Abschlussprüfung Berufliche Oberschule 2009
Mathematik 12 Technik - A I - Lösung

Teilaufgabe 1.0

Gegeben ist die reelle Funktion $f(x) := \dfrac{8 \cdot e^x}{\left(1 + e^x\right)^2}$ in der Definitionsmenge $ID_f = IR$.

Teilaufgabe 1.1 (4 BE)

Untersuchen Sie das Verhalten der Funktionswerte **f(x)** für $x \rightarrow \pm\infty$ und geben Sie die Gleichung der Asymptote des Graphen von **f** an.

$$\lim_{x \to -\infty} \left[8 \cdot \frac{\overset{\overset{0}{\uparrow}}{e^x}}{\underset{\underset{1}{\downarrow}}{\left(1 + e^x\right)^2}} \right] \rightarrow 0$$

$$\lim_{x \to \infty} \left[8 \cdot \frac{\overset{\overset{\infty}{\uparrow}}{e^x}}{\underset{\underset{\infty}{\downarrow}}{\left(1 + e^x\right)^2}} \right] = \lim_{x \to \infty} \left[8 \cdot \frac{e^x}{2 \cdot \left(1 + e^x\right) \cdot e^x} \right] = \lim_{x \to \infty} \left[\frac{8}{\underset{\underset{\infty}{\downarrow}}{2 \cdot \left(1 + e^x\right)}} \right] \rightarrow 0$$

$\Rightarrow$ horizontale Asymptote $y = 0$

Teilaufgabe 1.2 (5 BE)

Weisen Sie nach, dass der Graph von **f** achsensymmetrisch zur y-Achse verläuft.

$$f(-x) = 8 \cdot \frac{e^{-x}}{\left(1 + e^{-x}\right)^2} = 8 \cdot \frac{\frac{1}{e^x}}{\left(1 + \frac{1}{e^x}\right)^2} = 8 \cdot \frac{\frac{1}{e^x}}{\frac{1}{e^{2 \cdot x}} \cdot \left(e^x + 1\right)^2} = 8 \cdot \frac{e^x}{\left(e^x + 1\right)^2} = f(x)$$

Da $f(-x) = f(x)$ $\Rightarrow$ Achsensymmetrie zur y-Achse

Teilaufgabe 1.3 (10 BE)

Zeigen Sie, dass für die Ableitungsfunktion **f '** der Funktion **f** gilt: $f'(x) = \frac{1-e^x}{1+e^x} \cdot f(x)$

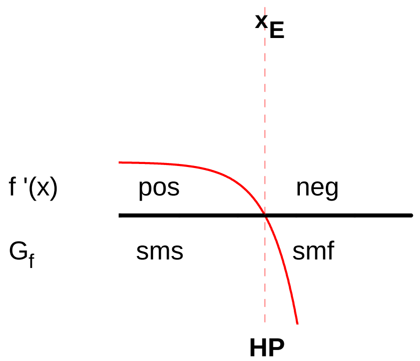
Ermitteln Sie über die maximalen Monotonieintervalle Art und Lage des Extremalpunktes des Graphen von **f** und geben Sie die Wertemenge der Funktion **f** an.

$$f'(x) = 8 \cdot \frac{e^x \cdot \left(1+e^x\right)^2 - e^x \cdot 2 \cdot \left(1+e^x\right) \cdot e^x}{\left(1+e^x\right)^4} = 8 \cdot \left(1+e^x\right) \cdot e^x \cdot \frac{\left(1+e^x\right) - 2 \cdot e^x}{\left(1+e^x\right)^4} = 8 \cdot e^x \cdot \frac{1-e^x}{\left(1+e^x\right)^3}$$

Umordnen: $f'(x) = \frac{8 \cdot e^x}{\left(1+e^x\right)^2} \cdot \frac{1-e^x}{1+e^x} = f(x) \cdot \frac{1-e^x}{1+e^x}$ Das ist die Behauptung

$f(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und $1+e^x > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow 1-e^x$ entscheidet das Vorzeichen von **f '**.

