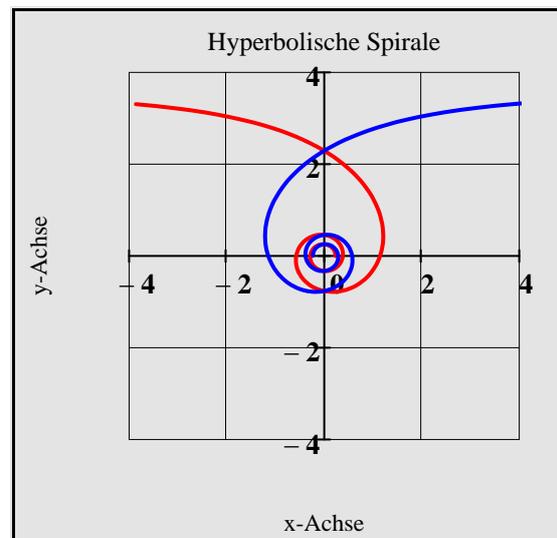
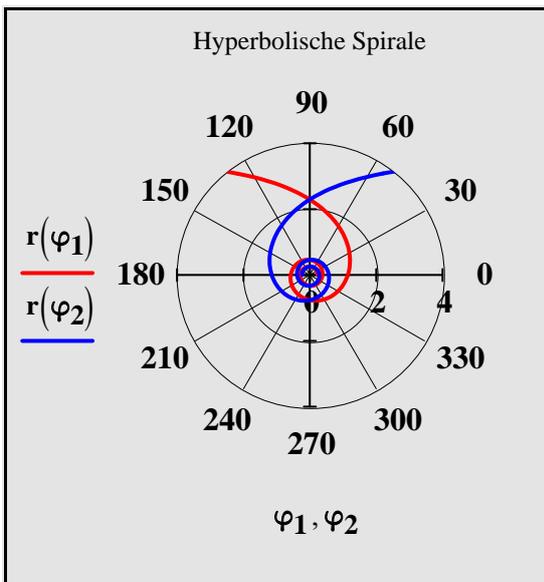


Polarkoordinaten:

$$r(\varphi) := \frac{a}{\varphi}$$

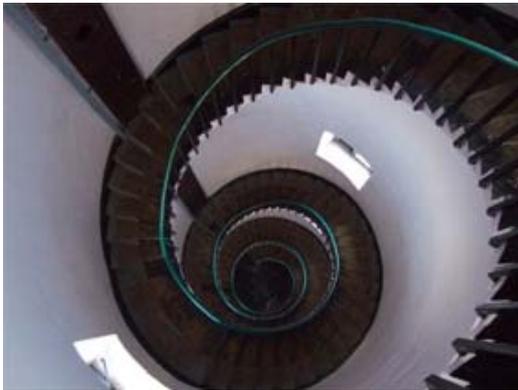
Parameterform:

$$x(t) := \frac{a}{t} \cdot \cos(t) \qquad y(t) := \frac{a}{t} \cdot \sin(t)$$



Anwendung: Fotografie einer Wendeltreppe

Fotografiert man eine Wendeltreppe von unten nach oben, so ergibt sich auf der Aufnahme eine hyperbolische Spirale. Mathematischer Nachweis siehe Beispiel 2.



**Beispiel 2**

Gegeben ist die Parameterdarstellung der Raumpunkte einer Wendeltreppe:

$$\mathbf{X}(t) = \begin{bmatrix} r \cdot \cos(t + t_0) \\ r \cdot \sin(t + t_0) \\ \frac{h}{2 \cdot \pi} \cdot (t + t_0) \end{bmatrix}$$

mit der Höhe  $\mathbf{H}$  des Schraubenganges.

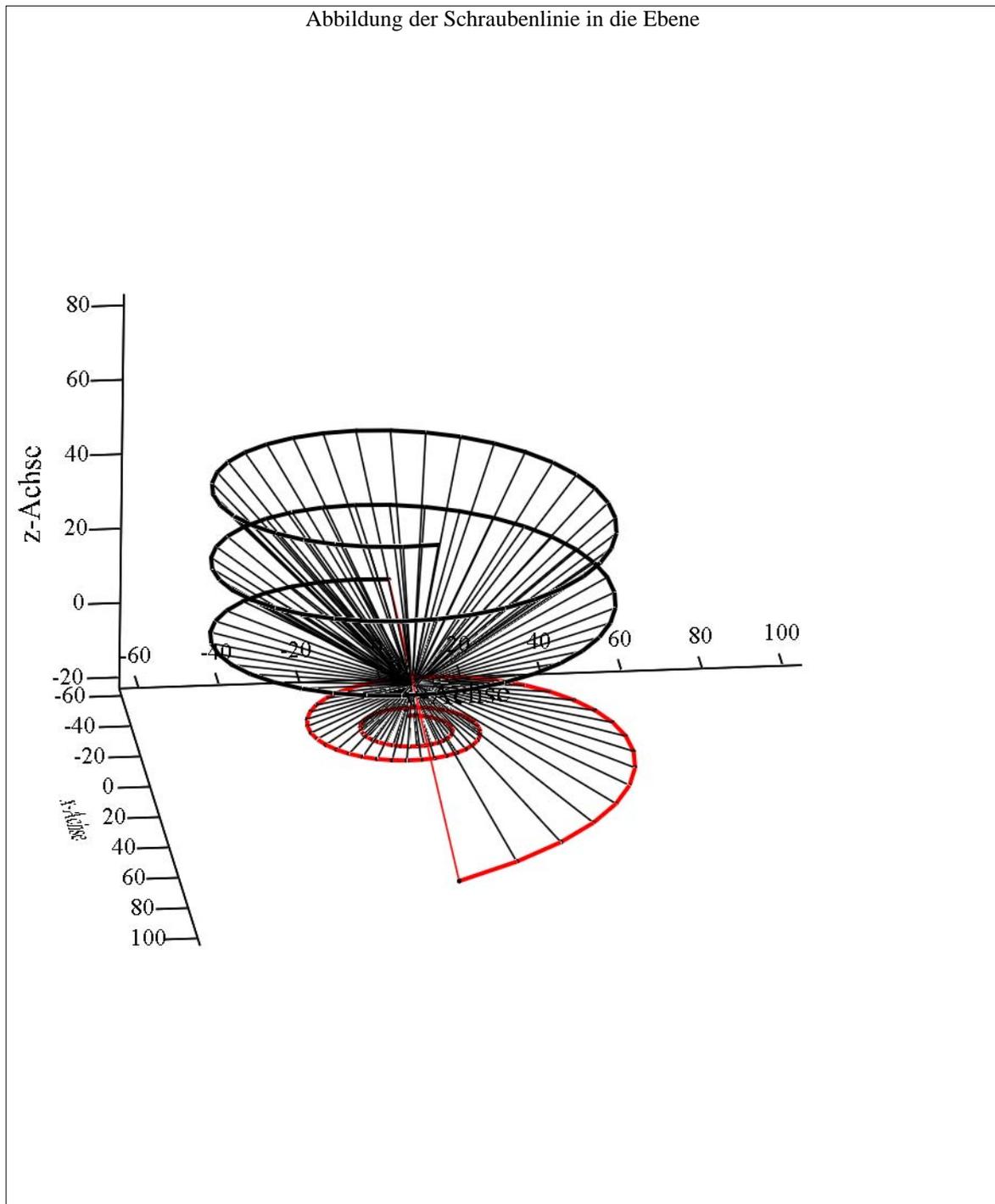
Die Wendeltreppe wird von unten nach oben fotografiert, wobei die Linse des Fotoapparates auf Nullniveau liegt, der Fotoapparat selbst ist im Boden versenkt.

Wird die Wendeltreppe auf diese Weise in die Ebene abgebildet, entsteht eine hyperbolische Spirale.

Anzahl der Schraubengänge:



Anzahl der Schraubengänge:  $k = 2.5$



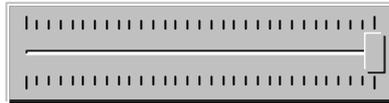
### Beispiel 3

Gegeben ist die **Hyperbolische Spirale 2. Ordnung** in Polarkoordinaten:  $r(\varphi) = \frac{a}{\sqrt{\varphi}}$ .

Diese hyperbolische Spirale hat Ähnlichkeit mit einem bischöflichen Krummstab und wurde deshalb **Lituus** (spiralförmig endender Stab) genannt.

Beobachten Sie die Spirale beim Verändern des Parameters  $a$  mit dem Schieberegler.

Wählen Sie  $a$ :

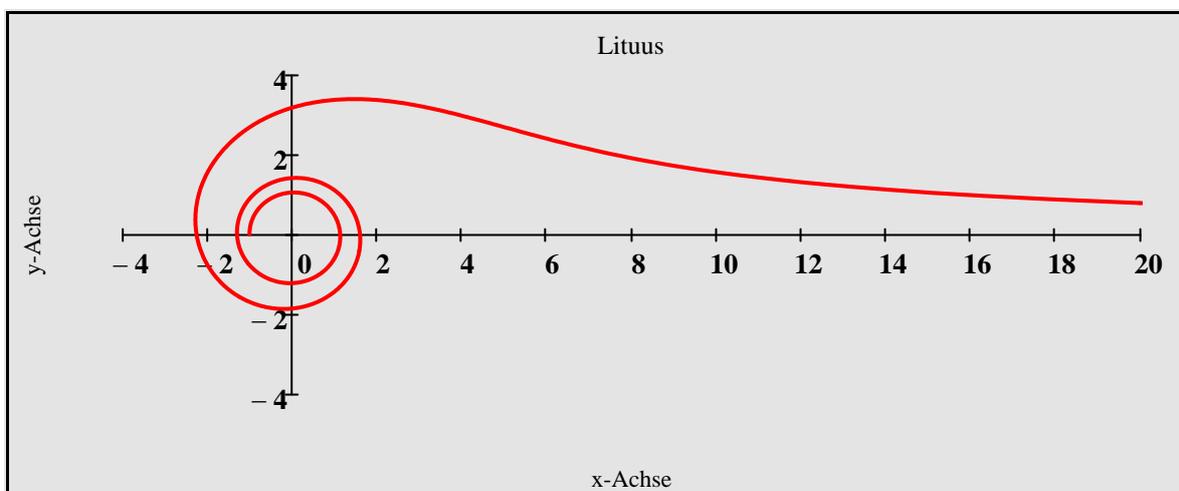
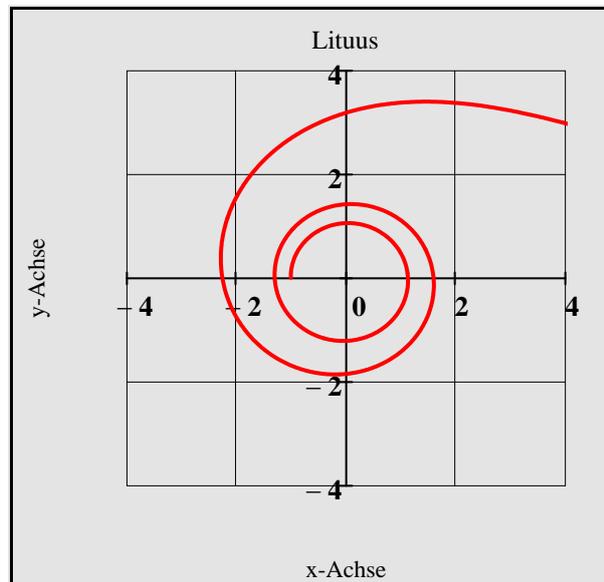
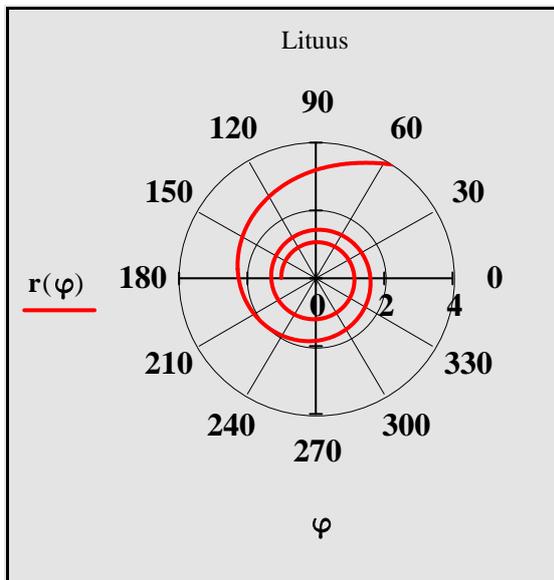


