Abschlussprüfung Berufliche Oberschule 2009
Mathematik 13 Nichttechnik - A I - Lösung

Teilaufgabe 1.0

Gegeben ist die Funktion $f(x) := 2 \cdot \ln\left[(x+2)^2 + 4\right]$ in der größtmöglichen Definitionsmenge $D_f \subset IR$. Ihr Graph wird mit G_f bezeichnet.

Teilaufgabe 1.1 (4 BE)

Bestimmen Sie D_f, untersuchen Sie die Funktion auf Nullstellen und bestimmen Sie ihr Verhalten an den Rändern der Definitionsmenge.

Definitionsmenge: $(x+2)^2 + 4 > 0$ erfüllt für alle $x \in IR$

Nullstellen: $(x+2)^2 + 4 = 1$ besitzt keine Lösung, also keine Nullstellen

$$\lim_{x \to -\infty} \left[2 \cdot \ln\left[(x+2)^2 + 4\right]\right] \to \infty \qquad \lim_{x \to \infty} \left[2 \cdot \ln\left[(x+2)^2 + 4\right]\right] \to \infty$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$\infty \qquad\qquad \infty$$

Teilaufgabe 1.2 (5 BE)

Untersuchen Sie G_f auf Punkte mit horizontaler Tangente (Koordinaten und Art).

[Teilergebnis: $f'(x) := \dfrac{4 \cdot x + 8}{x^2 + 4 \cdot x + 8}$]

1. Ableitung: $$f'(x) = \frac{2}{(x+2)^2 + 4} \cdot 2 \cdot (x+2) = \frac{4(x+2)}{x^2 + 4 \cdot x + 4 + 4} = \frac{4 \cdot (x+2)}{x^2 + 4 \cdot x + 8}$$

Horizontale Tangenten: $x_E := 4 \cdot (x+2) = 0 \text{ auflösen}, x \to -2$

	x_E	
Zähler	neg	pos
Nenner	pos	pos
f '(x)	neg	pos
G_f	smf	sms
	Tiefpunkt	

Monotonieverhalten wechselt von streng monoton fallend (smf) zu streng monotonsteigend (sms)
$\Rightarrow$ Extremum ist Tiefpunkt

$f(x_E) \to 2 \cdot \ln(4)$

$TP(-2, 2 \cdot \ln(4))$

Teilaufgabe 1.3 (9 BE)
Ermitteln Sie die Koordinaten der Wendepunkte von G_f und bestimmen Sie die Gleichung der Wendetangente in dem Wendepunkt, der auf der y-Achse liegt.

2. Ableitung:

$$f''(x) = \frac{4\cdot\left(x^2+4\cdot x+8\right)-(4\cdot x+8)\cdot(2\cdot x+4)}{\left(x^2+4\cdot x+8\right)^2} = \frac{4\cdot x^2+16\cdot x+32-8\cdot x^2-16\cdot x-16\cdot x-32}{\left(x^2+4\cdot x+8\right)^2}$$

vereinfacht: $f''(x) := \dfrac{-4\cdot x^2-16\cdot x}{\left(x^2+4\cdot x+8\right)^2}$

Wendepunktsbedingung: $x_W := -4\cdot x^2 - 16\cdot x = 0 \text{ auflösen}, x \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix}$ einfache Nullstellen

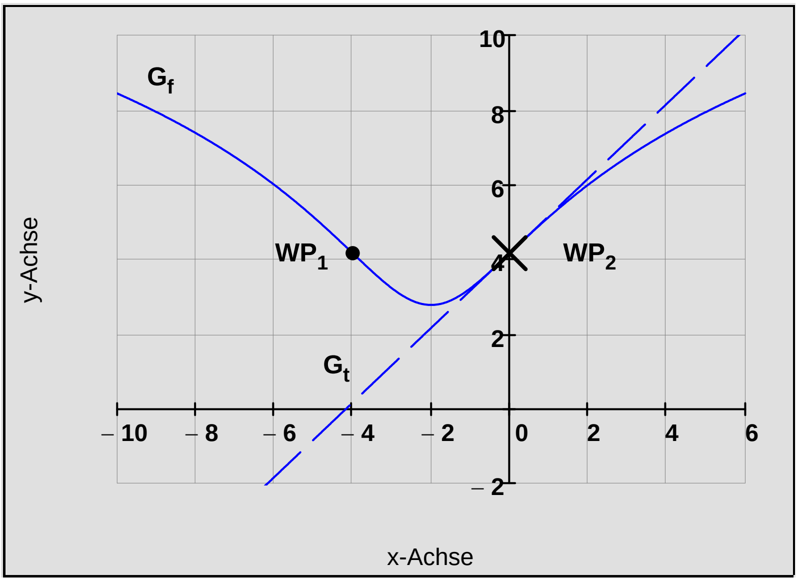
1. Wendepunkt: $x_{W1} = -4$ $y_{W1} = 2\cdot\ln(8) = 4.159$ $WP_1(-4, 2\cdot\ln(8))$