$1 - e^x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad e^x = 1 \quad x_E := 0$



$f(0) = 2$

Hochpunkt **HP(0/2)**

Der relative Hochpunkt ist wegen 1.1 sogar absolutes Maximum

$\Rightarrow$ Wertemenge: $y \in \left]\, 0\, ;\, 2 \,\right]$

Teilaufgabe 1.4 (11 BE)

Weisen Sie nach, dass der Graph von **f** zwei Wendepunkte besitzt, und berechnen Sie deren Koordinaten auf zwei Nachkommastellen gerundet.

1. Ableitung: $f'(x) = 8 \cdot e^x \cdot \frac{1-e^x}{\left(1+e^x\right)^3} = 8 \cdot \frac{e^x - e^{2 \cdot x}}{\left(1+e^x\right)^3}$

2. Ableitung: $f''(x) = 8 \cdot \frac{\left(e^x - 2 \cdot e^{2 \cdot x}\right) \cdot \left(1+e^x\right)^3 - \left(e^x - e^{2 \cdot x}\right) \cdot 3\left(1+e^x\right)^2 \cdot e^x}{\left(1+e^x\right)^6}$

$$f''(x) = 8 \cdot \left(1+e^x\right)^2 \cdot \frac{\left(e^x - 2 \cdot e^{2 \cdot x}\right) \cdot \left(1+e^x\right) - 3 \cdot \left(e^x - e^{2 \cdot x}\right) \cdot e^x}{\left(1+e^x\right)^6}$$

$$f''(x) = 8 \cdot \frac{e^x + e^{2 \cdot x} - 2 \cdot e^{2 \cdot x} - 2 \cdot e^{3 \cdot x} - 3 \cdot e^{2 \cdot x} + 3 \cdot e^{3 \cdot x}}{\left(1 + e^x\right)^4}$$

$$f''(x) = 8 \cdot \frac{e^x - 4 \cdot e^{2 \cdot x} + e^{3 \cdot x}}{\left(1 + e^x\right)^4} \qquad \boxed{f''(x) = \frac{8 \cdot e^x}{\left(1 + e^x\right)^4} \cdot \left(1 - 4 \cdot e^x + e^{2 \cdot x}\right)}$$

Wendepunktsbedingung: $1 - 4 \cdot e^x + e^{2 \cdot x} = 0$

Substitution: $e^x = t$ $\qquad t0 := t^2 - 4 \cdot t + 1 = 0 \text{ auflösen}, t \rightarrow \begin{pmatrix} \sqrt{3} + 2 \\ 2 - \sqrt{3} \end{pmatrix}$

Abrufen der Lösung: $t_1 = \sqrt{3} + 2 \qquad t_2 = 2 - \sqrt{3}$

Resubstitution:

$x_{W1} := e^x = t_1 \rightarrow e^x = \sqrt{3} + 2 \text{ auflösen}, x \rightarrow \ln\left(\sqrt{3} + 2\right) \qquad x_{W1} = 1.317$

$x_{W2} := e^x = t_2 \rightarrow e^x = 2 - \sqrt{3} \text{ auflösen}, x \rightarrow \ln\left(2 - \sqrt{3}\right) \qquad x_{W2} = -1.317$