Polarkoordinaten:

$$r(\varphi) := \frac{a}{\sqrt{\varphi}}$$

Parameterform:

$$x(t) := \frac{a}{\sqrt{t}} \cdot \cos(t) \quad y(t) := \frac{a}{\sqrt{t}} \cdot \sin(t)$$



## Abrollkurven - Epizykloiden -

### Bezeichnungen

Eine *Epizykloide* ist eine Kurve, die ein Punkt auf dem Umfang eines Kreises vom Radius  $b$  beschreibt, wenn dieser Kreis auf der Außenseite eines festen Kreises mit Radius  $a$  abrollt ohne zu gleiten.

Parameterdarstellung:

$$x(t) = (a + b) \cdot \cos(t) - b \cdot \cos\left(\frac{a + b}{b} \cdot t\right); \quad y(t) = (a - b) \cdot \sin(t) - b \cdot \sin\left(\frac{a - b}{b} \cdot t\right);$$

Man unterscheidet dabei die *spitze Epizykloide*, die *gestreckte Epizykloide* und die *geschlungene Epizykloide*.

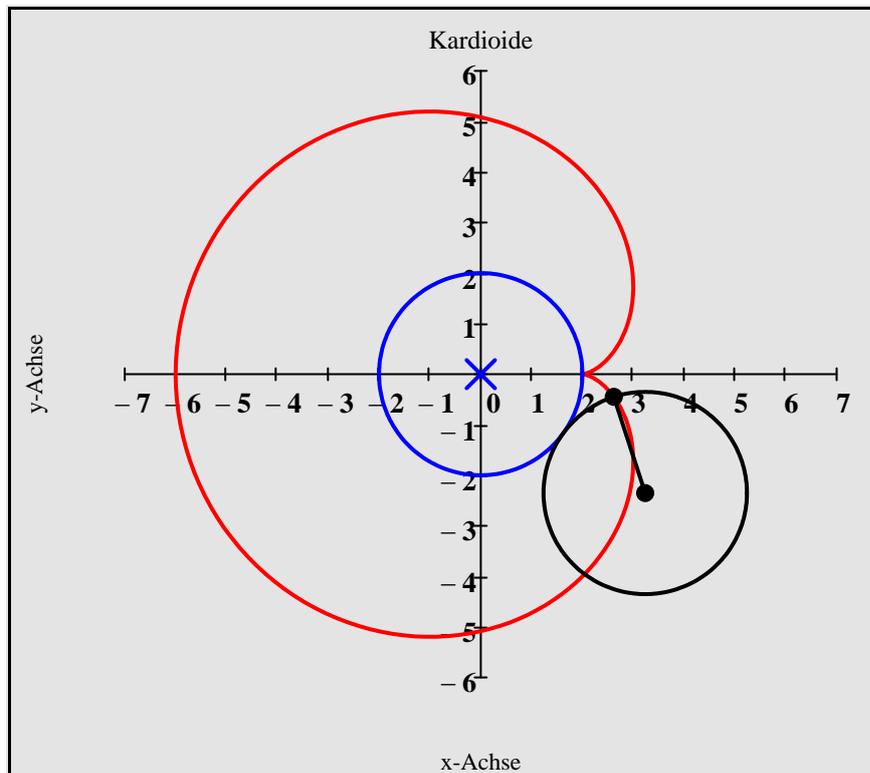
### Beispiel 1: Kardioide (Herzkurve) als Sonderfall der Epizykloide

Konkrete Parameterdarstellung:

$$x(t) = 4 \cdot \cos(t) - 2 \cdot \cos(2 \cdot t)$$

$$y(t) = 4 \cdot \sin(t) - 2 \cdot \sin(2 \cdot t)$$

Abrollbewegung:



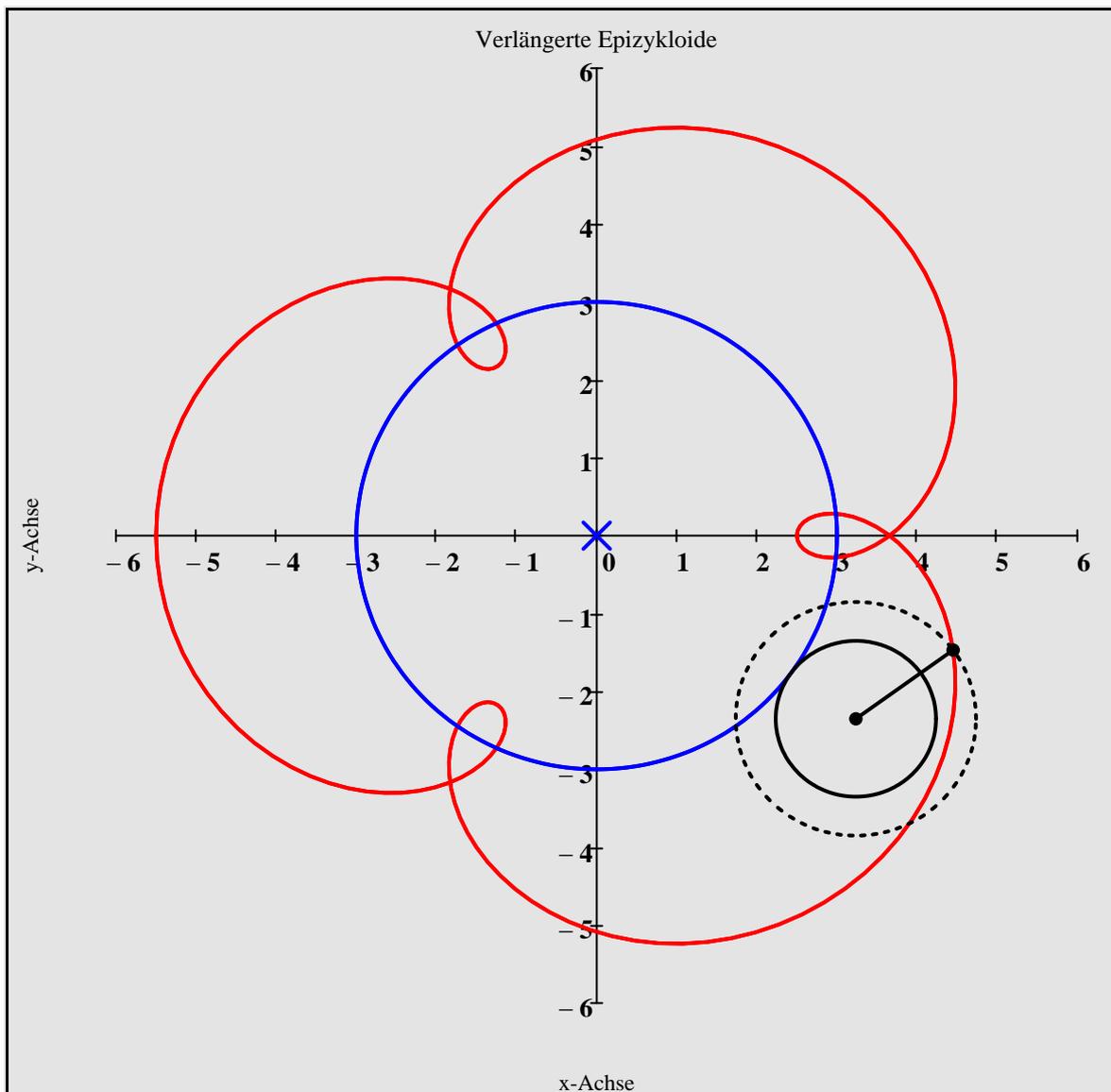
### Beispiel 4: Verlängerte Epizykloide (Epitrochoide)

Konkrete Parameterdarstellung:

$$x(t) = 4 \cdot \cos(t) + -1.5 \cdot \cos(4 \cdot t)$$

$$y(t) = 4 \cdot \sin(t) + -1.5 \cdot \sin(4 \cdot t)$$

Abrollbewegung:



Nach der *Epizykeltheorie* des Ptolemäus bewegen sich die Planeten entlang eines kleinen Kreises, der sich seinerseits wiederum entlang eines größeren Kreises bewegt. Die Bahnen der Planeten in diesem System sind *Epizykloiden*.

## Gewöhnliche Differentialgleichungen - Homogene DGL, Richtungsfeld -

### Aufgabe

Gegeben ist die Differentialgleichung  $y' - \cos(x) \cdot y = 0$

mit den Anfangsbedingungen  $x_{01} := 0; y_{01} := 1; \quad x_{02} := 0; y_{02} := 3;$

Zeichnen Sie in das vorgegebene Richtungsfeld näherungsweise eine Lösungskurve durch die Punkte  $P_1(x_{01} / y_{01})$  und  $P_2(x_{02} / y_{02})$ .

