Abschlussprüfung Berufliche Oberschule 2009
Mathematik 12 Nichttechnik - A I - Lösung

Teilaufgabe 1 (5 BE)

Von der ganzrationalen Funktion **f(x)** dritten Grades ist die zweite Ableitung $f''(x) = \frac{3}{2} \cdot x - \frac{9}{2}$ gegeben.

Der Graph G_f schneidet die x-Achse an der Stelle $x_1 = -1$ und die y-Achse im Punkt $P(0 / \frac{5}{4})$.

Bestimmen Sie den Funktionsterm **f(x)**.

$f''(x) := \frac{3}{2} \cdot x - \frac{9}{2}$ $\qquad$ $f'(x) = \frac{3}{4} \cdot x^2 - \frac{9}{2} \cdot x + c$ $\qquad$ $f(x, c, d) := \frac{1}{4} \cdot x^3 - \frac{9}{4} \cdot x^2 + c \cdot x + d$

$f(-1, c, d) = 0 \rightarrow d - c - \frac{5}{2} = 0 \qquad (1)$

$f(0, c, d) = \frac{5}{4} \rightarrow d = \frac{5}{4} \qquad (2)$

(2) in (1) $\qquad c := \frac{5}{4} - \frac{5}{2} \rightarrow -\frac{5}{4} \qquad \Rightarrow \qquad f(x) := f\left(x, -\frac{5}{4}, \frac{5}{4}\right)$

Gesuchter Funktionsterm: $\qquad \boxed{f(x) = \frac{x^3}{4} - \frac{9 \cdot x^2}{4} - \frac{5 \cdot x}{4} + \frac{5}{4}}$

Teilaufgabe 2.0

Gegeben sind die Funktionen $g_a(x) = \frac{1}{4} \cdot (x + 1) \cdot \left(x^2 - 10 \cdot x + a\right)$ mit $ID_{g_a} = IR$ und $a \in IR$ und $a > 0$.

Teilaufgabe 2.1 (3 BE)

Zeigen Sie, dass sich $g_a(x)$ auch in der Form $g_a(x) = \frac{1}{4} \cdot \left(x^3 - 9 \cdot x^2 + a \cdot x - 10 \cdot x + a\right)$ darstellen lässt und dass für $a = 5$ gilt: $g_5(x) = f(x)$ mit der Funktion **f** aus Teilaufgabe 1.

Ausmultiplizieren: $\qquad g(x, a) = \frac{1}{4} \cdot \left(x^3 - 10 \cdot x^2 + a \cdot x + x^2 - 10 \cdot x + a\right)$

Zusammenfassen : $\qquad g(x, a) := \frac{1}{4} \cdot \left(x^3 - 9 \cdot x^2 + a \cdot x - 10 \cdot x + a\right)$

Einsetzen: $\quad g(x, 5) \rightarrow \frac{x^3}{4} - \frac{9 \cdot x^2}{4} - \frac{5 \cdot x}{4} + \frac{5}{4}$ $\qquad$ vergleiche: $\quad f(x) \rightarrow \frac{x^3}{4} - \frac{9 \cdot x^2}{4} - \frac{5 \cdot x}{4} + \frac{5}{4}$

Teilaufgabe 2.2 (6 BE)
Berechnen Sie, für welche Werte von **a** der Graph der Funktion g_a keinen Extrempunkt besitzt.

1. Ableitung: $g'(x,a) := \frac{d}{dx}g(x,a) = \frac{3 \cdot x^2}{4} - \frac{9 \cdot x}{2} + \frac{a}{4} - \frac{5}{2} = \frac{3 \cdot x^2 - 18 \cdot x + a - 10}{4}$

Horizontale Tangenten: $3 \cdot x^2 - 18 \cdot x + a - 10 = 0$

Diskriminante: $D(a) := \sqrt{18^2 - 4 \cdot 3 \cdot (a - 10)} \quad \Leftrightarrow \quad D(a) := \sqrt{444 - 12 \cdot a}$

keine Extrempunkte: $444 - 12 \cdot a \le 0$ auflösen, $a \rightarrow 37 \le a$

Für die folgenden Teilaufgaben ist $a = 25$ mit $g_{25}(x) := \frac{1}{4} \cdot \left(x^3 - 9 \cdot x^2 + 15 \cdot x + 25\right)$.

