Abschlussprüfung Berufliche Oberschule 2009
Mathematik 12 Nichttechnik - S II - Lösung

Beim Glücksspiel **"Roulette"** verwendet man eine drehbare Scheibe mit 36 abwechselnd roten und schwarzen Nummernfächern sowie einem 37. (grünen) Fach für die Null. Die Gewinnzahl wird mit Hilfe einer Kugel ermittelt, die nach Drehung der Scheibe in einem Nummernfach liegen bleibt, wobei alle 37 Zahlen mit gleicher Wahrscheinlichkeit getroffen werden können.
Im Folgenden verstehen wir unter der Faerbe einer Zahl die Farbe des zugehörigen Nummernfaches, es gibt also 1 grüne Zahl sowie 18 schwarze und 18 rote Zahlen.

Eigenes Foto:
ETH Zürich

1 (7 BE)
Berechnen Sie auf 4 Nachkommastellen gerundet die Wahrscheinlichkeiten dafür, dass bei siebenmaligen Werfen der Kugel
a) genau fünfmal eine rote Zahl erscheint.
b) höchstens fünfmal eine rote Zahl erscheint.
c) genau beim ersten, dritten und fünften Wurf eine rote Zahl erscheint.

Gegeben: $n := 7 \quad p := \frac{18}{37} \quad q := \frac{19}{37}$

Teilaufgabe a) $P_1 = P(X = 5) = \binom{7}{5} \cdot \left(\frac{18}{37}\right)^5 \cdot \left(\frac{19}{37}\right)^2 = 0.1509 \quad \Rightarrow \quad \boxed{P_1 = 0.1509}$

Teilaufgabe b) $P_2 = P(X \le 5) = B\left(7, \frac{18}{37}, k \le 5\right) = 1 - \left(B\left(7, \frac{18}{37}, 6\right) + B\left(7, \frac{18}{37}, 7\right)\right)$

Nebenrechnung: $W(k) := \text{dbinom}(k, n, p)$

$W(6) = 0.0477 \qquad W(7) = 0.0064$

$1 - (W(7) + W(6)) = 0.9459 \quad \Rightarrow \quad \boxed{P_2 = 0.9459}$

Teilaufgabe c) $P_3 := \left(\frac{18}{37}\right)^3 \cdot \left(\frac{19}{37}\right)^4$ $\Rightarrow$ $P_3 = 0.0080$

2 (6 BE)
Berechnen Sie ebenfalls auf 4 Nachkommastellen gerundet die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei zweimaligen Werfen der Kugel
a) mindestens einmal eine Zahl aus dem ersten Dutzend, das heißt von 1 bis 12, erscheint.
b) keine Zahl aus dem ersten Dutzend zweimal erscheint.

Gegeben: $P(\text{kein\_Mal}) = p_0 = \frac{25}{37}$ $n = 2$

Teilaufgabe a) $P_4 = P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0)$ $P_4 := 1 - \left(\frac{25}{37}\right)^2$ $P_4 = 0.5435$

Teilaufgabe b)

Gegenereignis $\overline{E}$: "Zweimal die selbe Zahl aus dem 1. Dutzend", also
(1,1) ; **(2,2)** ; **(3,3)** ; **(4,4)** ; **(5,5)** ; **(6,6)** ; **(7,7)** ; **(8,8)** ; **(9,9)** ; **(10,10)** ; **(11,11)** ; **(12,12)**

$P(\overline{E}) = 12 \cdot \left(\frac{1}{37}\right)^2$ $P_5 = P(E) = 1 - P(\overline{E})$ $P_5 := 1 - 12\left(\frac{1}{37}\right)^2$ $P_5 = 0.9912$

3.0
Von den Zahlen des ersten Dutzends sind genau sechs rot und sechs schwarz gefärbt. Folgende Ereignisse werden betrachtet:
E_1: *Eine Zahl aus dem ersten Dutzend erscheint.*
E_2: *Eine rote Zahl erscheint.*

3.1 (6 BE)
Erstellen Sie in Bezug auf E_1 und E_2 eine Vierfeldertafel und begründen Sie rechnerisch, ob die beiden Ereignisse stochastisch unabhängig sind.