Kennzeichnen Sie in der erstellten Graphik die gegebenen Anfangsbedingungen.

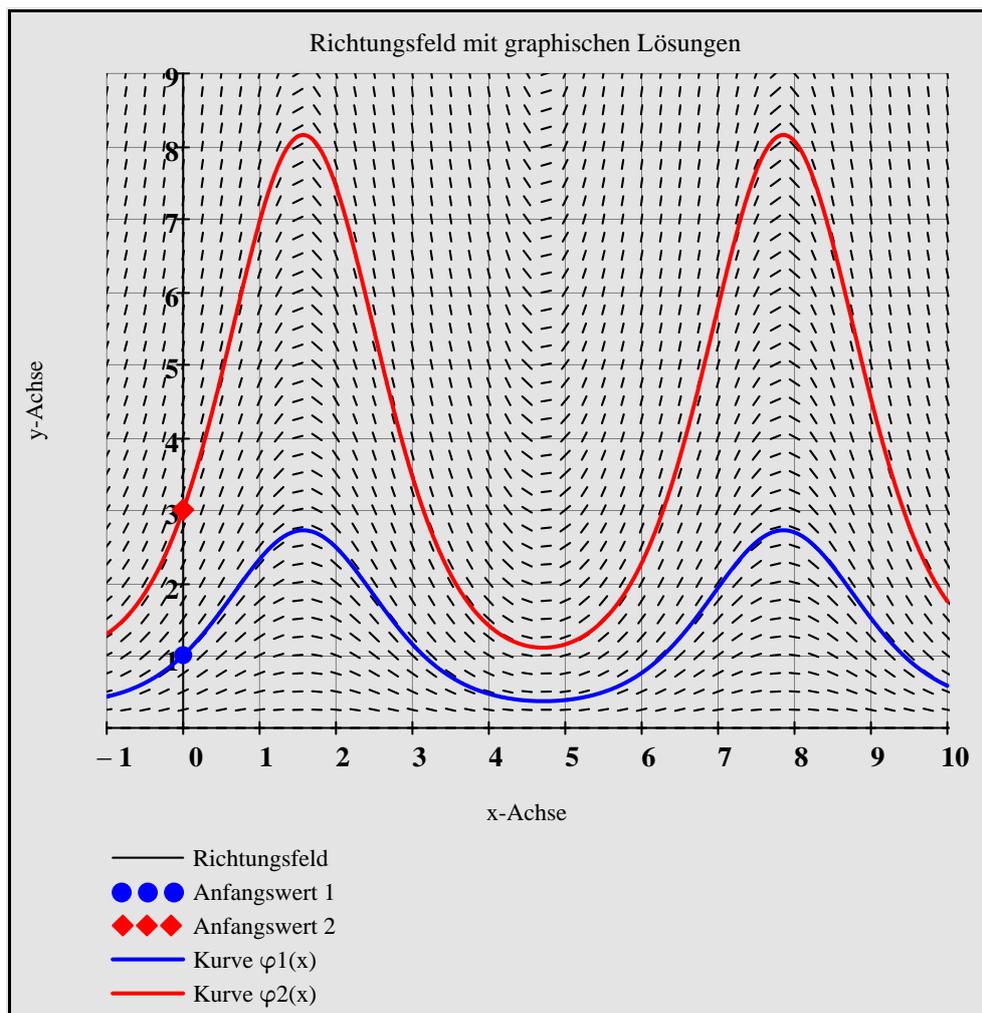
$f(x, y) := y' - \cos(x) \cdot y = 0$  auflösen,  $y' \rightarrow y \cdot \cos(x)$

Anfangswert 1:  $P_1 = (0 \ 1)$

Steigung im Anfangswert 1:  $f(x_{01}, y_{01}) = 1$

Anfangswert 2:  $P_2 = (0 \ 3)$

Steigung im Anfangswert 2:  $f(x_{02}, y_{02}) = 3$



## Gewöhnliche Differentialgleichungen - Homogene DGL, Trennung der Variablen -

### Aufgabe

Gegeben ist die Differentialgleichung  $y' + x^2 \cdot (y - 1) = 0$   
mit der Anfangsbedingung  $x_0 = 0; y_0 = 3$ .

- Ermitteln Sie die allgemeine Lösung der gegebenen DGL.
- Erstellen Sie für  $x \in [-2; 4]$  eine Graphik für die Kurvenschar  $y_A(x, K)$  der allgemeinen Lösung.
- Geben Sie die maximale Definitionsmenge an und ermitteln Sie zur gegebenen Anfangsbedingung die partikuläre Lösung der Differentialgleichung.
- Erstellen Sie für eine geeignet gewählte Definitionsmenge die Lösungskurve durch den Punkt  $P(x_0 / y_0)$  und kennzeichnen Sie in der erstellten Graphik die gegebene Anfangsbedingung.

### Teilaufgabe a)

Allgemeine DGL:

$$y' = f(x) \cdot g(y)$$

Konkrete DGL:

$$y' + x^2 \cdot (y - 1) = 0$$

Auflösen nach  $y'$ :

$$y' + x^2 \cdot (y - 1) = 0 \rightarrow -x^2 \cdot (y - 1)$$

Definition von  $f(x)$  und  $g(x)$ :

$$f(x) := -x^2$$

$$g(y) := y - 1$$

Nullstelle von  $g(y)$ :

$$g(y) = 0 \text{ auflösen, } y \rightarrow 1$$

Triviale Lösung der DGL:

$$y = 1$$

Im Folgenden gilt:

$$g(y) \neq 0$$

Verwendung des Differentialquotienten:  $\frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y)$

Trennung der Variablen:

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x) \cdot dx \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dy}{y - 1} = -x^2 \cdot dx$$

Integration beider Seiten:

$$\int \frac{1}{g(y)} dy = \int f(x) dx + k \rightarrow \ln(|y - 1|) = k - \frac{x^3}{3}$$

Nach y auflösen:

$$|y - 1| = e^{k \cdot \frac{x^3}{3}}$$

Auflösen des Betrags:

**1. Fall:**  $y - 1 > 0$  auflösen  $\rightarrow 1 < y$

Mit  $y > 1$  folgt:  $y - 1 = e^k \cdot e^{-\frac{x^3}{3}}$  auflösen,  $y \rightarrow e^k \cdot e^{-\frac{x^3}{3}} + 1$

mit  $K_1 = e^k \wedge K_1 > 0 \Rightarrow y = K_1 \cdot e^{-\frac{x^3}{3}} + 1$

**2. Fall:**  $y - 1 < 0$  auflösen  $\rightarrow y < 1$

Mit  $y < 1$  folgt:  $-y + 1 = e^k \cdot e^{-\frac{x^3}{3}}$  auflösen,  $y \rightarrow 1 - e^k \cdot e^{-\frac{x^3}{3}}$

mit  $K_2 = -e^k \wedge K_2 < 0 \Rightarrow y = K_2 \cdot e^{-\frac{x^3}{3}} + 1$

### Zusammenfassung

- Die beiden Fälle (1) und (2) können zusammengefasst werden, wenn eine Konstante verwendet wird, die sowohl negative als auch positive Werte annehmen kann. Die **allgemeine Lösung** lautet:

$$y = K \cdot e^{-\frac{x^3}{3}} + 1 \quad \text{mit } K \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \text{ und } y \neq 1$$

- Erweitert man den Definitionsbereich der verwendeten Konstanten  $K$  auf  $\mathbb{R}$ , so ist die triviale Lösung der Differentialgleichung ein Spezialfall der parameterabhängigen Funktionsgleichung.

$$y_A = K \cdot e^{-\frac{x^3}{3}} + 1 \quad \text{mit } K \in \mathbb{R}$$

- Für  $K = 0$  folgt die **triviale Lösung**:

$$y = 0 \cdot e^{-\frac{x^3}{3}} + 1 \quad \mathbf{y = 1}$$

**Triviale Lösung:**  $\mathbf{y = 1}$

**Allgemeine Lösung:**  $\mathbf{y_A(x, K) := K \cdot e^{-\frac{x^3}{3}} + 1}$

**Teilaufgabe b)**

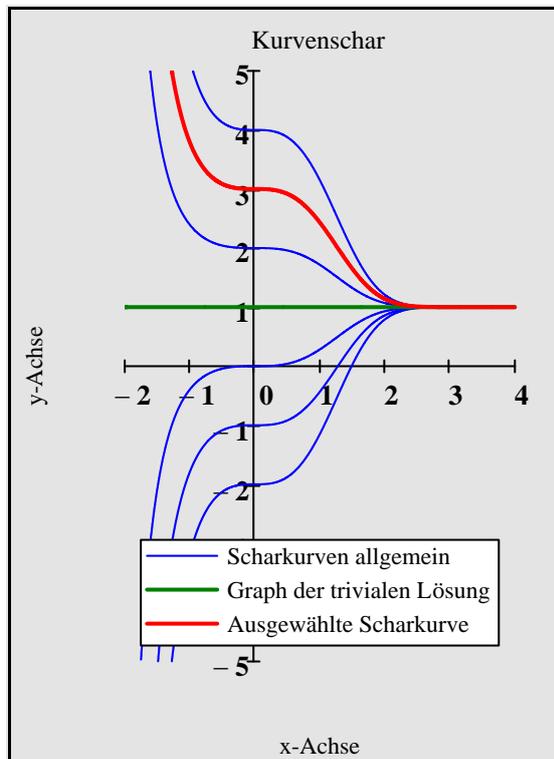
Gegeben ist die Kurvenschar in ihrer Definitionsmenge:

$$\mathbf{y_A(x, K) = K \cdot e^{-\frac{x^3}{3}} + 1} \quad \mathbf{D = \mathbb{R} \text{ mit } K \in \mathbb{R}}$$

Kurvenschar mit Auswahl einer Kurve:



**Scharkurve** → "allgemeine Lsg."



Parameterwert der  
ausgewählten Kurve:

$$\mathbf{K = 2}$$

Ausgewählte Lösungskurve:

$$\mathbf{y_A(x, K) = 2 \cdot e^{-\frac{x^3}{3}} + 1}$$

### Teilaufgabe c)

Bestimmung der Konstanten K über die Anfangsbedingung:

$$x_0 := 0 \quad y_0 := 3$$

$K := y_A(x_0, K) = y_0$  auflösen,  $K \rightarrow 2$

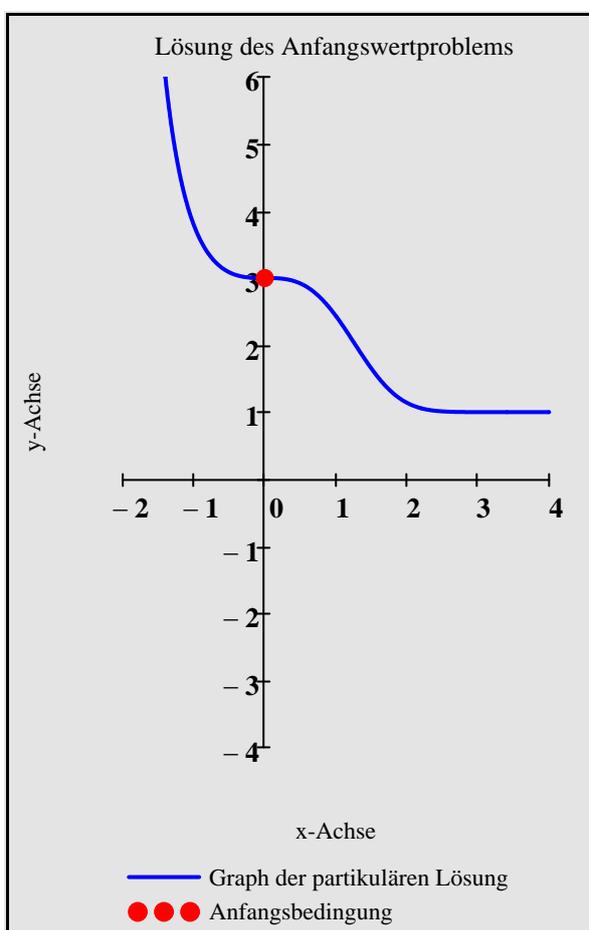
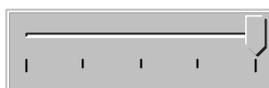
Einsetzen:  $y_P(x) := y_A(x, K)$

Partikuläre Lösung:

$$y_P(x) = 2 \cdot e^{-\frac{x^3}{3}} + 1$$

### Teilaufgabe d)

Wählen Sie einen Punkt  $P(x_0 / y_0)$ :



Anfangswert:

$$P = (0 \ 3)$$

Parameter:

$$K = 2$$

Partikuläre Lösung:

$$y_P(x) = 2 \cdot e^{-\frac{x^3}{3}} + 1$$

Definitionsmenge:

$$D = \mathbb{R}$$

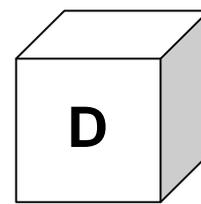
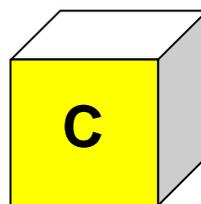
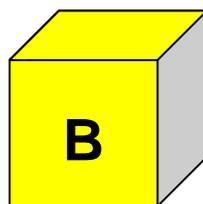
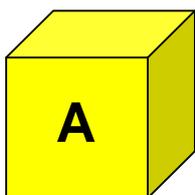
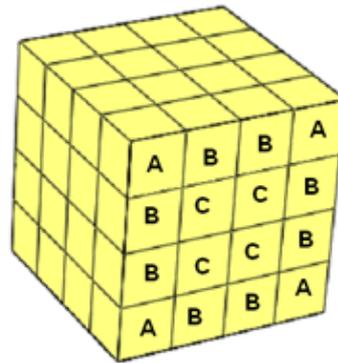
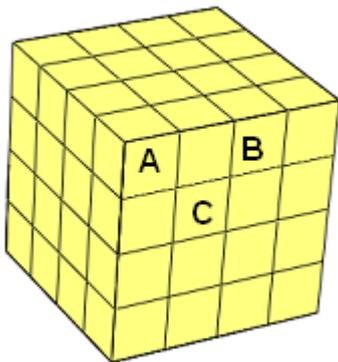
## Kombinatorik - Denksportaufgabe Würfel -

### Aufgabe (nach Bild der Wissenschaft 12 / 2001)

Gegeben ist ein Würfel mit gelber Oberfläche. Dieser gelbe Würfel wird in 64 kleine Teilwürfel zersägt. Die Teilwürfel sind nun nicht mehr rundum gelb, es geben sich nach der Anzahl der gelben Seiten verschiedene Würfeltypen.

- Geben Sie die Würfeltypen (k Seiten gelb) und deren Wahrscheinlichkeit an.
- Die 64 Würfel befinden sich in einen Behälter. Ein beliebiger Würfel wird aus dem Behälter genommen und mit ihm gewürfelt. Erstellen Sie ein Baumdiagramm für das Ereignis E: *{obere Seite Gelb}* und errechnen Sie dessen Wahrscheinlichkeit.
- Der Würfel soll nun mit 2, 3, 4 ... Würfeln an der Würfelkante zersägt werden. Geben Sie jeweils die Anzahl der Teilwürfel und die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis E an. Verallgemeinern Sie zu einer Formel.

#### Teilaufgabe a)



**Typ A**  
3 Seiten gelb  
8 Stück

**Typ B**  
2 Seiten gelb  
24 Stück

**Typ C**  
1 Seite gelb  
24 Stück

**Typ D**  
keine Seite gelb  
8 Stück

Wahrscheinlichkeiten für die Würfeltypen:

$$P(\mathbf{A}) = \frac{8}{64} = \frac{1}{8}$$

$$P(\mathbf{B}) = \frac{24}{64} = \frac{3}{8}$$

$$P(\mathbf{C}) = \frac{24}{64} = \frac{3}{8}$$

$$P(\mathbf{D}) = \frac{8}{64} = \frac{1}{8}$$

**Teilaufgabe b)**

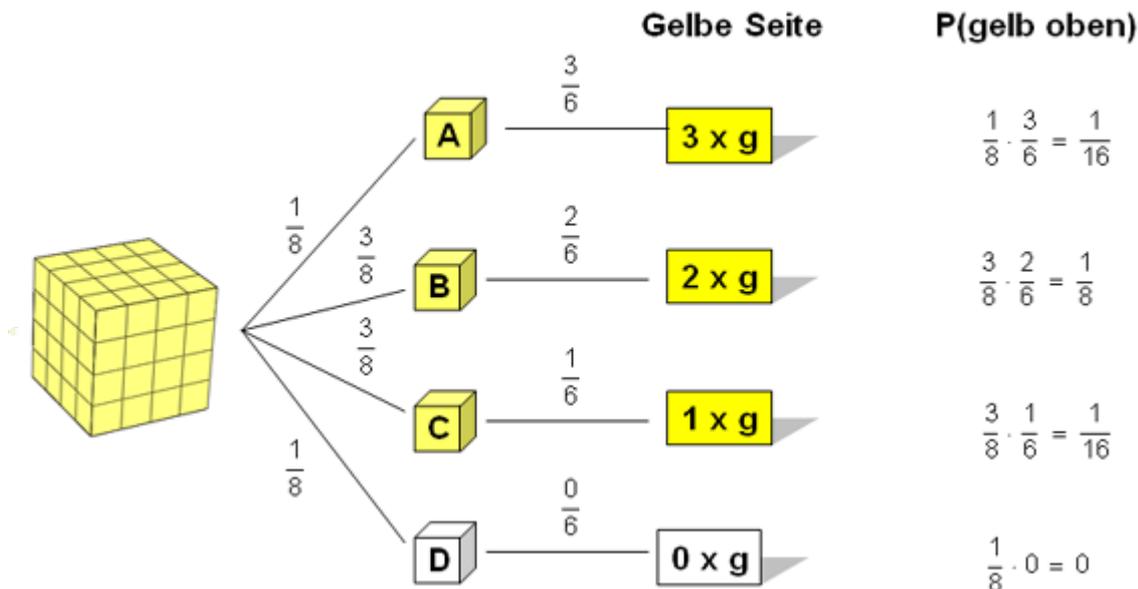
Wahrscheinlichkeiten für *gelb* bei den einzelnen Würfeltypen:

$$P(g) = \frac{3}{6}$$

$$P(g) = \frac{2}{6}$$

$$P(g) = \frac{1}{6}$$

$$P(g) = 0$$



Wahrscheinlichkeit für das Ereignis *obere Seite gelb*

$$P(E) := \frac{1}{16} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}$$

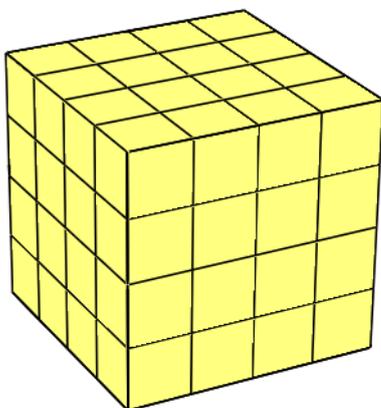
$$P(E) = \frac{1}{4}$$

**Teilaufgabe c)**

Anzahl der Würfel entlang einer Kante frei wählen von 2 bis 10:



**Anzahl = 4**



Es sind insgesamt  $\text{Anzahl}^3 = 64$  Würfel

Die Wahrscheinlichkeit für *gelb oben* ist:

$$P := \frac{6 \cdot \text{Anzahl}^2}{6 \cdot \text{Anzahl}^3}$$

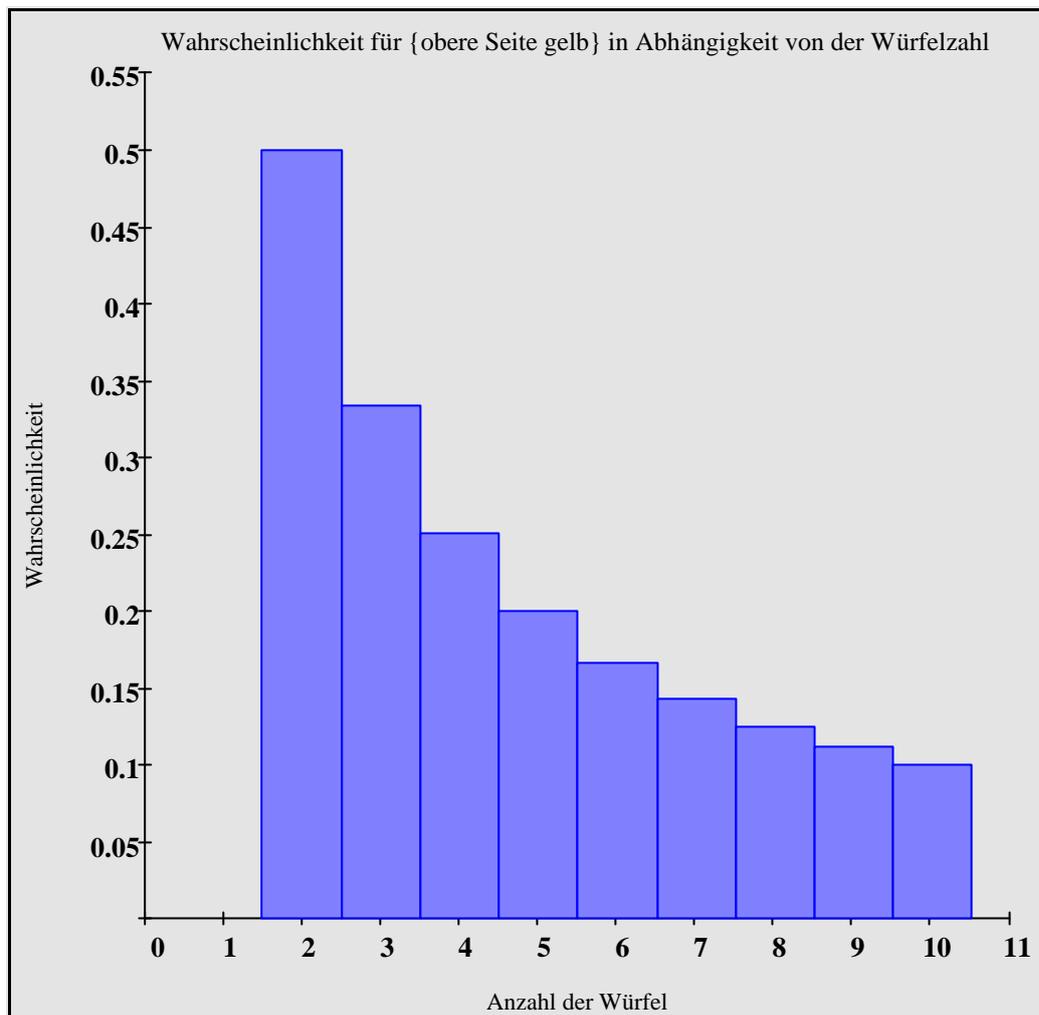
$$P = \frac{1}{4} = 0.25$$

### Verallgemeinerung:

Wahrscheinlichkeit bei verschiedenen **Anzahl**-Werten:

$$P(\text{Anzahl}) := \frac{6 \cdot \text{Anzahl}^2}{6 \cdot \text{Anzahl}^3}$$

Definitionsbereich: **Anzahl** := 2, 3 .. 10



## Stochastik

### - Kombinatorik - Baumdiagramm für drei Entscheidungen -

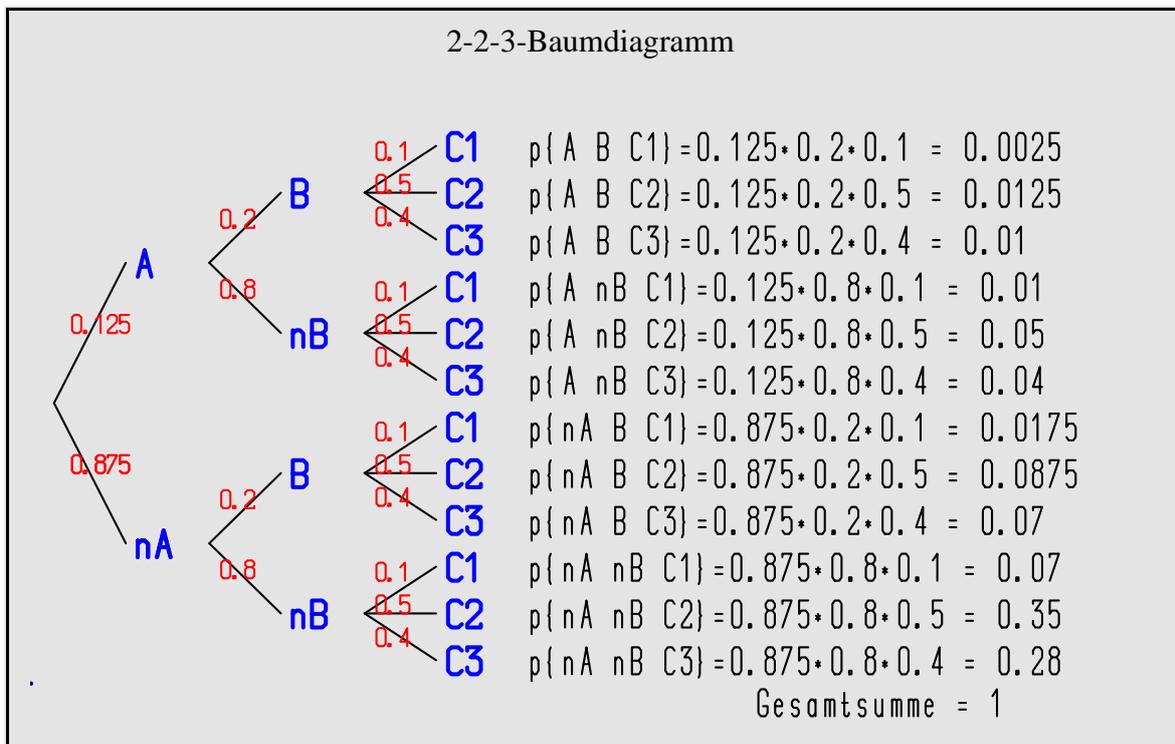
#### Beispiel: Ein 2-2-3-Baumdiagramm

Bei einem 3-stufigen Zufallsversuch wird bei der ersten und zweiten Stufe entschieden, ob das Ereignis E eintritt oder nicht (hier z. B.  $\bar{A} = nA, \bar{B} = nB$ ). Bei der dritten Stufe sind drei mögliche Entscheidungen für das Ereignis E möglich (hier z. B.  $C_1, C_2, C_3$ ).

In diesem Baumdiagramm können die Bezeichnungen für das Ereignis  $E_{ki}$  und die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten beliebig gewählt werden **unter der Vorgabe, dass die Wahrscheinlichkeit eines Zweiges 1 ergibt.**

Stellen Sie das Baumdiagramm mit allen Elementarereignissen dar und berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten aller Elementarereignisse.

	<u>1. Stufe:</u>	<u>2. Stufe:</u>	
Ausgänge:	$E_{11} := "A"$	$E_{21} := "B"$	
Wahrscheinlichkeiten:	$p_{11} := 0.125$	$p_{21} := 0.2$	
	<u>3. Stufe:</u>		
Ausgänge:	$E_{31} := "C1"$	$E_{32} := "C2"$	$E_{33} := "C3"$
Wahrscheinlichkeiten:	$p_{31} := 0.1$	$p_{32} := 0.5$	$p_{33} := 0.4$



## Verteilungen

### - Wahrscheinlichkeitsverteilung und Verteilungsfunktion -

#### Theorie

Zu einer auf dem Ergebnisraum  $\Omega$  definierten **Zufallsgröße**  $X$  mit der Wertemenge  $W = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_k\}$  gehört die eindeutig bestimmte **Zerlegung** von  $\Omega$ :

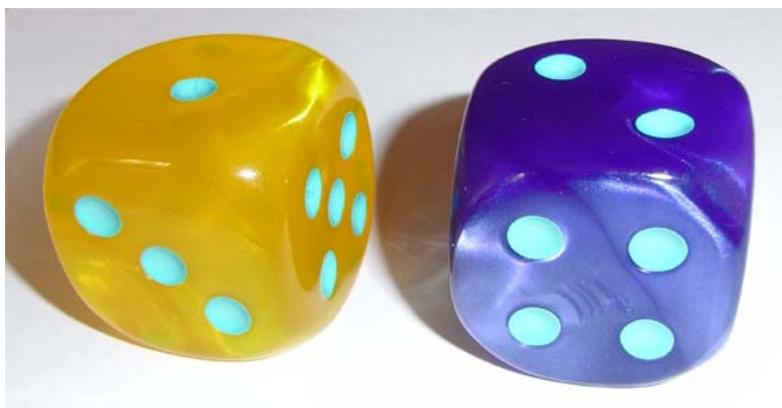
$$\Omega = \{\omega \mid X(\omega) = x_1\} \cup \{\omega \mid X(\omega) = x_2\} \cup \dots \cup \{\omega \mid X(\omega) = x_k\}.$$

Die **Wahrscheinlichkeit**, dass  $X(\omega)$  den Wert  $x_i$  ( $i = 1, 2, \dots, k$ ) annimmt, wird mit  $P(X = x_i)$  bezeichnet.

Die Funktion  $P: x_i \mapsto P(X = x_i)$  mit  $x_i \in W = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_k\}$  heißt **Wahrscheinlichkeitsverteilung** der Zufallsgröße  $X$  auf  $(\Omega, P)$ .

Die für alle  $x \in \mathbb{R}$  definierte Funktion  $F: x \mapsto P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} P(X = x_i)$

mit  $x_i \in W = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_k\}$  heißt **kumulative Verteilungsfunktion** der Zufallsgröße  $X$  auf  $(\Omega, P)$ .



#### Aufgabe 1

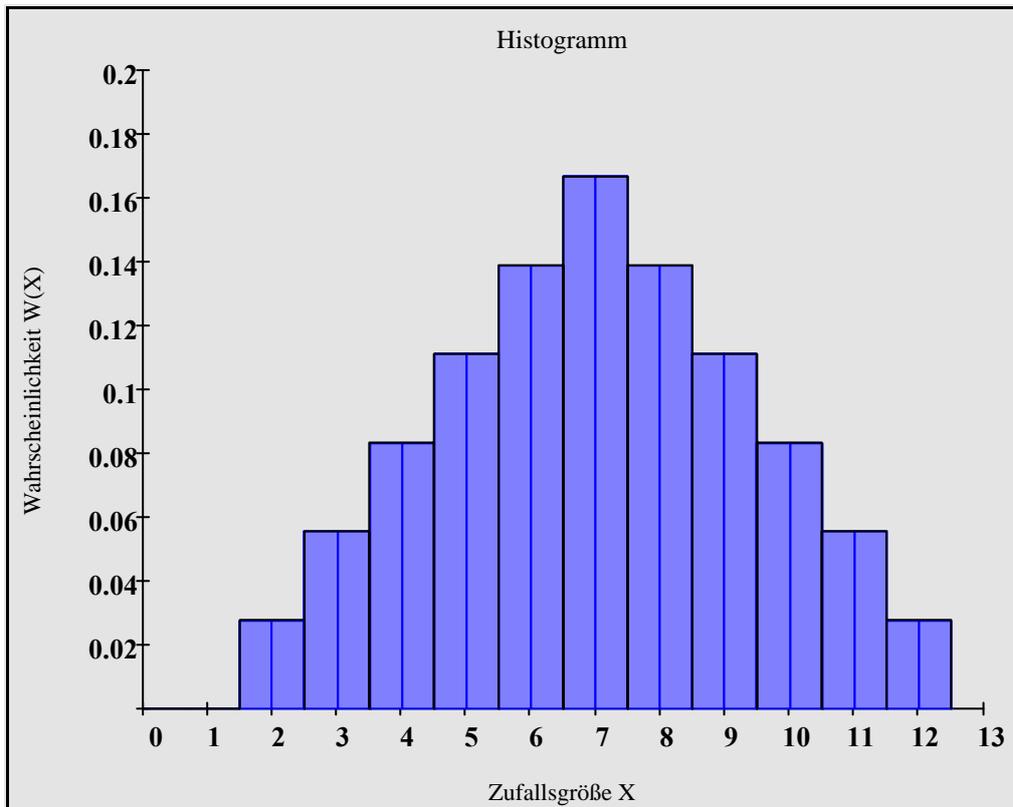
Gegeben ist das Zufallsexperiment **Werfen von zwei unterscheidbaren Würfeln**. Die Zufallsgröße  $X$  ist die **Summe der Augenzahlen beider Würfel**.

