Abschlussprüfung Berufliche Oberschule 2009
Mathematik 13 Nichttechnik - A II - Lösung

Teilaufgabe 1.0

Gegeben ist die Funktion $f(x) := \dfrac{6 - 6 \cdot x}{(x+1)^2}$ in ihrer größtmöglichen Definitionsmenge $D_f \subset IR$.

Ihr Graph wird heißt G_f .

Teilaufgabe 1.1 (5 BE)

Bestimmen Sie D_f und geben Sie die Achsenschnittpunkte von G_f sowie die Art der Definitionslücke von f an. Ermitteln Sie das Verhalten von $f(x)$ bei Annäherung an die Definitionslücke.

Definitionsmenge: $D_f = IR \setminus \{ -1 \}$

Nullstelle: $f(x) = 0$ auflösen, $x \rightarrow 1$ $\quad S_x(1, 0)$

SP y-Achse: $f(0) \rightarrow 6$ $\quad S_y(0, 6)$

Verhalten an der Definitionslücke:

$$\lim_{x \to -1^-} \frac{\overset{\overset{12}{\uparrow}}{6 - 6 \cdot x}}{\underset{\underset{0^+}{\downarrow}}{(x+1)^2}} \rightarrow \infty \qquad \lim_{x \to -1^+} \frac{\overset{\overset{12}{\uparrow}}{6 - 6 \cdot x}}{\underset{\underset{0^+}{\downarrow}}{(x+1)^2}} \rightarrow \infty$$

$\Rightarrow$ $x = -1$ ist Polstelle ohne Vorzeichenwechsel

Teilaufgabe 1.2 (4 BE)

Geben Sie die Gleichungen aller Asymptoten des Graphen G_f an und untersuchen Sie, ob sich der Graph für $x \rightarrow +\infty$ seiner waagrechten Asymptote von oben oder von unten annähert.

G_f besitzt die vertikale Asymptote $x = -1$

G_f besitzt die horizontale Asymptote $y_0 = 0$, denn Zählergrad < Nennergrad

Annäherung von oben, denn:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{6 - 6\cdot x}{(x+1)^2} = \lim_{x \to -\infty} \left[\frac{x\cdot\left(\frac{6}{x} - 1\right)}{x^2\cdot\left(1 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}\right)} \right] = \lim_{x \to -\infty} \left[\frac{\overset{-1}{\overset{\uparrow}{\left(\frac{6}{x} - 1\right)}}}{\underset{-\infty}{\underset{\downarrow}{x}}\cdot\left(1 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}\right)} \right] \rightarrow 0^{+}$$

Annäherung von unten, denn:

$$\lim_{x \to \infty} \left[\frac{\overset{-1}{\overset{\uparrow}{\left(\frac{6}{x} - 1\right)}}}{\underset{-\infty}{\underset{\downarrow}{x}}\cdot\left(1 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}\right)} \right] \rightarrow 0^{-}$$

Teilaufgabe 1.3 **(6 BE** Untersuchen Sie G_f auf Extrempunkte und bestimmen Sie gegebenenfalls deren Art und Koordinaten.

[Teilergebnis: $f'(x) := \frac{6\cdot x - 18}{(x+1)^3}$]

$$f'(x) = \frac{-6\cdot(x+1)^2 - (6 - 6\cdot x)\cdot 2\cdot(x+1)}{(x+1)^4} = \frac{-6\cdot x - 6 - 12 + 12\cdot x}{(x+1)^3} = \frac{6\cdot x - 18}{(x+1)^3}$$

Horizontale Tangenten: $x_E := 6\cdot x - 18 = 0 \text{ auflösen}, x \;\rightarrow 3$