2. Wendepunkt: $x_{W2} = 0$ $y_{W2} = 2\cdot\ln(8) = 4.159$ $WP_2(0, 2\cdot\ln(8))$ liegt auf der y-Achse

Steigung der Wendetangente: $f'(x_{W2}) = 1$

Wendetangente: $t(x) := f'(x_{W2})\cdot(x-x_{W2}) + f(x_{W2})$ $t(x) = x + 2\cdot\ln(8)$

Teilaufgabe 1.4 (5 BE)
Zeichnen Sie G_f unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse für $-8 \le x \le 4$ in ein kartesisches Koordinatensystem. Tragen Sie auch die Wendetangente aus Aufgabe 1.3 in Ihre Zeichnung ein.



Teilaufgabe 2.0

Wir betrachten nun die Funktion $g(x) = f'(x) = \dfrac{4 \cdot x + 8}{x^2 + 4 \cdot x + 8}$ mit $D_g = D_f$ (siehe Aufgabe 1.2).

Ihr Graph wird mit G_g bezeichnet.

Teilaufgabe 2.1 **(6 BE)**
Ermitteln Sie - unter Verwendung der Ergebnisse von Aufgabe 1 - die Nullstellen von g und die Koordinaten und die Art der Extrempunkte von G_g.

$$g(x) := \frac{4 \cdot x + 8}{x^2 + 4 \cdot x + 8}$$

Die Extremstellen von f(x) sind die Nullstellen von g, die Wendestellen von f(x) sind die Extremstellen von g.

$$g(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_0 := -2$$

$$g'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f''(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 := -4 \qquad x_2 := 0$$

$x_1 := -4$ bei G_f Wechsel von rechtsgekrümmt (< 0) nach linksgekrümmt (> 0), also Tiefpunkt von G_g

$y_1 := g(x_1)$ $\qquad y_1 = -1$ $\qquad \boxed{TP_g(-4, -1)}$

$x_2 := 0$ bei G_f Wechsel von linksgekrümmt (> 0) nach rechtsgekrümmt (< 0), also Hochpunkt von G_g

$y_2 := g(x_2)$ $\qquad y_2 = 1$ $\qquad \boxed{HP_g(0, 1)}$

Teilaufgabe 2.2 **(5 BE)**
Bestimmen Sie die Gleichung der Asymptote von G_g und zeichnen Sie G_g unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse für $-8 \le x \le 4$ in das Koordinatensystem von Aufgabe 1.4.

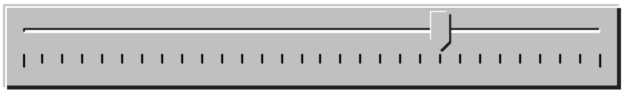
$$\lim_{x \to -\infty} \frac{4 \cdot x + 8}{x^2 + 4 \cdot x + 8} \to 0 \qquad \lim_{x \to \infty} \frac{4 \cdot x + 8}{x^2 + 4 \cdot x + 8} \to 0$$