- Geben Sie die Zufallsgrößen an und stellen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung  $W(X)$  als Histogramm dar.
- Stellen Sie die Verteilungsfunktion  $F(x)$  tabellarisch und graphisch dar.

#### Teilaufgabe a)

Zufallsgröße:  $X := (2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7 \ 8 \ 9 \ 10 \ 11 \ 12)^T$

Wahrscheinlichkeit:  $W := \left( \frac{1}{36} \ \frac{2}{36} \ \frac{3}{36} \ \frac{4}{36} \ \frac{5}{36} \ \frac{6}{36} \ \frac{5}{36} \ \frac{4}{36} \ \frac{3}{36} \ \frac{2}{36} \ \frac{1}{36} \right)^T$



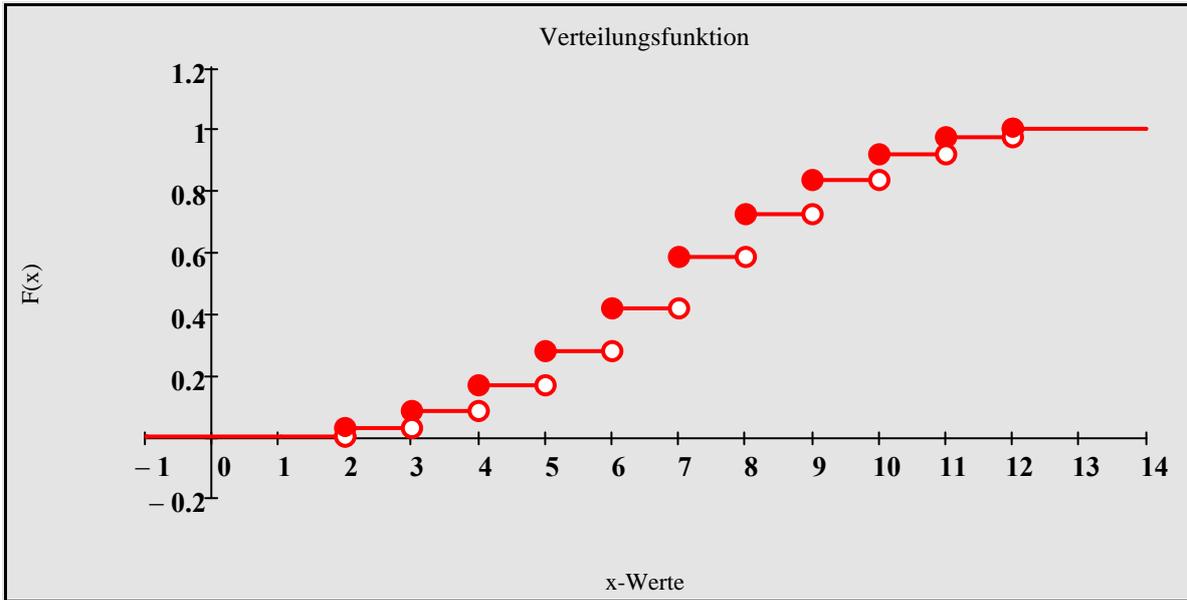
**Teilaufgabe b)**

**Verteilungsfunktion tabellarisch:**

**VW =**

"x"	"F(x)"
"[ -∞ ; 2 [ "	<b>0</b>
" [ 2 ; 3 [ "	<b>0.028</b>
" [ 3 ; 4 [ "	<b>0.083</b>
" [ 4 ; 5 [ "	<b>0.167</b>
" [ 5 ; 6 [ "	<b>0.278</b>
" [ 6 ; 7 [ "	<b>0.417</b>
" [ 7 ; 8 [ "	<b>0.583</b>
" [ 8 ; 9 [ "	<b>0.722</b>
" [ 9 ; 10 [ "	<b>0.833</b>
" [ 10 ; 11 [ "	<b>0.917</b>
" [ 11 ; 12 [ "	<b>0.972</b>
" [ 12 ; +∞ [ "	<b>1</b>

**Verteilungsfunktion graphisch:**



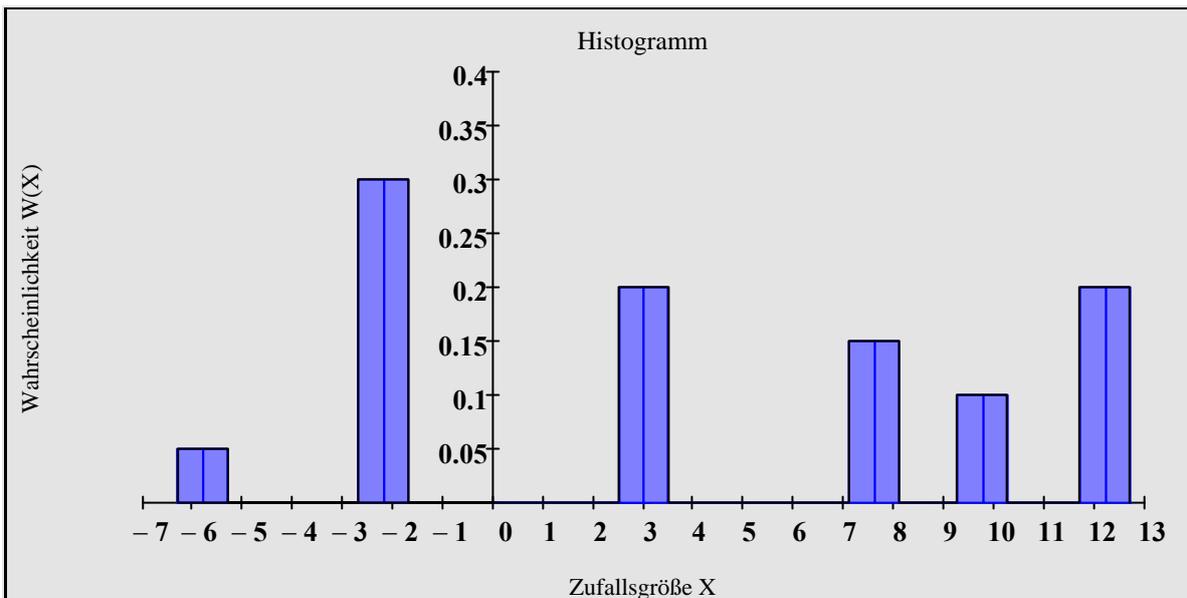
**Aufgabe 2**

Gegeben sind beliebige Zufallsgrößen  $X := (-5.8 \ -2.2 \ 3 \ 7.6 \ 9.75 \ 12.2)^T$  und eine zugehörige beliebige Wahrscheinlichkeitsverteilung

$W := (0.05 \ 0.30 \ 0.2 \ 0.15 \ 0.1 \ 0.20)^T$ .

- a) Stellen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung  $W(X)$  als Histogramm dar.
- b) Stellen Sie die Verteilungsfunktion  $F(x)$  tabellarisch und graphisch dar.

**Teilaufgabe a)**



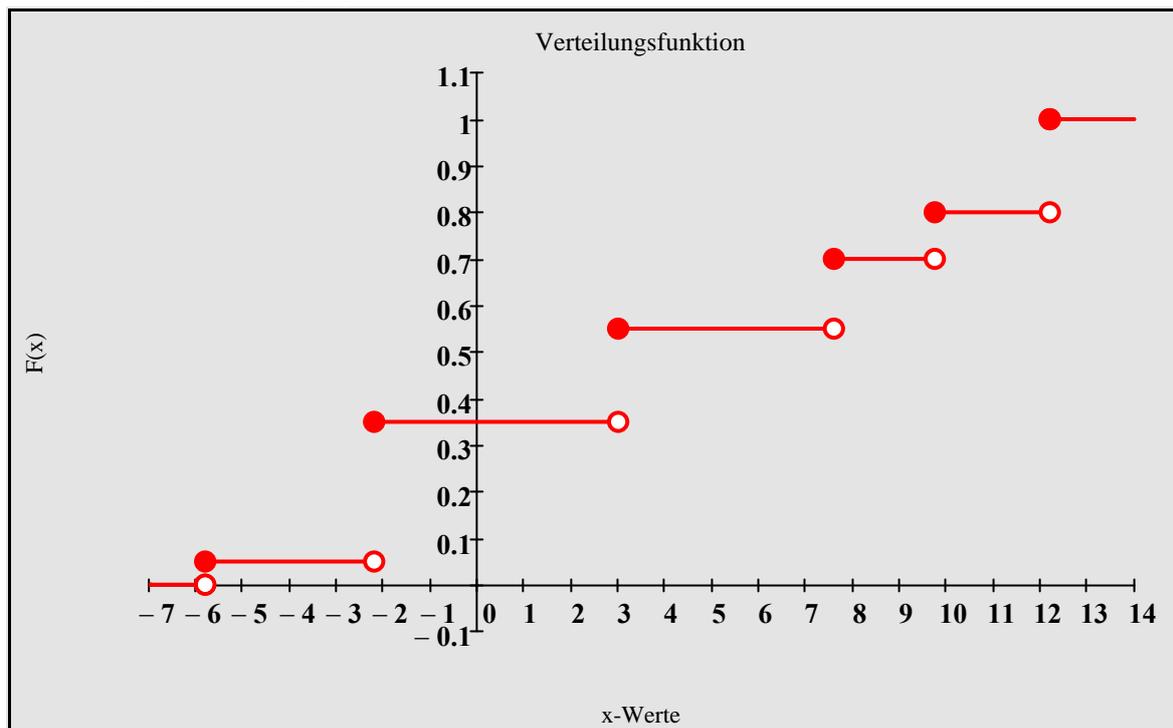
### Teilaufgabe b)

Verteilungsfunktion tabellarisch:

V =

"x"	"F(x)"
" ] -∞ ; -5.8 [ "	0
" [ -5.8 ; -2.2 [ "	0.05
" [ -2.2 ; 3 [ "	0.35
" [ 3 ; 7.6 [ "	0.55
" [ 7.6 ; 9.75 [ "	0.7
" [ 9.75 ; 12.2 [ "	0.8
" [ 12.2 ; +∞ [ "	1

Verteilungsfunktion graphisch:



## Verteilungen

### - Normalverteilung (Gauß'sche Glockenkurve und Integralfunktion) -

#### Theorie

Gegeben ist ein Bernoulli-Experiment der Länge  $n$  mit der Trefferwahrscheinlichkeit  $p$ . Dann ist die Wahrscheinlichkeit  $B(n, p, k)$  für  $k$  Treffer gegeben durch die Binomialverteilung

$$B(n, p, k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k} \quad \text{mit } k \in \{0, 1, \dots, n\}.$$

Diese *diskrete* Wahrscheinlichkeitsverteilung (Histogramm) kann durch eine Kurve  $\varphi$  (*Gauß'sche Glockenkurve*), die sogenannte *Normalverteilung*, approximiert werden:

$$\varphi_{\mu\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \quad \text{mit } x \in \mathbb{R},$$

wobei  $\mu$  der Erwartungswert und  $\sigma$  die Standardabweichung der binomialverteilten Zufallsgröße  $X = k$  sind.

