Abschlussprüfung Berufliche Oberschule 2009
Mathematik 12 Nichttechnik - S I - Lösung

Teilaufgabe 1.0
Für eine statistische Untersuchung wurden in einer KFZ-Zulassungsstelle einer großen Stadt in einem bestimmten Zeitraum Aufzeichnungen über die Anzahl der Neuzulassungen von PKW mit Diesel (**D**)- bzw. Benzin (**B**)-Motor geführt. Weiterhin wurden drei Fahrzeugklassen erfasst: Kleinwagen (**K**), Mittelklassewagen (**M**) und Oberklassewagen (**O**). Von den Kleinwagen haten **20%** und von der Mittelklasse **50%** einen Dieselmotor. Von den insgesamt **80 000** erfassten PKW in dieser Untersuchung waren **45%** mit einem Dieselmotor ausgerüstet, **16 000** waren Kleinwagen und **8 000** PKW der Oberklasse.
Die Bestimmung der Fahrzeugklasse sowie der Motorart eines zufällig herausgegriffenen PKWs dieser Untersuchung wird als Zufallsexperiment aufgefasst. Die relativen Häufigkeiten werden als Wahrscheinlichkeit interpretiert.

Teilaufgabe 1.1 (6 BE)
Bestimmen Sie z. B. mit Hilfe eines Baumdiagramms die Wahrscheinlichkeiten aller sechs Elementarereignisse dieses Zufallsexperiments.
[Teilergebnis: **P({OD}) = 0,06**]

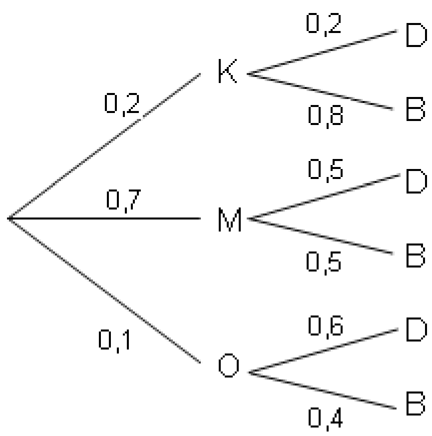
Berechnungen:

$P_K := \frac{16000}{80000}$ $\qquad P_K = 0.2$

$P_M := 1 - (0.1 + 0.2)$ $\qquad P_M = 0.7$

$P_D := \frac{8000}{80000}$ $\qquad P_D = 0.1$

$P_{OD} := 0.45 - (0.04 + 0.35)$ $\qquad P_{OD} = 0.06$



$\{\omega_i\}$	$P(\{\omega_i\})$	
KD	0,04	
KB	0,16	
MD	0,35	
MB	0,35	
OD	0.06	Zwischenergebnis
OB	0,04	

Teilaufgabe 1.2 (4 BE)
Betrachtet werden nun folgende Ereignisse:
E_1 : *Ein zufällig ausgewähltes Fahrzeug ist kein Mittelklassewagen.*

E_2: *Ein zufällig ausgewähltes Fahrzeug besitzt einen Dieselmotor.*

Geben Sie beide Ereignisse in der aufzählenden Mengenschreibweise an und untersuchen Sie E_1 und E_2 auf stochastische Unabhängigkeit.

$E_1 = \{ KD ; KB ; OD ; OB \}$ $\quad P_{E1} := 0.04 + 0.16 + 0.06 + 0.04 \quad P_{E1} = 0.30$

$E_2 = \{ KD ; MD ; OD \}$ $\quad P_{E2} := 0.04 + 0.35 + 0.06 \quad P_{E2} = 0.45$

$E_1 \cap E_2 = \{ KD ; OD \}$ $\quad P_{E1 \cap E2} := 0.04 + 0.06 \quad P_{E1 \cap E2} = 0.10$

$P_{E1} \cdot P_{E2} = 0.135$ ungleich $P_{E1 \cap E2} = 0.10$

$\Rightarrow$ Ereignisse E_1 und E_2 sind stochastisch abhängig.