Gegeben: $P(E_1) = \frac{12}{37}$ $P(E_2) = \frac{18}{37}$

$$\begin{pmatrix} \cap & E_1 & \overline{E_1} & \blacksquare \\ E_2 & \frac{6}{37} & \blacksquare & \frac{18}{37} \\ \overline{E_2} & \frac{6}{37} & \blacksquare & \blacksquare \\ \blacksquare & \frac{12}{37} & \blacksquare & 1 \end{pmatrix} \quad \text{ergänzt:} \quad \begin{pmatrix} \cap & E_1 & \overline{E_1} & \blacksquare \\ E_2 & \frac{6}{37} & \frac{12}{37} & \frac{18}{37} \\ \overline{E_2} & \frac{6}{37} & \frac{13}{37} & \frac{19}{37} \\ \blacksquare & \frac{12}{37} & \frac{25}{37} & 1 \end{pmatrix}$$

$P(E_1) \cdot P(E_2) = \frac{12}{37} \cdot \frac{18}{37} = 0.1578$

$P(E_1 \cap E_2) = \frac{6}{37} = 0.1622$

$P(E_1) \cdot P(E_2) \neq P(E_1 \cap E_2)$

$\Rightarrow$ E_1 und E_2 sind stoch. abhängig

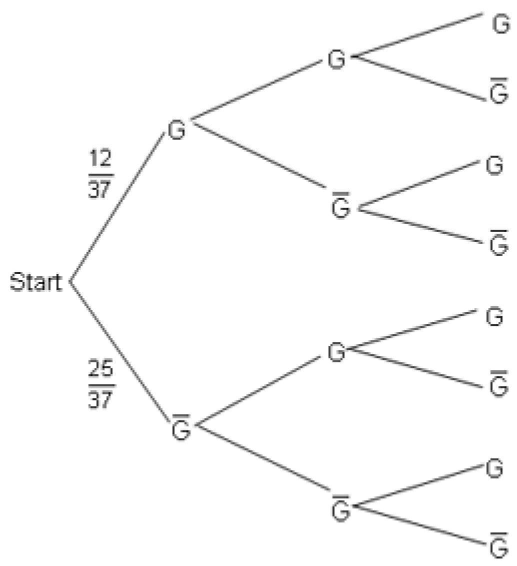
3.2 (2 BE)
Berechnen Sie die folgende Wahrscheinlichkeit: $P(E_1 \cup E_2)$

$$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2) = \frac{12}{37} + \frac{18}{37} - \frac{6}{37} = \frac{24}{37} = 0.6486$$

4.0
Lord Grips setzt immer nur auf das Ereignis "Zahl aus dem ersten Dutzend", das heißt, seine Gewinnwahrscheinlichkeit beträgt bei jedem Spiel $p_G = \frac{12}{37}$. Lord Grips setzt nun dreimal nacheinander den gleichen Einsatz e auf "Zahl aus dem ersten Dutzend" . Falls er in einem Spiel gewinnt, beträgt sein Reingewinn $2 \cdot e$, andernfalls geht sein Einsatz verloren $(-e)$. Die Zufallsgröße X gibt den Gesamtgewinn für alle drei Spiele in Euro an.
Die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgröße X lässt sich mit Hilfe folgender Tabelle angeben:

$$\begin{pmatrix} x & -3 \cdot e & 0 & 3 \cdot e & 6 \cdot e \\ P(X = x) & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare \end{pmatrix}$$

4.1 (7 BE)
Übernehmen Sie die Tabelle und ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeiten der Zufallswerte z. B. mit Hilfe eines Baumdiagramms auf vier Nachkommastellen.