Die *kumulative Verteilungsfunktion* kann als Fläche unter dem Graphen der Normalverteilung berechnet werden.

Die zugehörige Integralfunktion wird als *Gauß'sche Integralkurve* (vgl. Datei 1.4.03) bezeichnet.

$$\Phi_{\mu\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \int_{-\infty}^x e^{-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\xi-\mu}{\sigma}\right)^2} d\xi$$

a

Folgende Formeln sind aus dem Bronstein entnommen:

Erwartungswert: 
$$\mu = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot \varphi_{\mu\sigma}(x) dx$$

Varianz: 
$$\text{Var} = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 \cdot \varphi_{\mu\sigma}(x) dx$$

Standardabweichung: 
$$\sigma = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 \cdot \varphi_{\mu\sigma}(x) dx}$$

Mathcad-Definition für die Normalverteilung:  $\varphi_{\mu\sigma}(x) = \text{dnorm}(x, \mu, \sigma)$

Mathcad-Definition für die kumulative Verteilungsfunktion:  $\Phi_{\mu\sigma}(x) = \text{pnorm}(x, \mu, \sigma)$



### Carl Friedrich Gauß

(30.4.1777 bis 23.2.1855) Deutscher Mathematiker, Physiker und Astronom.

Er gilt als einer der größten Mathematiker aller Zeiten, der schon zu Lebzeiten als *Princeps mathematicorum* und von seinem Zeitgenossen Laplace als *größter Mathematiker Europas* bezeichnet wurde. Von großer Bedeutung für die Fehlerrechnung ist das von ihm angegebene Fehlerverteilungsgesetz.

### Aufgabe 1

Gegeben ist die Binomialverteilung  $B(n, p, k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k}$  mit  $k \in \{0, 1, \dots, n\}$

sowie  $n := 20$  und  $p := \frac{1}{2}$ .

- Berechnen Sie Erwartungswert  $\mu$  und die Standardabweichung  $\sigma$  und stellen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung als Histogramm und als Glockenkurve dar.
- Stellen Sie die kumulative Verteilungsfunktion als Treppenfunktion und als Gauß'sche Integralkurve dar.
- Vergleichen Sie die Darstellungen.

Gegeben:  $n = 20$   $p = 0.5$

#### Teilaufgabe a)

Binomialverteilung:  $B(k) := \text{dbinom}(k, n, p)$

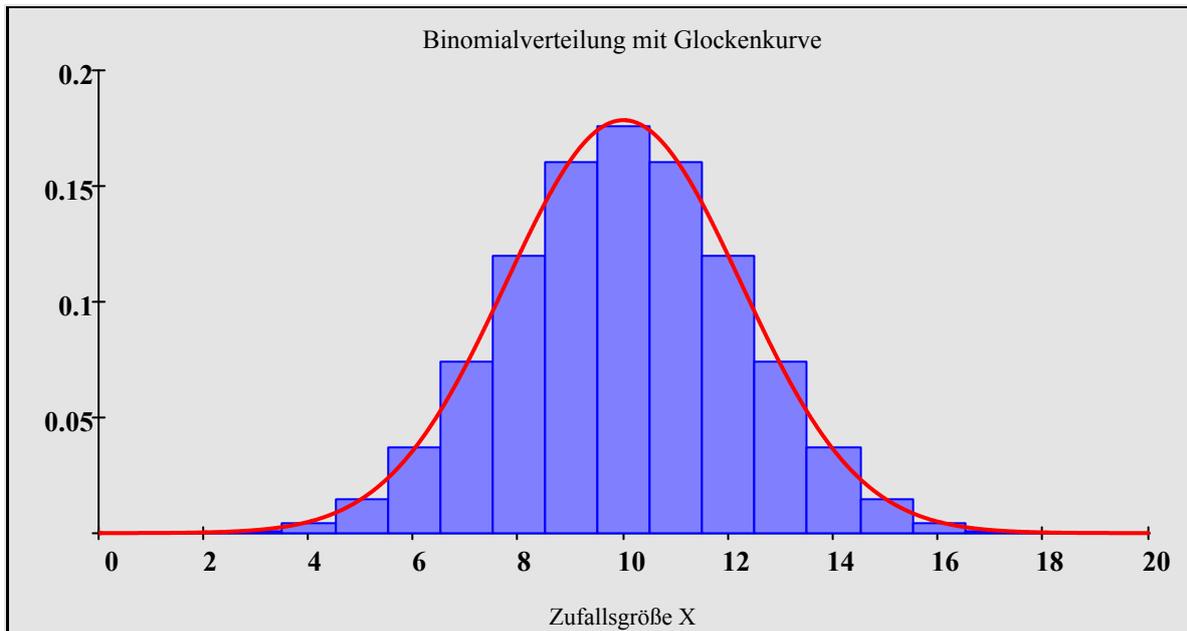
Kumulative Verteilungsfunktion:  $F(k) := \text{pbinom}(k, n, p)$

Erwartungswert:  $\mu := n \cdot p$   $\mu = 10$

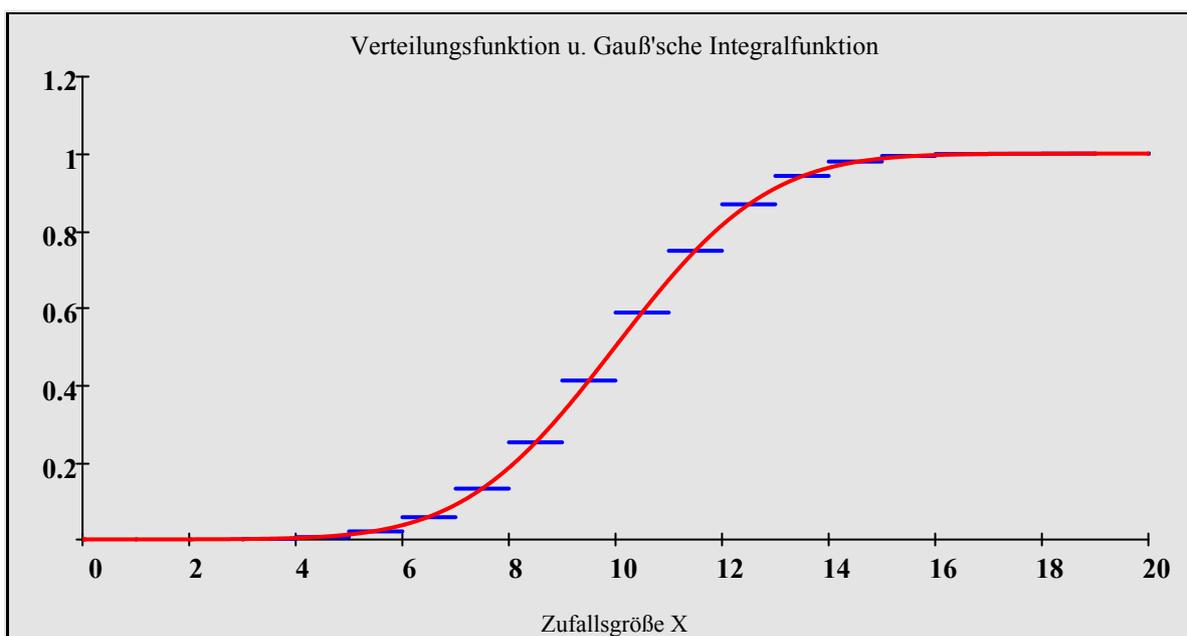
Standardabweichung:  $\sigma := \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)}$      $\sigma = \sqrt{5} = 2.236$

Näherungsfunktion:  $\varphi_{\mu\sigma}(x) := \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$

Gauß'sche Integralfunktion:  $\Phi_{\mu\sigma}(x) := \int_{-\infty}^x \varphi_{\mu\sigma}(t) dt$



**Teilaufgabe b)**



### Teilaufgabe c)

Bei der Binomialverteilung können die Merkmalswerte  $k$  nur ganzzahlig sein, und die Funktionswerte  $B(n,p,k)$  wachsen treppenförmig.

Bei der Normalverteilung sind beliebige Werte  $x$  aus einem reellen Zahlenintervall für die Merkmalswerte möglich.

### Aufgabe 2

Gegeben ist die Binomialverteilung  $B(n, p, k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k}$  mit  $k \in \{0, 1, \dots, n\}$

und  $p := 0.6$  und variablem  $n$ .

- Bestimmen Sie den Erwartungswert  $\mu$  und die Standardabweichung  $\sigma$  bzgl. der Binomialverteilung.
- Stellen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung als Histogramm und als Glockenkurve sowie die kumulative Verteilungsfunktion der Binomialverteilung und die Integralkurve in Abhängigkeit vom Parameter  $n$  dar.
- Untersuchen Sie die Veränderungen des Histogramms und der Treppenfunktion beim Variieren von  $n$ .