Teilaufgabe 2.3 (3 BE)
Bestimmen Sie die Nullstellen der Funktion g_{25}.

Nullstellen: $x^3 - 9 \cdot x^2 + 15 \cdot x + 25 = 0$

Rate Lösung: $g_{25}(-1) = 0 \qquad x_1 := -1$

Polynomdivision: $\frac{x^3 - 9 \cdot x^2 + 15 \cdot x + 25}{x + 1}$ in Partialbrüche zerlegt, ergibt $x^2 - 10 \cdot x + 25$

weitere Nullstellen: $x^2 - 10 \cdot x + 25 = 0$ auflösen, $x \rightarrow \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad x_{23} := 5$

Teilaufgabe 2.4 (6 BE)
Ermitteln Sie Art und Koordinaten sämtlicher Extrempunkte des Graphen der Funktion g_{25}.

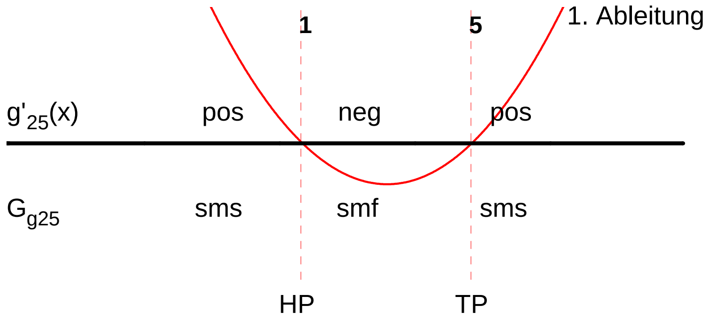
$g'_{25}(x) := \frac{d}{dx}g_{25}(x) \rightarrow \frac{3 \cdot x^2}{4} - \frac{9 \cdot x}{2} + \frac{15}{4}$

Horizontale Tangenten: $\left(\frac{3 \cdot x^2}{4} - \frac{9 \cdot x}{2} + \frac{15}{4}\right) \cdot \frac{4}{3} = 0 \rightarrow x^2 - 6 \cdot x + 5 = 0$

$$x_E := x^2 - 6 \cdot x + 5 = 0 \text{ auflösen}, x \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Abrufen der Lösungen: $x_{E1} = 1$ $x_{E2} = 5$

Nachweis der Art über Monotonie:



$g_{25}(1) = 8$

HP(1, 8)

$g_{25}(5) = 0$

TP(5, 0)

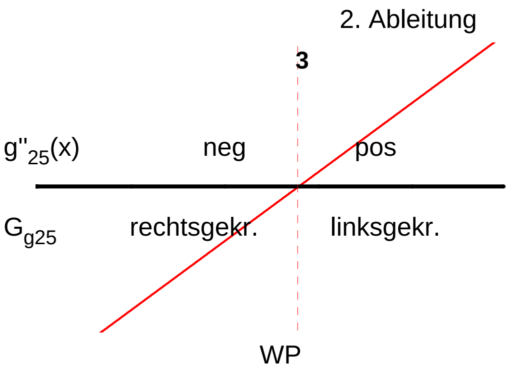
Teilaufgabe 2.5 (4 BE)
Bestimmen Sie die maximalen Intervalle, in denen der Graph der Funktion g_{25} rechts- bzw. links-gekrümmt ist sowie die Koordinaten seines Wendepunktes.

2. Ableitung: $g''_{25}(x) := \frac{d}{dx} g'_{25}(x) \rightarrow \frac{3 \cdot x}{2} - \frac{9}{2}$

Wendepunktsbedingung: $g''_{25}(x) = 0 \rightarrow \frac{3 \cdot x}{2} - \frac{9}{2} = 0$

$$\Leftrightarrow \quad x_W := \left(\frac{3 \cdot x}{2} - \frac{9}{2}\right) \cdot \frac{2}{3} = 0 \rightarrow x - 3 = 0 \text{ auflösen}, x \rightarrow 3$$

