Abschlussprüfung Berufliche Oberschule 2009
Mathematik 12 Technik - B I - Lösung

Teilaufgabe 1.0
In einem kartesischen Koordinatensystem des IR^3 mit dem Ursprung O sind die Punkte
$A := (0\ \ 1\ \ -2)$, $B := (-1\ \ 2\ \ -0.5)$, $C := (2\ \ 0\ \ -4)$ und $D(k) := (11+k\ \ 6+k\ \ k)$ mit
$k \in IR$ sowie die Ebene $F\colon\ 2\cdot x_1 - x_2 - 2\cdot x_3 - 3 = 0$ gegeben.

Teilaufgabe 1.1 (4 BE)
Stellen Sie jeweils eine Gleichung der Ebene E durch die Punkte A, B und C in Parameter- und Normalenform auf.
[Mögliches Teilergebnis: $E\colon\ x_1 - 2\cdot x_2 + 2\cdot x_3 + 6 = 0$]

Ortsvektoren: $a := A^T$ $\quad b := B^T$ $\quad c := C^T$ $\quad d(k) := D(k)^T$

$$a = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -0.5 \end{pmatrix} \qquad c = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} \qquad d(k) = \begin{pmatrix} k+11 \\ k+6 \\ k \end{pmatrix}$$

Richtungsvektoren: $u := b - a$ $\quad u = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1.5 \end{pmatrix}$ $\qquad v := c - a$ $\quad v = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$

Parameterform für **E:** $\quad x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda\cdot\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1.5 \end{pmatrix} + \mu\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$

Normalenvektor: $\quad n_E := u \times v \qquad n_E = \begin{pmatrix} -0.5 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Normalenform für **E:** $\quad \left[\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix} -0.5 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$

Teilaufgabe 1.2 (2 BE)
Zeigen Sie, dass die Punkte D(k) auf einer Geraden liegen, und bestimmen Sie eine Gleichung dieser Geraden.

Punkt: $\quad d(k) \rightarrow \begin{pmatrix} k+11 \\ k+6 \\ k \end{pmatrix}$ $\qquad$ Aufspalten: $\quad x = \begin{pmatrix} 11 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + k\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Das ist eine Gerade g.

Teilaufgabe 1.3 (3 BE)
Bestimmen Sie k so, dass der Punkt D(k) in der Ebene E liegt, und geben Sie die Koordinaten des Punktes D_k an.

Definitionen: $E(x_1, x_2, x_3) := x_1 - 2 \cdot x_2 + 2 \cdot x_3 + 6$ $g(k) := \begin{pmatrix} 11 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Punkt D einsetzen: $k_1 := E(d(k)_1, d(k)_2, d(k)_3) = 0 \rightarrow k + 5 = 0 \text{ auflösen}, k \rightarrow -5$

$d_0 := g(-5) \rightarrow \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$ $D_0 := {d_0}^T$ $D_0 \rightarrow (6 \quad 1 \quad -5)$

Teilaufgabe 1.4 (4 BE)
Ermitteln Sie eine Gleichung der Schnittgeraden s der beiden Ebenen E und F.

Gaußmatrix aufstellen: diagonalisiert:

$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & -6 \\ 2 & -1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{(II) - 2 \cdot (I)} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & -6 \\ 0 & 3 & -6 & 15 \end{pmatrix}$ vereinfachen: $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & -6 \\ 0 & 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$

Wähle. $x_3(\tau) := \tau$ Berechne: $x_2(\tau) := 5 + 2 \cdot \tau$ $x_1(\tau) := -6 + 2 \cdot (5 + 2 \cdot \tau) - 2 \cdot \tau$

Schnittgerade: $s(\tau) := \begin{pmatrix} x_1(\tau) \\ x_2(\tau) \\ x_3(\tau) \end{pmatrix}$ $s(\tau) = \begin{pmatrix} 2 \cdot \tau + 4 \\ 2 \cdot \tau + 5 \\ \tau \end{pmatrix}$

Teilaufgabe 1.5 (5 BE)
Der Punkt D* ist Spiegelpunkt des Punktes $D(-5) \rightarrow (6 \quad 1 \quad -5)$ bezüglich der Ebene F.
Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes D* .