$\{\omega_i\}$	$\frac{P(\{\omega_i\})}{50653}$	$P(\{\omega_i\})$	Gewinn
GGG	1728	$\approx 0{,}03411$	6e
$GG\overline{G}$	3600	$\approx 0{,}07107$	3e
$G\overline{G}G$	3600	$\approx 0{,}07107$	3e
$G\overline{G}\overline{G}$	7500	$\approx 0{,}14807$	0
$\overline{G}GG$	3600	$\approx 0{,}07107$	3e
$\overline{G}G\overline{G}$	7500	$\approx 0{,}14807$	0
$\overline{G}\overline{G}G$	7500	$\approx 0{,}14807$	0
$\overline{G}\overline{G}\overline{G}$	15625	$\approx 0{,}30847$	– 3e

$$\begin{pmatrix} x & -3 \cdot e & 0 & 3 \cdot e & 6 \cdot e \\ P(X = x) & 0.30847 & 0.44420 & 0.21322 & 0.03411 \end{pmatrix}$$

4.2 **(4 BE)**
Setzen Sie nun **e = 100** und berechnen Sie den Erwartungswert $\mathbf{E(X)}$ sowie die zugehörige Standardabweichung.

$$\mathbf{Tabelle} = \begin{pmatrix} \text{"X"} & -300 & 0 & 300 & 600 & \text{"Summe"} \\ \text{"P(X=x)"} & 0.308 & 0.444 & 0.213 & 0.034 & 1 \\ \text{"x P(X=x)"} & -92.541 & 0 & 63.966 & 20.466 & -8.109 \\ \text{"x^2"} & 90000 & 0 & 90000 & 360000 & \text{"/"} \\ \text{"x^2 P(X=x)"} & 27762.3 & 0 & 19189.8 & 12279.6 & 59231.7 \end{pmatrix}$$

$\mathbf{E(X) := -8.109}$ in €

$\mathbf{Var(X) := 5.923 \times 10^4 - (E(X))^2}$ $\qquad$ $\mathbf{Var(X) = 59164.0}$

$\sigma := \sqrt{59164.0}$ $\qquad$ $\sigma = 243.24$ in €

5.0
Im Folgenden werden Spiele, bei denen die **0** erscheint, außer Acht gelassen. Dann sollte das Ereignis *Zahl aus dem ersten Dutzend* im Schnitt in einem drittel aller Spiele eintreten. Lord Grips vermutet, dass dieses Ereignis bei einem bestimmten Roulette-Tisch im Casino von Nepphausen mit zu geringer Häufigkeit erscheint (Gegenhypothese). Daher beobachtet er 200 Kugelwürfe in Hinblick auf *erstesDutzend*.

5.1 **(5 BE)**
Geben Sie zu diesem Test die Testgröße sowie Null- und Gegenhypothese an und ermitteln Sie deren größtmöglichen Ablehnungsbereich, wenn das Signifikanzniveau **5%** betragen soll.

Testgröße: **Anzahl der Ereignisse "Zahl aus 1. Dutzend" bei** $\mathbf{n := 200}$.

Nullhypothese H_0: $\quad p_0 \geq \frac{1}{3}$ $\qquad$ Annahmebereich: $\quad \mathbf{A = \{ k; k+1; ...; 200 \}}$

Gegenhypothese H_1: $\quad p_1 < \frac{1}{3}$ $\qquad$ Ablehnungsbereich: $\quad \mathbf{\overline{A} = \{ 0; 1; ...; k-1 \}}$

Testart: **linksseitiger Signifikanztest**

Signifikanzniveau: $\quad \alpha = 0.05$

Ansatz: $\quad P(\overline{A}) \leq 0.05 \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{i=0}^{k-1} B\left(200, \frac{1}{3}, i\right) \leq 0.05$

---------------------------------> **0.04531** $\qquad$ $\mathbf{k - 1 = 55}$
Tabellenwerk Seite 24

Ablehnungsbereich: $\quad \mathbf{\overline{A} = \{ 0; 1; ...; 55 \}}$

5.2 **(3 BE)**
Erklären Sie kurz, worin bei diesem Beispiel der Fehler 2. Art besteht und begründen Sie kurz, weshalb man dessen Wahrscheinlichkeit hier nicht berechnen kann.

Es wird vermutet, dass der Roulette-Tisch in Ordnung ist, obwohl das in Wirklichkeit nicht stimmt.

$\mathbf{P}(\beta)$ ist nicht berechenbar, da die Wahrscheinlichkeit p_1 der Gegenhypothese nicht bekannt ist.