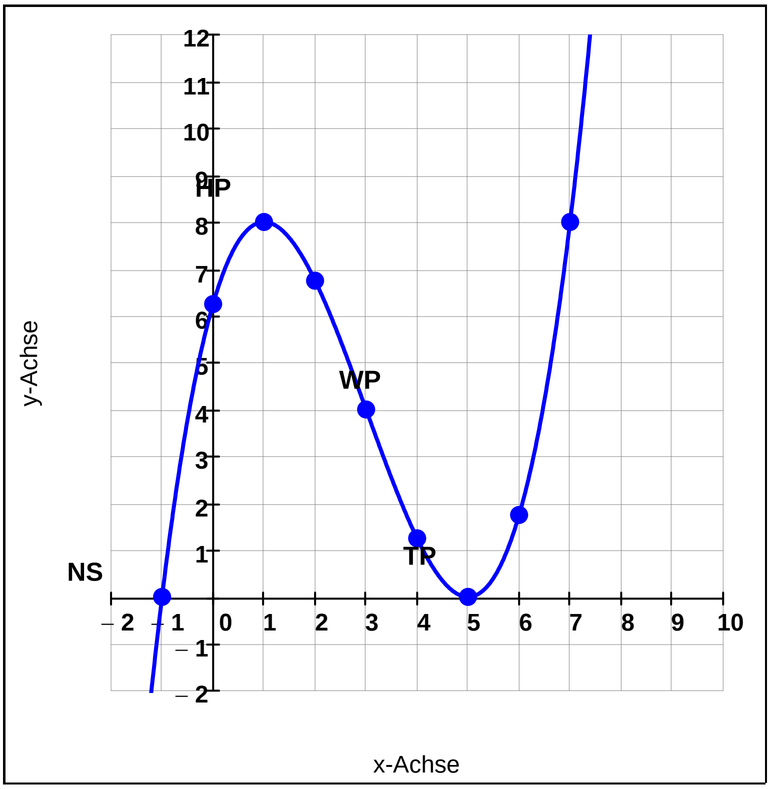
Krümmungsintervalle:



$g_{25}(3) = 4$

WP(3, 4)

Teilaufgabe 2.6 (5 BE)
Zeichnen Sie den Graphen der Funktion g_{25} im Bereich $-1 \le x \le 7$ mit Hilfe vorliegender Ergebnisse und geeigneter Funktionswerte in ein Koordinatensystem.
Maßstab auf beiden Achsen: **1 LE = 1 cm**



$x_0 =$	$g_{25}(x_0) =$
-1	0
0	6.25
1	8
2	6.75
3	4
4	1.25
5	0
6	1.75
7	8

Teilaufgabe 3.0
Gegeben ist weiter die Funktion $p(x) := \frac{1}{4}\cdot(x-5)^2 - (x-5)$ mit $ID_p = IR$.

Teilaufgabe 3.1 (7 BE)
Bestimmen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte der Graphen der Funktionen g_{25} und p.

Funktionsterm der Parabel ausmultipliziert: $p(x) = \frac{1}{4}\cdot\left(x^2 - 10\cdot x + 25 - 4\cdot x + 20\right)$

Zusammengefasst: $p(x) := \frac{1}{4}\cdot\left(x^2 - 14\cdot x + 45\right)$

Gleichsetzen der Funktionsterme: $\frac{1}{4}\cdot\left(x^3 - 9\cdot x^2 + 15\cdot x + 25\right) = \frac{1}{4}\cdot\left(x^2 - 14\cdot x + 45\right)$