jeweils Nullstelle mit Vorzeichenwechsel

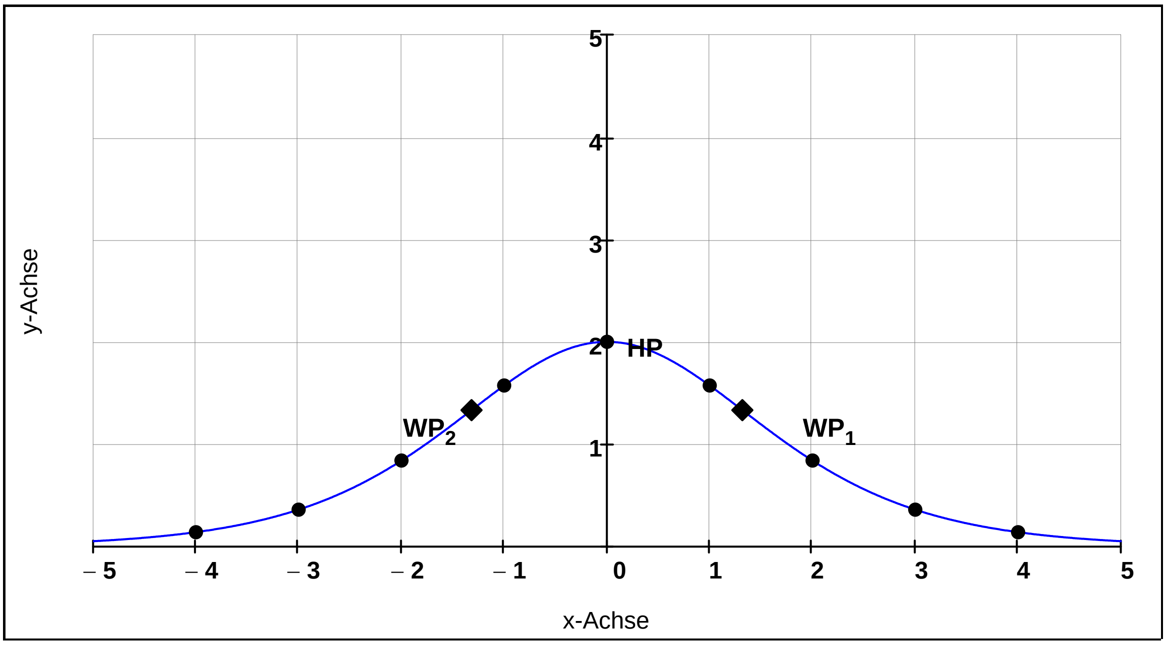
$$f\left(x_{W1}\right) \rightarrow \frac{8 \cdot \sqrt{3} + 16}{\left(\sqrt{3} + 3\right)^2} = 1.333 \qquad f\left(x_{W2}\right) \rightarrow -\frac{8 \cdot \sqrt{3} - 16}{\left(\sqrt{3} - 3\right)^2} = 1.333$$

$\boxed{WP_1(1.32, 1.33)}$ $\qquad$ $\boxed{WP_2(-1.32, 1.33)}$

Teilaufgabe 1.5 (3 BE)
Zeichnen Sie den Graphen der Funktion f für $-4 \le x \le 4$ in ein kartesisches Koordinatensystem mit dem Maßstab 1 LE = 1 cm.

$x0 = \begin{pmatrix} -4 & -3 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

$y0 = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.4 & 0.8 & 1.6 & 2 & 1.6 & 0.8 & 0.4 & 0.1 \end{pmatrix}$



Teilaufgabe 1.6 (2 BE)

Zeigen Sie, dass die Funktion $F(x) := \frac{-8}{1+e^x}$ in ihrer Definitionsmenge $ID_F = IR$ eine Stammfunktion der Funktion **f** ist.

zu zeigen: $F'(x) = f(x)$

$F'(x) := \frac{d}{dx}F(x) \rightarrow \frac{8 \cdot e^x}{\left(e^x + 1\right)^2}$ Vergleiche: $f(x) = \frac{8 \cdot e^x}{\left(e^x + 1\right)^2}$

Teilaufgabe 1.7.0

Die beiden Koordinatenachsen und die Gerade $x = t$ mit $t \in IR$ und $t > 0$ schließen mit dem Graphen von **f** ein endliches Flächenstück ein, das durch den Graphen der auf $ID_h = IR$ definierten Funktion $h(x) := 2 \cdot e^{-x}$ in zwei Teilflächen $A_1(t)$ und $A_2(t)$ zerlegt wird.