Ebene F: $F(x_1, x_2, x_3) := 2 \cdot x_1 - x_2 - 2 \cdot x_3 - 3$ Normalenvektor von F: $n_F := \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$

Lotgerade senkrecht zu Ebene F durch Punkt D:

$l(\tau) := d(-5) + \tau \cdot n_F$ $l(\tau) = \begin{pmatrix} 2 \cdot \tau + 6 \\ 1 - \tau \\ -2 \cdot \tau - 5 \end{pmatrix}$

Lotfußpunkt: $\tau_1 := F(l(\tau)_1, l(\tau)_2, l(\tau)_3) = 0 \rightarrow 9 \cdot \tau + 18 = 0 \text{ auflösen}, \tau \rightarrow -2$

$$f := l(\tau_1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad F := f^T \qquad F \to \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Spiegelpunkt: $$d^* := l(2\cdot\tau_1) = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad D^* := d^{*T} \qquad D^* \to \begin{pmatrix} -2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

Teilaufgabe 2.0

Gegeben ist folgendes lineares Gleichungssystem mit $t \in \mathbb{R}$:

(I) $2\cdot x_1 - x_2 - 2\cdot x_3 + 9.5 = t$

(II) $x_1 - 2\cdot x_2 + 2\cdot x_3 + 6 = 0$

(III) $t\cdot(x_1 + x_2) - 6\cdot x_3 + 3 = 0$

Teilaufgabe 2.1 (8 BE)

Ermitteln Sie die Anzahl der Lösungen dieses Gleichungssystems in Abhängigkeit von t.

8 BE

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 & t-9.5 \\ 1 & -2 & 2 & -6 \\ t & t & -6 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[(III)\,-\,t\cdot(II)]{2\cdot(II)\,-\,(I)} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 & t-9.5 \\ 0 & -3 & 6 & -t-2.5 \\ 0 & 3\cdot t & -6-2\cdot t & -3+6\cdot t \end{pmatrix} \xrightarrow[(III)\,+\,t\cdot(II)]{}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 & t-9.5 \\ 0 & -3 & 6 & -t-2.5 \\ 0 & 0 & -6+4\cdot t & -t^2+3.5\cdot t-3 \end{pmatrix}$$

Für die Fallunterscheidung: $p_1(t) := -6 + 4\cdot t \qquad p_2(t) := -t^2 + 3.5\cdot t - 3$

$$t_1 := p_1(t) = 0 \to 4\cdot t - 6 = 0 \text{ auflösen}, t \to \frac{3}{2} \qquad p_2(t_1) = 0$$

Das Gleichungssystem hat für

$t = \frac{3}{2}$ unendlich viele Lösungen

$t \neq \frac{3}{2}$ genau eine Lösung

Teilaufgabe 2.2 (4 BE)
Interpretieren Sie die gegebenen Gleichungen als Ebenengleichungen und bestimmen Sie für
4 BE $t_0 = 1.5$ die Schnittmenge der drei Ebenen.

$$G(t) := \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 & t - \frac{19}{2} \\ 1 & -2 & 2 & -6 \\ t & t & -6 & -3 \end{pmatrix} \qquad G\left(\frac{3}{2}\right) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 & -8 \\ 1 & -2 & 2 & -6 \\ \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & -6 & -3 \end{pmatrix}$$

Diagonalisieren:

$$\mathrm{zref}\left(G\left(\frac{3}{2}\right)\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -\frac{10}{3} \\ 0 & 1 & -2 & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Lösung:

$$x_3(\tau) := \tau$$

$$x_2(\tau) := \frac{4}{3} + 2 \cdot x_3(\tau) \rightarrow 2 \cdot \tau + \frac{4}{3}$$

$$x_1(\tau) := -\frac{10}{3} + 2 \cdot x_3(\tau) \rightarrow 2 \cdot \tau - \frac{10}{3}$$

Schnittmenge = Schnittgerade

$$x(\tau) := \begin{pmatrix} x_1(\tau) \\ x_2(\tau) \\ x_1(\tau) \end{pmatrix} \qquad x(\tau) = \begin{pmatrix} 2 \cdot \tau - \frac{10}{3} \\ 2 \cdot \tau + \frac{4}{3} \\ 2 \cdot \tau - \frac{10}{3} \end{pmatrix}$$