$\Leftrightarrow \quad x^3 - 10\cdot x^2 + 29\cdot x - 20 = 0$

Hilfsfunktion: $h(x) := x^3 - 10 \cdot x^2 + 29 \cdot x - 20 \qquad h(1) = 0$

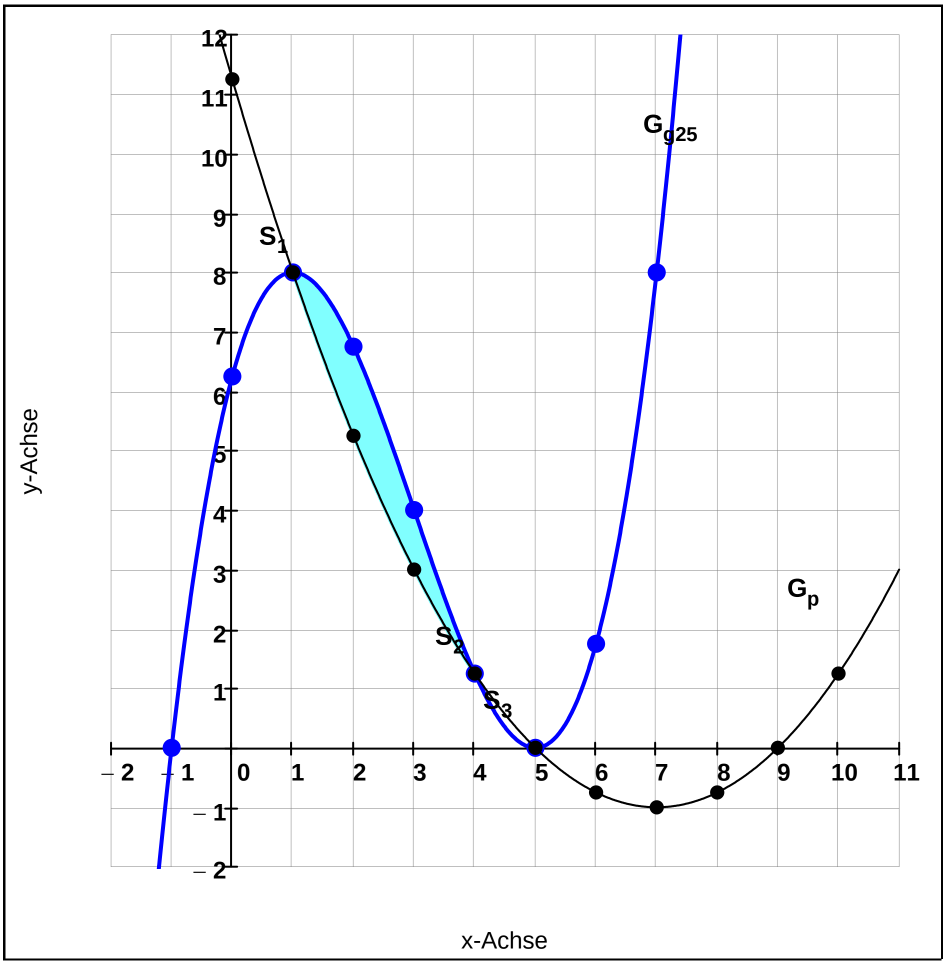
$\Rightarrow$ 1. Schnittpunkt: $x_1 := 1$

Polynoimdivision: $\dfrac{x^3 - 10 \cdot x^2 + 29 \cdot x - 20}{x - 1}$ in Partialbrüche zerlegt, ergibt $x^2 - 9 \cdot x + 20$

$x^2 - 9 \cdot x + 20 = 0$ **auflösen**, $x \rightarrow \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ weitere Schnittpunkte: $x_2 := 4 \qquad x_3 := 5$

$S_1 := (1 \quad 8) \qquad S_2 := (4 \quad 1.25) \qquad S_3 := (5 \quad 0)$

Teilaufgabe 3.2 (3 BE)
Zeichnen Sie den Graphen der Funktion p im Bereich $0 \le x \le 10$ in das vorhandene Koordinatensystem ein.



Parabel:

$x_p =$	$p(x_p) =$
0	11.25
1	8
2	5.25
3	3
4	1.25
5	0
6	-0.75
7	-1
8	-0.75
9	0
10	1.25

Teilaufgabe 3.3 (5 BE)
Die Graphen der Funktionen g_{25} und **p** schließen zwei endliche Flächenstücke ein. Berechnen Sie die Flächenmaßzahl des weiter links liegenden Flächenstücks.