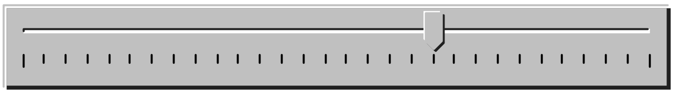
Teilaufgabe 1.7.1 (4 BE)

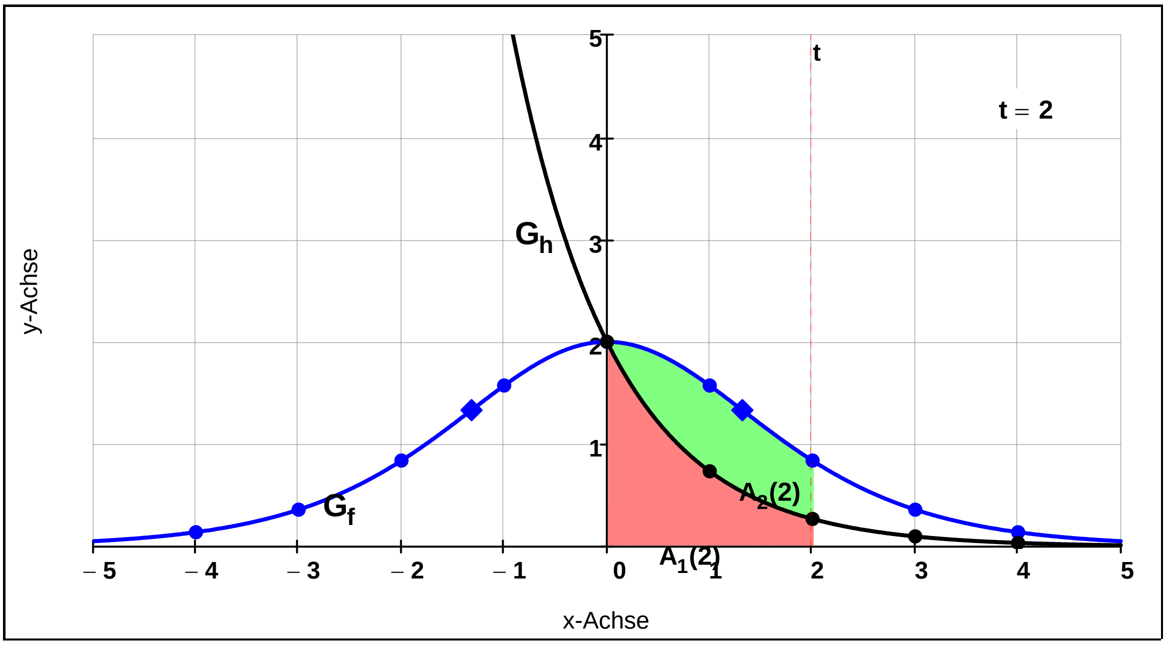
Zeichnen Sie den Graphen der Funktion **h** für $-1 \le x \le 4$ in das Koordinatensystem der Aufgabe 1.5 ein und kennzeichnen Sie für $t = 2$ die beiden Teilflächen $A_1(2)$ und $A_2(2)$.

$x1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

$y1 = \begin{pmatrix} 5.4 & 2 & 0.7 & 0.3 & 0.1 & 0 \end{pmatrix}$

Wählen Sie $0 < t \leq 3$:





Verallgemeinerung: $t := t$

Teilaufgabe 1.7.2 (5 BE)
Berechnen Sie jeweils in Abhängigkeit von t den Flächeninhalt der beiden Teilflächen $A_1(t)$ und $A_2(t)$.

Stammfunktion: $\int 2 \cdot e^{-x}\, dx \rightarrow -2 \cdot e^{-x}$

1. Teilfläche: $A_1(t) = \int_0^t h(x)\, dx = \int_0^t 2 \cdot e^{-x}\, dx = -2 \cdot e^{-t} + 2 \quad \Rightarrow \quad A_1(t) := 2 - 2 \cdot e^{-t}$

2. Teilfläche: $A_2(t) = \int_0^t f(x)\, dx - \int_0^t h(x)\, dx$

$$A_2(t) := F(t) - F(0) - A_1(t) \quad \Rightarrow \quad A_2(t) = 2 \cdot e^{-t} - \frac{8}{e^t + 1} + 2$$