Teilaufgabe 2.0
An einer Tankstelle werden die Fahrzeuge in der Reihenfolge ihres Eintreffens bezüglich der Motorart registiert. Untersuchungen zeigen, dass die Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen eines Dieselfahrzeugs **0,45** und für das Eintreffen eines Benzinfahrzeugs **0,55** beträgt.

Teilaufgabe 2.1 (3 BE)
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse auf vier Nachkommastellen:
E_3 : *von 12 Fahrzeugen sind genau die ersten 6 Dieselfahrzeuge.*

E_4: *Unter 12 Fahrzeugen sind genau 5 Benzinfahrzeuge.*

Gegeben: $n := 12 \quad p_D := 0.45 \quad p_B := 0.55$

$P_{E3} := 0.45^6 \cdot 0.55^6 \quad P_{E3} = 2.299 \cdot 10^{-4}$ gerundet: $P_{E3} = 0.0002$

Nebenrechnung:

$W(k) := \text{dbinom}(k, 12, 0.55) \quad P_{E4} := W(5) \quad P_{E4} = 0.149$

Teilaufgabe 2.2 (3 BE)
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich unter 20 Fahrzeugen mehr als 5 aber weniger als 15 Dieselfahrzeuge befinden.

$$P(E) = P(5 < x < 15) = P(6 \le X \le 14) = F(14) - F(5) = \sum_{i=0}^{12} B(12, 0.45, i) - \sum_{i=0}^{5} B(12, 0.45, i)$$

Nebenrechnung: $F(k) := \text{pbinom}(k, 20, 0.45) \quad F(14) = 0.99357 \quad F(5) = 0.05533$

$\Rightarrow \quad P_E := F(14) - F(5) \quad P_E = 0.938$

Teilaufgabe 2.3 **(4 BE)**
Die Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen eines Dieselfahrzeugs an der Tankstelle sei nun **p**.
Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass von 2 nacheinander eintreffenden Fahrzeugen genau eines einen Dieselmotor besitzt, beträgt 0,18.
Berechnen Sie p (2 Lösungen!).

Ansatz : $\binom{2}{1} \cdot p \cdot (1-p) = 0{,}18 \quad \Rightarrow \quad 2 \cdot \left(p - p^2\right) = 0.18$

$\Leftrightarrow \quad p^2 - p + 0.09 = 0 \text{ auflösen}, p \rightarrow \begin{pmatrix} 0.1 \\ 0.9 \end{pmatrix} \qquad p_1 = 0.1 \qquad p_2 = 0.9$

Teilaufgabe 3.0
In einer Zulassungsstelle werden Fahrzeuge in fünf Leistungsklassen erfasst. Die Zufallsgröße X gibt die Leistungsklasse eines zufällig ausgewählten Fahrzeugs an. Mit den Parametern **a, b** $\in$ **IR** ergibt sich folgende Wahrscheinlichkeitsverteilung:

"x"	1	2	3	4	5
"P(X = x)"	a	b	0.18	0.13	0.14

Teilaufgabe 3.1 **(4 BE)**
Berechnen Sie a und b für den Fall, dass für den Erwartungswert **E(X)** gilt: $E(X) = 2.48$
[Teilergebnis: $a = 0.38$]

Vorgabe

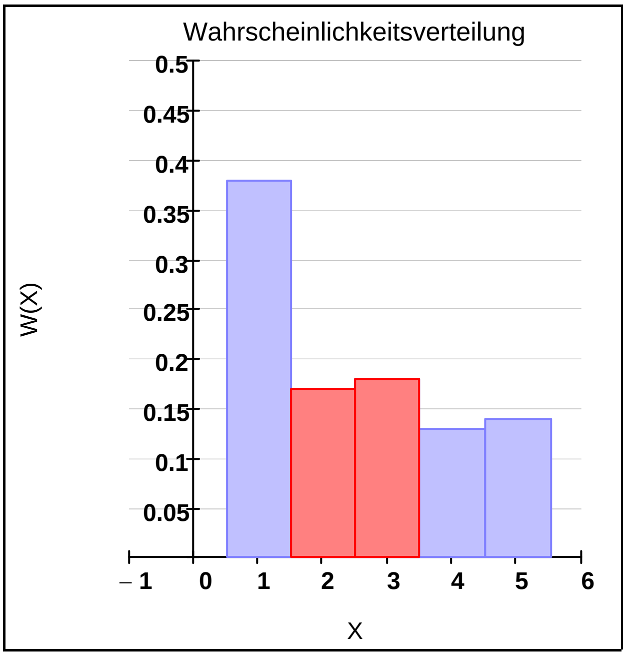
(1) $\quad a + 2 \cdot b + 3 \cdot 0.18 + 4 \cdot 0.13 + 5 \cdot 0.14 = 2.48$