Stammfunktion: $G(x) := \int \frac{1}{4} \cdot \left(x^3 - 10 \cdot x^2 + 29 \cdot x - 20\right) dx$

$$G(x) = \frac{x^4}{16} - \frac{5 \cdot x^3}{6} + \frac{29 \cdot x^2}{8} - 5 \cdot x$$

Fläche: $A := \int_1^4 \frac{1}{4} \cdot \left(x^3 - 10 \cdot x^2 + 29 \cdot x - 20\right) dx$ $\quad A = \frac{45}{16} = 2.813$

Teilaufgabe 4 (4 BE)
Gegeben ist nun die Funktion

$$h(x) = \begin{cases} g_{25}(x) & \text{if } x \le 5 \\ p(x) & \text{if } x > 5 \end{cases}$$

Die Funktion **h** ist stetig bei $x_0 = 5$ (Nachweis nicht erforderlich).

Untersuchen Sie, ob **h** an der Stelle $x_0 = 5$ differenzierbar ist.

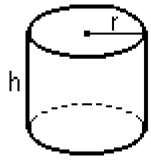
$$h'(x) := \begin{cases} \left(\frac{3}{4} \cdot x^2 - \frac{9}{2} \cdot x + \frac{15}{4}\right) & \text{if } x < 5 \\ \left(\frac{1}{2} \cdot x - \frac{7}{2}\right) & \text{if } x > 5 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 5^-} \left(\frac{3}{4} \cdot x^2 - \frac{9}{2} \cdot x + \frac{15}{4}\right) \to 0$$

$\Rightarrow$ nicht differenzierbar an $x_0 = 5$

$$\lim_{x \to 5^+} \left(\frac{1}{2} \cdot x - \frac{7}{2}\right) \to -1$$

Teilaufgabe 5.0
Eine zylinderförmige Trommel (siehe Skizze) besitzt die Gesamtoberfläche $2400 \cdot \pi \cdot cm^2$. Der Klang der Trommel hängt auch von der Oberfläche und dem Volumen ab. die Boden- und Deckfläche der Trommel sind mit Fell bespannt. Durch die erhältlichen Fellgrößen ergibt sich, dass ein Radius **r** von **12 cm** bis **30 cm** möglich ist.
Führen Sie folgende Rechnungen ohne Einheiten durch.



Teilaufgabe 5.1 (4 BE)
Stellen Sie eine Gleichung für das Volumen **V(r)** der Trommel in Abhängigkeit von **r** auf.
[Ergebnis: $V(r) = \pi \cdot \left(1200 \cdot r - r^3\right)$

Zielfunktion: $V(r, h) := r^2 \cdot \pi \cdot h$

Oberfläche: $O(r, h) = 2 \cdot r \cdot \pi \cdot h + 2 \cdot r^2 \cdot \pi$

Nebenbedingung: $2 \cdot r \cdot \pi \cdot h + 2 \cdot r^2 \cdot \pi = 2400 \cdot \pi$

Auflösen: $h = \frac{1}{2 \cdot r \cdot \pi} \cdot \left(2400 \cdot \pi - 2 \cdot r^2 \cdot \pi\right) = \frac{1200}{r} - r$

Einsetzen: $V(r) := r^2 \cdot \pi \cdot \left(\frac{1200}{r} - r\right)$

$r^2 \cdot \pi \cdot \left(\frac{1200}{r} - r\right)$ erweitert auf $1200 \cdot \pi \cdot r - \pi \cdot r^3$

$V(r) := 1200 \cdot \pi \cdot r - \pi \cdot r^3$

Definitionsmenge: $r \in [\, 12 \,;\, 30 \,]$

Teilaufgabe 5.2 (5 BE)
Berechnen Sie r so, dass das Volimen der Trommel den größten Wert (und damit die Trommel den tiefsten Ton) annimmt.

Ableitung: $V'(r) := \frac{d}{dr} V(r) \rightarrow 1200 \cdot \pi - 3 \cdot \pi \cdot r^2$

Horizontale Tangenten: $V'(r) = 0 \rightarrow 1200 \cdot \pi - 3 \cdot \pi \cdot r^2 = 0$ **auflösen**, $r \rightarrow \begin{pmatrix} 20 \\ -20 \end{pmatrix}$ $\notin \mathbb{D}$

Funktionswert: $V(20) = 50265$

Randwerte: $V(12) = 39810$ $V(30) = 28274$

$\Rightarrow$ **absolutes Maximum (20 / 50 265)**