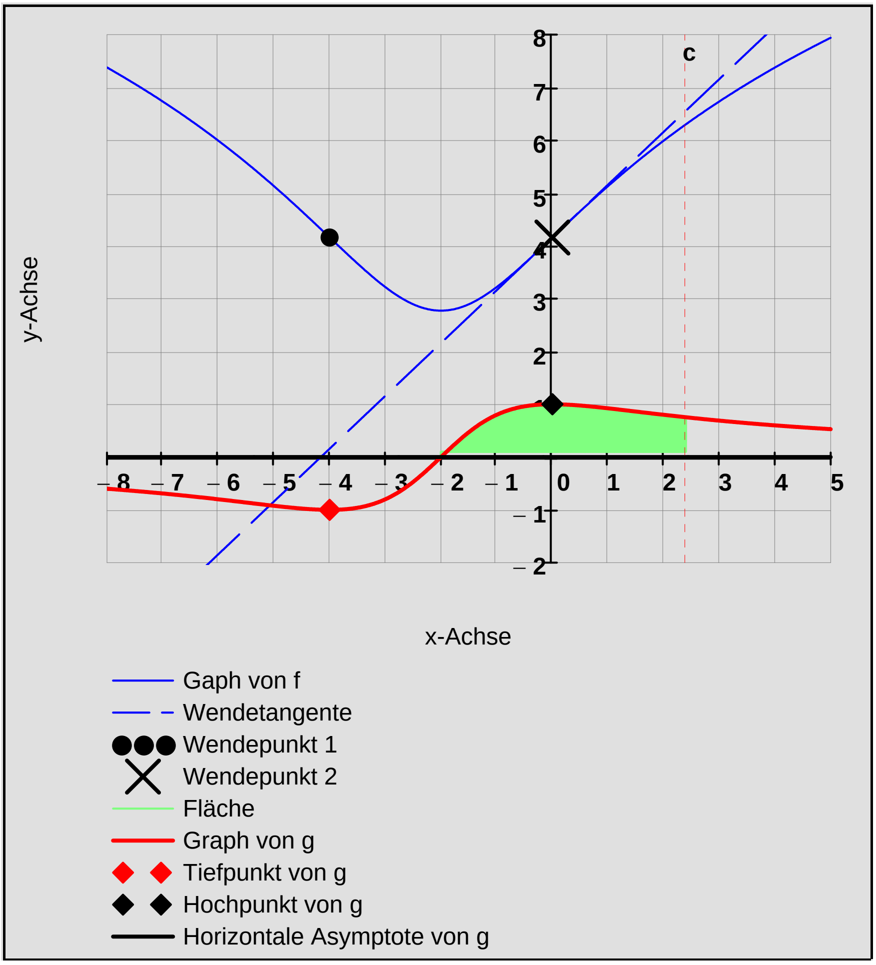
Zählergrad von g kleiner Nennergrad von g: horizontale Asymptote $\boxed{y_0 := 0}$

Zeichnung siehe 2.3 mit Fläche

Teilaufgabe 2.3 **(5 BE)**
Berechnen Sie in Abhängigkeit von c den Inhalt $A(c)$ der Fläche, die G_g mit der x-Achse und der Geraden mit der Gleichung $x = c \wedge c > -2$ einschließt, und untersuchen Sie, ob $A(c)$ für $c \rightarrow \infty$ endlich ist.

Wählen Sie c:





$c = 2.4$

$$A(c) := \int_{-2}^{c} g(x)\, dx$$

$A(c) = 3.5$

Fläche: $$A(c) := \int_{-2}^{c} g(x)\, dx$$

f ist Stammfunktion von g: $$A(c) := f(c) - f(-2) \rightarrow 2 \cdot \ln\left[(c+2)^2 + 4\right] - 2 \cdot \ln(4)$$

$$\lim_{c \rightarrow \infty} \left[2 \cdot \ln\left[(c+2)^2 + 4\right] - 2 \cdot \ln(4)\right] \rightarrow \infty$$

$$\downarrow$$

$$\infty$$

Die Fläche $A(c)$ ist also nicht endlich.

Teilaufgabe 3.0
Eine bayerische Gemeinde gab 2006 im Vorfeld der Fortschreibung des Flächennutzungsplanes auf die kommenden Jahre eine Prognose für die Entwicklung der Einwohnerzahl in Auftrag. Das beauftragte Institut sollte aus folgendem Datensatz als mathematisches Modell eine reelle Funktion $N(t)$ aufstellen, die die Einwohnerzahl N in Abhängigkeit von der Zeit t in Jahren seit 1995 annähernd beschreibt und deren Wert für die weitere Entwicklung der Einwohnerzahl ab 2005 zugrunde gelegt werden sollen.
Für den 1.1.1995 wird $t = 0$ gesetzt.
Auf die Mitführung von Einheiten kann im Folgenden verzichtet werden.

"Jahr (Stand am 1.1.)"	1995	...	2000	2001	2002	2003	2004	2005
"Einwohnerzahl"	14416	...	15446	15631	15805	15966	16127	16286

Teilaufgabe 3.1 (4 BE)
Um einen geeigneten Ansatz zu finden, sind folgende Fragen zu beantworten. Die Antworten sind kurz zu begründen. Gehen Sie dabei davon aus, dass die Näherungsfunktion zu jedem Zeitpunkt die Eigenschaften hat, die sich aus den Werten der Tabelle ergeben.
A) Sollte die 1. Ableitung stets positiv oder negativ sein?
B) Sollte der Graph der Näherungsfunktion stets rechts- oder linksgekrümmt sein?
C) Hat die gesuchte Funktionsgleichung die Form $y = m \cdot x + b$?