Teilaufgabe 1.7.3 (8 BE)
Zeigen Sie, dass für den Differenzbetrag $A_1(t) - A_2(t)$ der beiden Flächeninhalte in Abhängigkeit von $t \in \mathbb{R}$ und $t > 0$ gilt: $|\Delta A(t)| = \frac{8}{1+e^t} - \frac{4}{e^t}$
Beweisen Sie, dass man **t** nicht so wählen kann, dass die Flächeninhalte der beiden Teilflächen gleich groß sind, dass sie aber für $t \to \infty$ denselben Grenzwert haben.

$$A_1(t) - A_2(t) = \frac{8}{e^t+1} - 4\cdot e^{-t} \qquad |A_1(t) - A_2(t)| = \left|\frac{8}{e^t+1} - 4\cdot e^{-t}\right|$$

Betragsauflösung:

$$\frac{8}{e^t+1} - \frac{4}{e^t} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad 8\cdot e^t > 4\cdot e^t + 4 \quad \Leftrightarrow \quad 4\cdot e^t - 4 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad e^t > 1 \quad \text{für} \quad t > 0$$

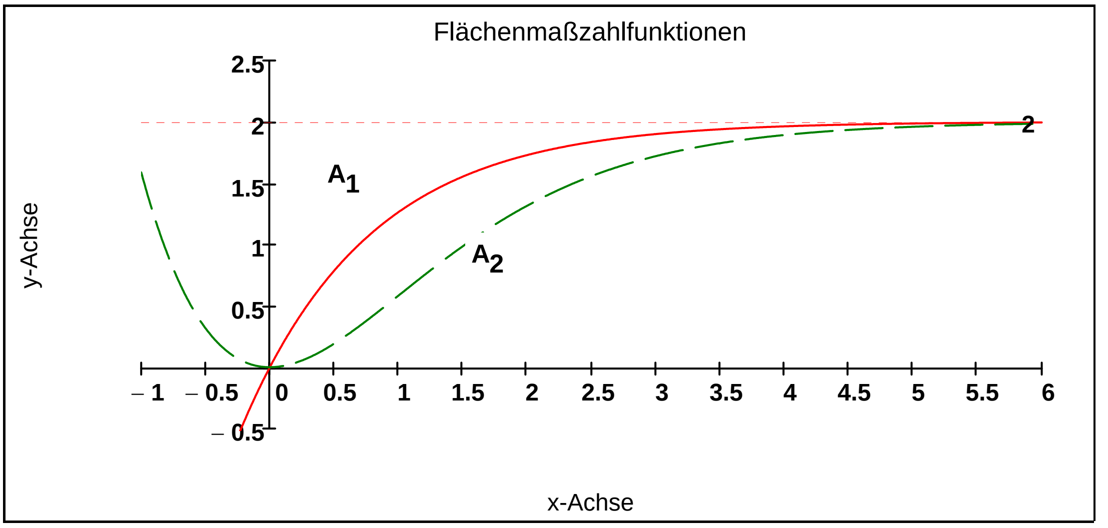
$$A_1(t) = A_2(t) \quad \Leftrightarrow \quad A_1(t) - A_2(t) = 0 \rightarrow \frac{8}{e^t+1} - 4\cdot e^{-t} = 0$$

Mit der Betragsauflösung gilt: $e^t = 1 \quad \Rightarrow \quad t = 0$ unmöglich, da $t > 0$