### Teilaufgabe a)

$20 \leq n \leq 80$



Wahrscheinlichkeit  $p$ :  $p = 0.6$

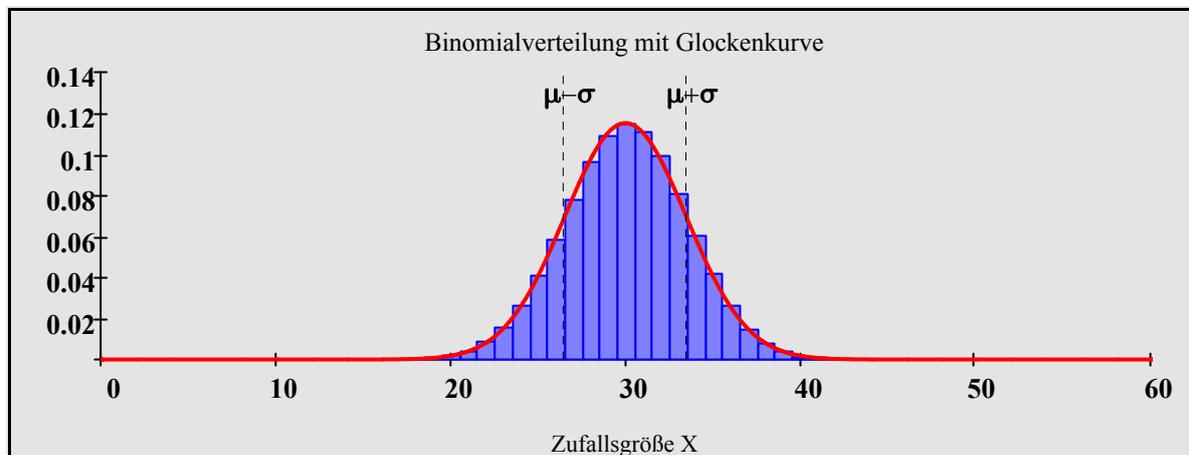
Binomialverteilung:  $B(k) := \text{dbinom}(k, n, p)$   $n = 50$

Erwartungswert:  $\mu := n \cdot p$   $\mu = 30$

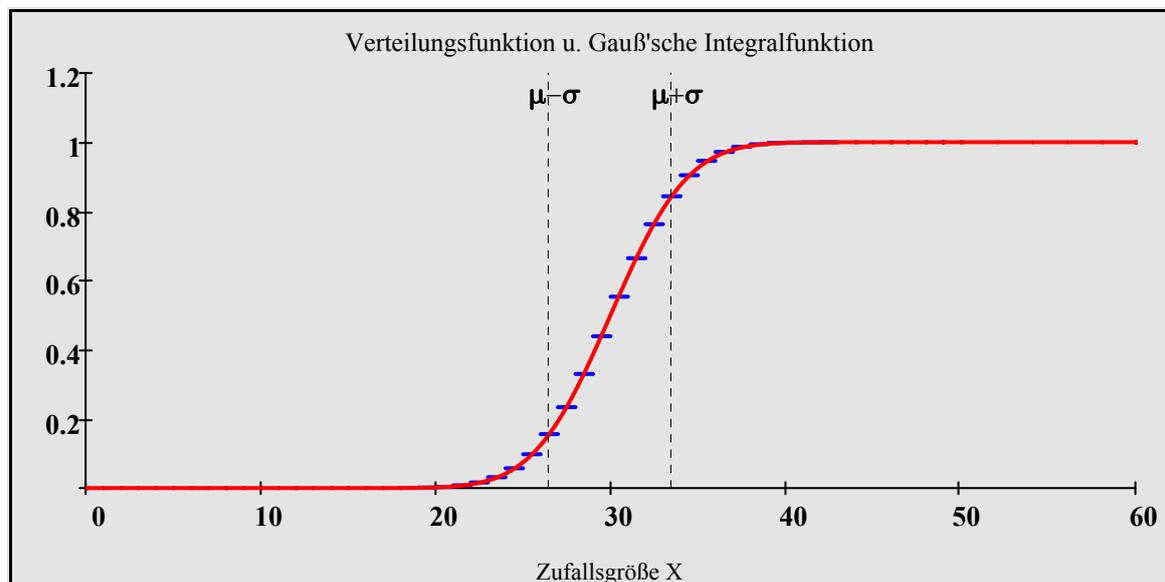
Standardabweichung:  $\sigma := \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)}$   $\sigma = 3.464$

### Teilaufgabe b)

Glockenkurve:  $\varphi_{\mu\sigma}(x) := \text{dnorm}(x, \mu, \sigma)$



Kumulative Verteilungsfunktion:  $\Phi_{\mu\sigma}(x) := \text{pnorm}(x, \mu, \sigma)$



### Teilaufgabe c)

#### Histogramm

Bei wachsendem  $n$  ergibt sich:

1. Der Erwartungswert und die Standardabweichung wachsen.
2. Die Histogramme verschieben sich nach rechts und ihre Breite nimmt zu.
3. Der Maximalwert der Histogramme nimmt ab.

Diese Veränderungen behindern eine Aussage für den Fall  $n \rightarrow \infty$ .

#### Treppenfunktion

Bei wachsendem  $n$  ergibt sich:

1. Die  $\Phi$ -Kurve verläuft ziemlich genau durch die Mitten der Treppelinien.
2. Mit wachsendem  $n$  verfeinern sich die  $\Phi_n$ -Kurven immer mehr zur  $\Phi$ -Kurve.

### Aufgabe 3

Gegeben ist die Normalverteilung  $\varphi(x) := \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$  mit  $x \in \mathbf{IR}$

- a) Bestimmen Sie allgemein die Koordinaten der Wendepunkte.
- b) Zeichnen Sie für  $\mu := 12$  und  $\sigma := 2$  die Glockenkurve mit den Wendepunkten im Bereich  $0 \leq x \leq \mu + 6 \cdot \sigma$ .
- c) Zeichnen Sie die Gauß'sche Integralfunktion  $\Phi(x)$  im Bereich  $0 \leq x \leq \mu + 6 \cdot \sigma$ .

**Teilaufgabe a)**

Funktion: 
$$\varphi(x) := \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

2. Ableitung: 
$$\varphi''(x) := \frac{d^2}{dx^2} \varphi(x) \rightarrow \frac{\sqrt{2} \cdot e^{-\frac{(\mu-x)^2}{2 \cdot \sigma^2}} \cdot (\mu^2 - 2 \cdot \mu \cdot x - \sigma^2 + x^2)}{2 \cdot \sqrt{\pi} \cdot \sigma^5}$$

Bedingung für Wendepunkte:  $\varphi''(x) = 0$

$x_W := \varphi''(x) = 0$  auflösen,  $x \rightarrow \begin{pmatrix} \mu + \sigma \\ \mu - \sigma \end{pmatrix}$

Nullstellen der 2. Ableitung mit Vorzeichenwechsel  $\Rightarrow$  Wendepunkte:

Bestimmung der Funktionswerte:  $y_W := \overrightarrow{\varphi(x_W)}$   $y_W = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2} \cdot e^{-\frac{1}{2}}}{2 \cdot \sqrt{\pi} \cdot \sigma} \\ \frac{\sqrt{2} \cdot e^{-\frac{1}{2}}}{2 \cdot \sqrt{\pi} \cdot \sigma} \end{pmatrix}$

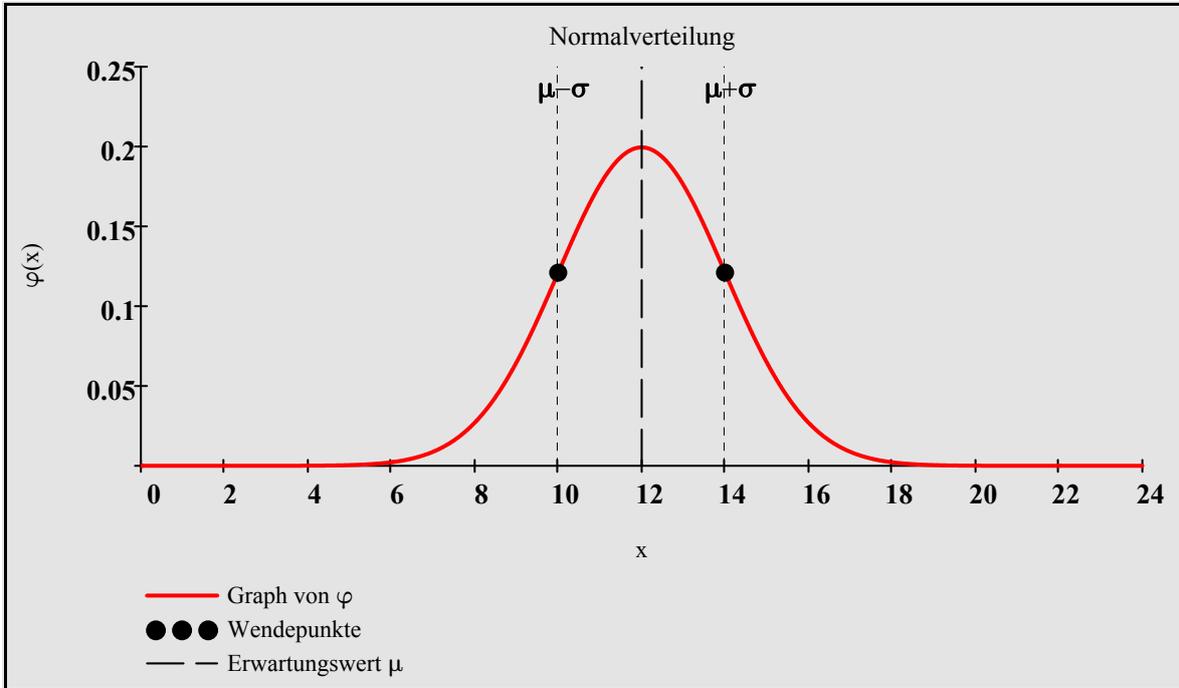
Koordinaten der Wendepunkte:

$W_1 \rightarrow \begin{pmatrix} \mu - \sigma \\ \frac{\sqrt{2} \cdot e^{-\frac{1}{2}}}{2 \cdot \sqrt{\pi} \cdot \sigma} \end{pmatrix}$   $W_2 \rightarrow \begin{pmatrix} \mu + \sigma \\ \frac{\sqrt{2} \cdot e^{-\frac{1}{2}}}{2 \cdot \sqrt{\pi} \cdot \sigma} \end{pmatrix}$

### Teilaufgabe b)

Normalverteilung:  $\varphi(x) := \text{dnorm}(x, \mu, \sigma)$

Konkrete Wendepunkte:  $W_1 = (10 \ 0.121)$   $W_2 = (14 \ 0.121)$



### Teilaufgabe c)

Kumulative Verteilungsfunktion:  $\Phi(x) := \text{pnorm}(x, \mu, \sigma)$