(2) $\quad a + b + 0.18 + 0.13 + 0.14 = 1$

$\text{Lsg} := \text{Suchen}(a, b) \rightarrow \begin{pmatrix} 0.38 \\ 0.17 \end{pmatrix}$

Abrufen der Lösung: $\quad a := \text{Lsg}_1 \qquad a = 0.38 \qquad b := \text{Lsg}_2 \qquad b = 0.17$

Teilaufgabe 3.2 (2 BE)
Zeichnen Sie ein Histogramm der Wahrscheinlichkeitsverteilung.



Teilaufgabe 3.3 (6 BE)
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, mit der die Zufallswerte innerhalb der einfachen Standardabweichung um den Erwartungswert liegen.

$\mathrm{Var}(X) := 0.38\cdot 1 + 0.17\cdot 4 + 0.18\cdot 9 + 0.13\cdot 16 + 0.14\cdot 25 - 2.48^2$ $\qquad \mathrm{Var}(X) = 2.11$

$\sigma := \sqrt{\mathrm{Var}(X)}$ $\qquad \sigma = 1.452$

obere Grenze: $\quad s_o := 2.48 + \sigma \qquad s_o = 3.93$

untere Grenze: $\quad s_u := 2.48 - \sigma \qquad s_u = 1.03$

$P(1.03 < X < 3.93) = P(2 \le X \le 3) = 0.17 + 0.18 = 0.35$

Teilaufgabe 4.0
Jemand vermutet, dass sich der Anteil der silberfarbigen PKW von bisher 50% inzwischen modebedingt erhöht hat (Gegenhypothese). Er möchte dies an Hand von 50 vorbeifahrenden Autos testen.

Teilaufgabe 4.1 (6 BE)
Geben Sie die Testgröße sowie die Nullhypothese an. Berechnen Sie den maximalen Ablehnungsbereich der Nullhypothese auf dem 5%-Niveau. Welche Entscheidung legt der Test nahe, wenn 30 silberfarbige PKW gezählt werden?

Testgröße: **Anzahl der silberfarbenen PKW unter n = 50**

Nullhypothese H_0: $p_0 \leq 0.5$

Gegenhypothese H_1: $p_1 > 0.5$

Annahmebereich: $A = \{ 0; 1; ...; k \}$

Ablehnungsbereich: $\overline{A} = \{ k+1; ...; 50 \}$

Testart: **rechtsseitiger Signifikanztest**

Signifikanzniveau: $\alpha = 0.05$

Ansatz: $\alpha = P(\overline{A}) \leq 0.05 \quad \Leftrightarrow \quad 1 - P(A) \leq 0.05 \quad \Leftrightarrow$

$$P(A) \geq 0.95 \quad \xrightarrow[\text{Tabellenwerk Seite 28}]{\sum_{i=0}^{k} B(50, 0.5, i)} \quad 0.96755 \quad k = 31$$

Ablehnungsbereich: $\overline{A} = \{ 32; ...; 50 \}$

30 gezälte PKWs $\Rightarrow$ H_0 ist richtig, Anteil hat sich also nicht erhöht.

Teilaufgabe 4.2 (2 BE)
Erklären Sie kurz, worin bei diesem Test der Fehler 2. Art bestehen?

Der Anteil der silberfarbenen PKWs hat sich erhöht, man entscheidet sich jedoch gegen diese Vermutung.