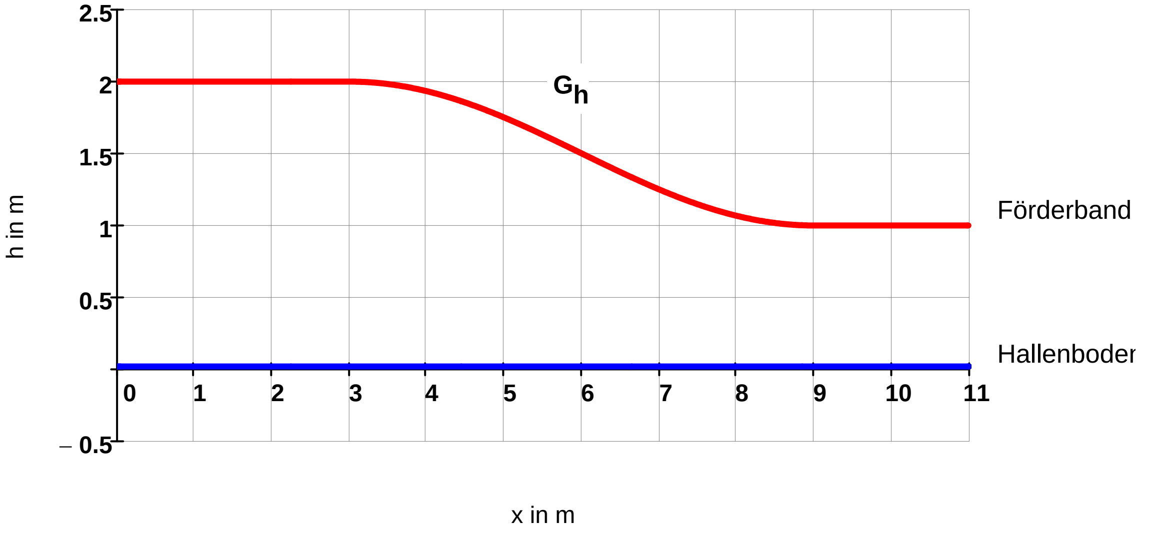
Grenzwert der 1. Teilfläche: $\lim\limits_{t\to\infty}\left(2 - \underset{\substack{\downarrow\\0}}{\frac{2}{e^t}}\right) \to 2$

Grenzwert der 2. Teilfläche: $\lim\limits_{t\to\infty}\left(\underset{\substack{\downarrow\\0}}{\frac{2}{e^t}} - \underset{\substack{\downarrow\\0}}{\frac{8}{e^t+1}} + 2\right) \to 2$

Graphische Darstellung (in der Prüfung nicht verlangt)



Teilaufgabe 2.0
In einem Flughafenterminal wird die Gepäckabfertigung neu geplant. Unter anderem ist ein neues Förderband für den Transport des Gepäcks vorgesehen.
Das Förderband soll zunächst horizontal verlaufen, hat jedoch auf einer Strecke von sechs Metern einen Höhenunterschied von einem Meter zu überwinden, um dann wieder horizontal weiter geführt zu werden. Der Übergang von der höher gelegenen auf die tiefere Ebene soll auf einer kosinusförmigen Kurve verlaufen.
Der (nicht maßstabsgetreue) Verlauf des Förderbands ist unten schematisch als Graph G_h einer Funktion **h** in Abhängigkeit von **x** dargestellt.
x gibt dabei die Länge der zurückgelegten Strecke in horizontaler Richtung, **h** die vom Hallenboden aus gemessene Höhe des Förderbands in Meter an.
Auf die Verwendung von Einheiten wird verzichtet.



Teilaufgabe 2.1 **(7 BE)**
Der in der Zeichnung abgebildete Graph G_h verläuft in der ganzen Definitionsmenge $D_h = [\,0;\,11]$ ohne Knick. Der zugehörige Funktionsabschnitt im Bereich $3 \le x \le 9$ soll dabei soll dabei durch die Gleichung $h(x) = a \cdot \cos(b \cdot x + c) + d$ beschrieben werden.
Entnehmen Sie der Zeichnung geeignete Funktionswerte und bestimmen Sie daraus die Konstanten **a**, **b**, **c** und **d**.