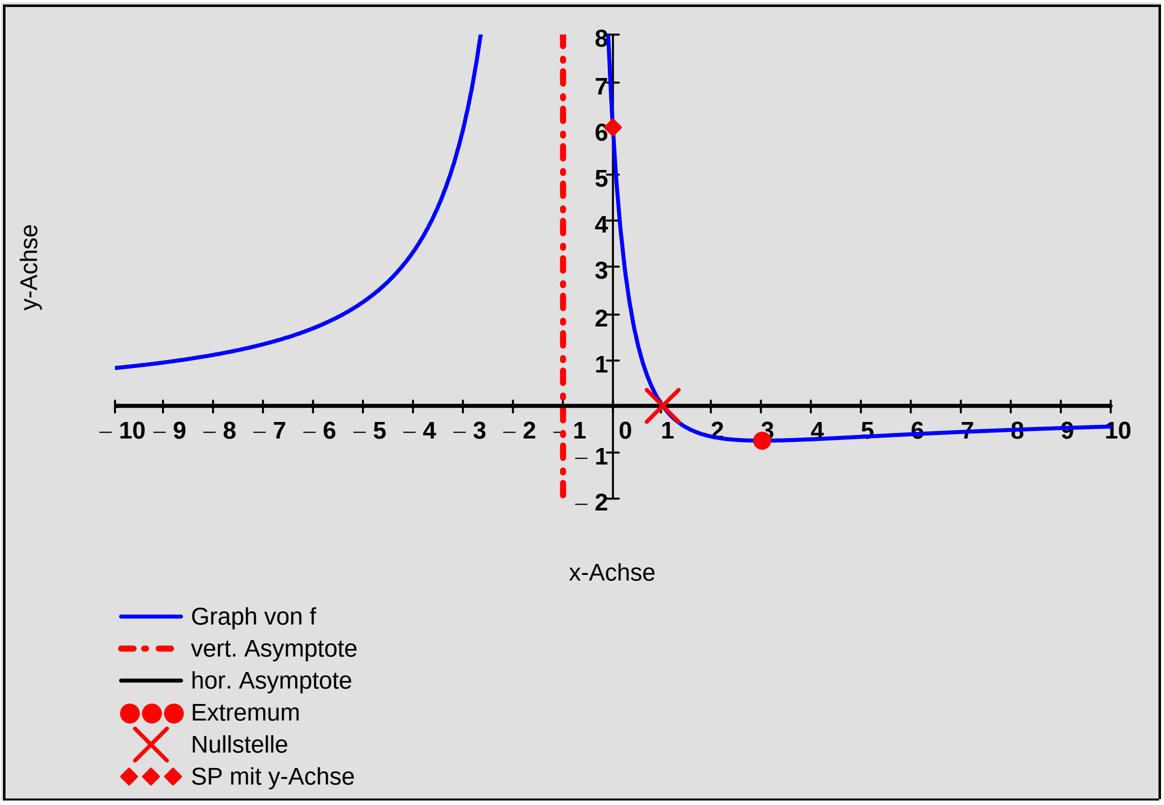
$x \neq -1$

		-1		3	
Zähler	neg		neg		pos
Nenner	neg		pos		pos
G_f	smf		smf		sms
		Polstelle		Tiefpunkt	

$f(x_E) \rightarrow -\frac{3}{4}$

$TP\left(3, -\frac{3}{4}\right)$

Teilaufgabe 1.4 (4 BE)
Zeichnen Sie die Asymptoten von G_f in ein Koordinatensystem und skizzieren Sie G_f nur unter Berücksichtigung der bisherigen Erkenntnisse ohne Berechnung weiterer Funktionswerte in dieses Koordinatensystem. (1 LE entspricht 1 cm)



Teilaufgabe 1.5 (7 BE)
Weisen Sie nach, dass sich der Funktionsterm $f(x)$ auch in der Form $f(x) = \frac{12}{(x+1)^2} - \frac{6}{(x+1)}$ darstellen lässt.

Verwenden Sie diese Darstellung des Funktionsterms dazu, das Integral $\int_0^1 f(x)\,dx$ zu bestimmen und beschreiben Sie die geometrische Bedeutung des berechneten Wertes.

$$\frac{12}{(x+1)^2} - \frac{6}{(x+1)} = \frac{12 - 6\cdot(x+1)}{(x+1)^2} = \frac{6 - 6\cdot x}{(x+1)^2} = f(x)$$

Stammfunktion: $F(x) := \int \left[-\frac{6}{(x+1)} + \frac{12}{(x+1)^2} \right] dx \rightarrow -6\cdot\ln(x+1) - \frac{12}{x+1}$

Integral: $F(1) - F(0) \rightarrow 6 - 6\cdot\ln(2)$ Fläche zwischen Graph und positiven Koordinatenachsen

Teilaufgabe 2.0
Gegeben ist die Funktion $g(x) := 4 \cdot \ln(x) \cdot (2 - \ln(x))$ in ihrer größtmöglichen Definitionsmenge $D_g \subset IR$. Ihr Graph wird mit G_g bezeichnet.