A) Die Enwohnerzahl steigt, also sollte die 1. Ableitung positiv sein.

B) Die Änderungsrate (siehe unten) wird kleiner, deshalb sollte der Graph rechtsgekrümmt sein.

$15631 - 15446 = 185 \qquad 15805 - 15631 = 174 \qquad 15966 - 15805 = 161 \qquad 16286 - 16127 = 159$

C) Nein, denn die 2. Ableitung der Geraden wäre Null, also nicht rechtsgekrümmt.

Teilaufgabe 3.2 (5 BE)
Die Erkenntnisse von 3.1 legen nahe, den Ansatz für eine beschränkte Wachstumsfunktion der Form $N(t) = C - a \cdot e^{-k \cdot t}$ mit $C, a, k \in IR^{+}$ zu wählen.
Bestimmen Sie aus den Einwohnerzahlen der Jahre 2000 und 2005 die Werte für a und k, wenn gilt: $C = 20000$
[Ergebnis: $N(t) = 20000 - 5584 \cdot e^{-0.04078 \cdot t}$]

$$N(t, a, k) := 20000 - a \cdot e^{-k \cdot t}$$

$$N(5, a, k) = 15446 \rightarrow 20000 - a \cdot e^{-5 \cdot k} = 15446 \qquad (1)$$

$$N(10, a, k) = 16286 \rightarrow 20000 - a \cdot e^{-10 \cdot k} = 16286 \qquad (2)$$

Gleichung **(1)** $\quad 4554 = a \cdot e^{-5 \cdot k} \qquad$ Gleichung **(2)** $\quad 3714 = a \cdot e^{-10 \cdot k}$

$$\frac{(1)}{(2)} \qquad \frac{4554}{3714} = e^{5 \cdot k}$$

Logarithmieren: $\quad 5 \cdot k = \ln\left(\frac{4554}{3714}\right) \qquad k := \frac{1}{5} \cdot \ln\left(\frac{4554}{3714}\right) \qquad k = \frac{\ln\left(\frac{759}{619}\right)}{5} \qquad k = 0.04078$

In **(1)** $\quad a := \frac{4554}{e^{-5 \cdot k}} \qquad a = \frac{3456486}{619} \qquad a = 5584$

Teilaufgabe 3.3 (3 BE)
Überprüfen Sie, ob das Modell die Einwohnerzahl von 2003 richtig angibt und prognostizieren Sie mit Hilfe des Modells die Einwohnerzahl für 2030.

Gegeben: $N(t) := 20000 - 5584 \cdot e^{-0.04078 \cdot t}$

Jahr 2003: $N(8) = 15970$

Tabelle: $N_{2003} := 15966$ geringe Abweichung, Modell stimmt

Jahr 2030: $N(35) = 18660$

Teilaufgabe 3.4 (2 BE)
Beschreiben Sie die Bedeutung des Wertes von C im Sachzusammenhang.

Nach sehr langer Zeit: $\lim_{t \to \infty} N(t) \rightarrow 20000.0$

C = 20000 ist also die Obergrenze für die Einwohnerzahl.

Teilaufgabe 3.5 (3 BE)
Berechnen Sie den Wert der 1. Ableitung $\frac{d}{dt}N(t)$ an der Stelle **t = 14** und interpretieren Sie dessen Bedeutung.

1. Ableitung: $N'(t) := \frac{d}{dt}N(t) = 227.7 \cdot e^{-0.04078 \cdot t}$

Zeitpunkt t = 14: $N'(14) = 128.652$ gerundet: $N'(14) = 129$

Das ist die **lokale** Änderungsrate am 01.01.2009, die Zuwachsrate **in diesem** Jahr beträgt durchschnittlich 129.

Teilaufgabe 3.6 (4 BE)
Die Kanalisation der Gemeinde ist für ca. **19000** Einwohner ausgelegt. Berechnen Sie, wann gemäß dem Modell mit einer Überschreitung dieser Einwohnerzahl zu rechnen ist.

$N(t) = 19000 \rightarrow 20000 - 5584 \cdot e^{-0.04078 \cdot t} = 19000$

Auflösen: $t_0 := N(t) = 19000 \rightarrow 42.0$

Nach 42 Jahren, also im Jahr 2037 wird die Einwohnerzahl voraussichtlich überschritten.