Kosinusfunktion zwischen Funktionswerten 1 und 2: $a := \frac{1}{2}$

Halbe Periodenlänge zwischen 3 und 9: $p := 2 \cdot 6$ $\quad p = 12$

Frequenz: $p = \frac{2 \cdot \pi}{b} \quad \Rightarrow \quad b := \frac{2 \cdot \pi}{p}$ $\quad b = \frac{\pi}{6}$

Phasenverschiebung um 3 nach rechts: $c := -3 \cdot b$ $\quad c = -\frac{\pi}{2}$

Verschiebung um 1,5 naqch oben: $d := \frac{3}{2}$

Teilaufgabe 2.2 **(7 BE)**
Die Funktion **h** kann für $3 \le x \le 9$ auch mit der Gleichung $h(x) := \frac{1}{2} \cdot \left(\sin\left(\frac{\pi}{6} \cdot x\right) + 3\right)$ beschrieben werden.
Zeigen Sie mit Hilfe der Ableitungsfunktionen, dass der Graph G_h an der Stelle $x = 6$ einen Wendepunkt besitzt und ermitteln Sie das prozentuale maximale Gefälle des Förderbands auf eine Nachkommastelle gerundet.

1. Ableitung: $h'(x) := \frac{\pi}{12} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6} \cdot x\right)$

2. Ableitung: $h''(x) := -\frac{\pi^2}{72} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6} \cdot x\right)$

Wendepunkte. $\sin\left(\frac{\pi}{6} \cdot x\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\pi}{6} \cdot x = k \cdot \pi \quad \Leftrightarrow \quad x_0 = 6 \cdot k$ und $k \in Z$

Wähle $k = 1$ $\quad x_W := 6$ $\quad$ einfache Nullstelle

Gefälle entspricht dem Steigungswert $h'(6) \rightarrow -\frac{\pi}{12} = -0.262$ $\quad |h'(6)| = 26.18 \cdot \%$

Das maximale Gefälle beträgt **26,2%** .

Teilaufgabe 2.3 (4 BE)
Das Förderband hat eine Breite von **1,20 Meter**. Um eine dauerhafte Stabilität zu gewährleisten, soll im gezeichneten Bereich $0 \le x \le 11$ der gesamte Raum zwischen Förderband und Hallenboden mit Beton ausgefüllt werden.
Berechnen Sie das Volumen dieses Unterbaus.

Fläche des Unterbaus: $$A := \left[3\cdot 2 + 2\cdot 1 + \int_3^9 \frac{1}{2}\cdot\left(\sin\left(\frac{\pi}{6}\cdot x\right) + 3\right) dx\right]\cdot m^2$$

Nebenrechnung:

Stammfunktion: $$\int \frac{1}{2}\cdot\left(\sin\left(\frac{\pi}{6}\cdot x\right) + 3\right) dx = -\frac{6}{2\cdot\pi}\cdot\cos\left(\frac{\pi}{6}\cdot x\right) + \frac{3}{2}\cdot x$$

$$\int_3^9 \frac{1}{2}\cdot\left(\sin\left(\frac{\pi}{6}\cdot x\right) + 3\right) dx = -\frac{6}{2\cdot\pi}\cdot\cos\left(\frac{\pi}{6}\cdot 9\right) + \frac{3}{2}\cdot 9 - \left[-\frac{6}{2\cdot\pi}\cdot\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\cdot 3\right) + \frac{3}{2}\cdot 3\right)\right]$$

$$\ldots = -\frac{6}{2\cdot\pi}\cdot 0 + \frac{27}{2} + \frac{6}{2\cdot\pi}\cdot 0 - \frac{9}{2} = 9$$

$A := (8 + 9)\cdot m^2$ $\quad A = 17\,m^2$ $\quad$ Volumen: $\quad V := A\cdot 1.2\cdot m$ $\quad V = 20.4\cdot m^3$

Die gesuchte Fläche A kann auch aus drei Rechtecksflächen (Symmetrie von Kosinus) bestimmt werden:

$A := \left(3\cdot 2 + 6\cdot\frac{3}{2} + 2\cdot 1\right)\cdot m^2$ $\quad A = 17\,m^2$ $\quad V := A\cdot 1.2\cdot m$ $\quad V = 20.4\cdot m^3$