Teilaufgabe 2.1 **(6 BE)**
Geben Sie D_g an, berechnen Sie alle Nullstellen von g und untersuchen Sie das Verhalten von **g** an den Rändern von D_g.

Definitionsmenge: $D_g = IR^+$

Nullstellen: $x_0 := g(x) = 0 \rightarrow -4 \cdot \ln(x) \cdot (\ln(x) - 2) = 0 \text{ auflösen}, x \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ e^2 \end{pmatrix}$

$x_1 := x_{0_1}$ $\quad x_1 = 1$ $\quad x_2 := x_{0_2}$ $\quad x_2 = e^2 = 7.389$

$$\lim_{x \to 0^+} [\underbrace{4 \cdot \ln(x)}_{-\infty} \cdot \underbrace{(2 - \ln(x))}_{-\infty}] \rightarrow -\infty \qquad \lim_{x \to \infty} [\underbrace{4 \cdot \ln(x)}_{\infty} \cdot \underbrace{(2 - \ln(x))}_{\infty}] \rightarrow -\infty$$

Teilaufgabe 2.2 **(7 BE)**
Ermitteln Sie das Monotonieverhalten von **g** und bestimmen Sie daraus die Koordinaten und die Art des Extrempunktes von G_g.

[Teilergebnis: $g'(x) := \dfrac{8 \cdot (1 - \ln(x))}{x}$]

1. Ableitung: $$g'(x) = \frac{4}{x} \cdot (2 - \ln(x)) + \frac{4 \cdot \ln(x)}{-x} = \frac{8 - 4 \cdot \ln(x) - 4 \cdot \ln(x)}{x} = \frac{8 - 8 \cdot \ln(x)}{x}$$

Horizontale Tangenten: $x_E := 8 - 8 \cdot \ln(x) = 0 \text{ auflösen}, x \rightarrow e$

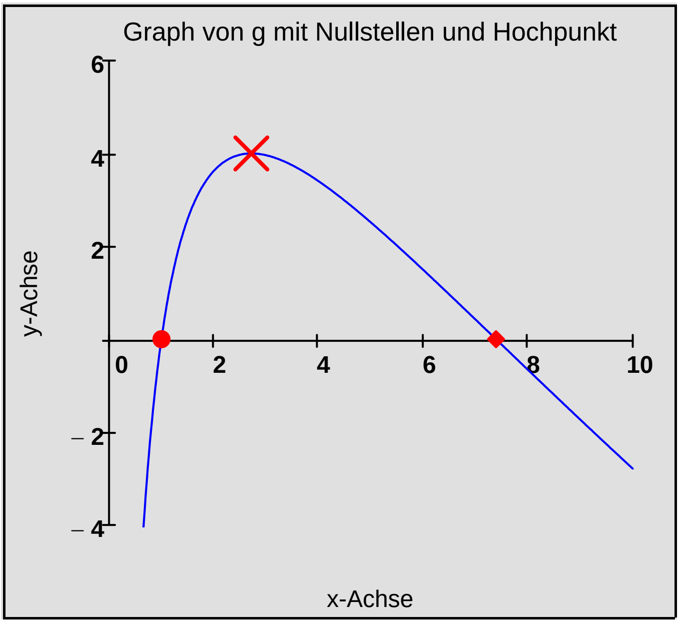
		0		e	
Zähler	nicht definiert		pos		neg
Nenner	nicht definiert		pos		pos
g '(x)	nicht definiert		pos		neg
G_g	nicht definiert		sms		smf
		Pol		Hochpunkt	

Exttremum ist ein Hochpunkt

$g(x_E) \rightarrow 4$

$HP(e, 4)$

Zeichnung in der Prüfung nicht verlangt:



Teilaufgabe 3.0
Seit 1970 wird der weltweite Ausstoß eines bestimmten Schadstoffes gemessen, der im Verdacht steht, gesundheitsgefährdend zu sein. Eine Besorgnis erregende Zunahme des Schadstoffes hat zu vielfältigen wissenschaftlichen Untersuchungen der Thematik geführt. Die jährliche Emission dieses Schadstoffes betrug 1970 in den heutigen EU-Ländern 398 Mengeneinheiten (ME) und 1986 562 ME. Ein erstes Modell beschreibt für den Zeitpunkt t die EU-weite Emissionsrate des Schadstoffes in ME für den Zeitraum eines Jahres vor dem Zeitpunkt t durch die Funktion s_1 mit

$$s_1(t) = c \cdot e^{k \cdot t} \quad (c, k \in \mathbb{R}^+).$$

$t = 0$ steht für den Beginn des Jahres 1971.
Auf die Mitführung von Einheiten kann im Folgenden verzichtet werden.

Teilaufgabe 3.1 **(3 BE)**
Berechnen Sie aus obigen Messwerten die Werte für c und k.

[Ergebnis: **c = 398 [ME]** und $k = 0.0216 \left[\frac{1}{a} \right]$]

$$s_1(t, c, k) := c \cdot e^{k \cdot t}$$

Jahr 1970: $\quad s_1(0, c, k) = 398 \rightarrow c = 398 \qquad (1)$

Jahr 1986: $\quad s_1(16, c, k) = 562 \rightarrow c \cdot e^{16 \cdot k} = 562 \qquad (2)$

(1) in (2): $\quad e^{16 \cdot k} = \frac{562}{398} \qquad k := \frac{1}{16} \cdot \ln\left(\frac{562}{398}\right) \qquad k = 0.0216$

$$\Rightarrow \qquad s_1(t) := 398 \cdot e^{0.0216 \cdot t}$$

Teilaufgabe 3.2 (4 BE)
Bestimmen Sie das Jahr, in welchem sich nach diesem Modell die Emission des Schadstoffes in der EU gegenüber 1970 um 50% erhöht hätte.

Ansatz: $398 \cdot e^{0.0216 \cdot t} = 1.5 \cdot 398$ $\qquad t_0 := \frac{1}{0.0216} \cdot \ln(1.5)$ $\qquad t_0 = 18.77$

gerundet $t_0 = 19$ Das entspricht dem Jahr 1989.

Teilaufgabe 3.3 (4 BE)

Berechnen Sie das Integral $\int_0^{21} s_1(t)\, dt$ und erläutern Sie die Bedeutung des Wertes im Sinne der Thematik.

Stammfunktion: $S(t) := \int 398 \cdot e^{0.0216 \cdot t}\, dt = 18440.0 \cdot e^{0.0216 \cdot t}$

Integral: $\int_0^{21} 398 \cdot e^{0.0216 \cdot t}\, dt = 10576$

Das ist der gesamte Schadstoffausstoß von 1.1.1971 bis 31.12.1991.

Teilaufgabe 3.4.0
In den Jahren 1987 bis 1991 wurden in der EU neue gesetzliche Regelungen erarbeitet, da der Schadstoff als krebserregend erkannt wurde. Diese Regelungen wurden ab 1.1.1992 wirksam und sollten zu einer Entschärfung der Situation führen. Nach einem zweiten Modell sollte die künftige jährliche Emission des Schadstoffes in der EU nach der Funktion $s_2(t) = 1200 - 941 \cdot e^{-0.0235 \cdot t}$ (in ME) verlaufen.

Nun ist $s(t) = \begin{cases} s_1(t) & \text{if } t \le 21 \\ s_2(t) & \text{if } t > 21 \end{cases}$

Teilaufgabe 3.4.1 (3 BE)
Zeigen Sie, dass die aus s_1 und s_2 auf diese Weise neu entstandene abschnittweise definierte Funktion **s** - im Rahmen der hier möglichen Genauigkeit - an der "Nahtstelle" $t_0 = 21$ stetig ist.

$$\lim_{t \to 21^-} \left(398 \cdot e^{0.0216 \cdot t}\right) \to 626.0$$

$$\lim_{t \to 21^+} \left(1200 - 941 \cdot e^{-0.0235 \cdot t}\right) \to 626.0$$

Funktionswert $\qquad s_1(21) = 626$

Teilaufgabe 3.4.2 (4 BE)
Zeigen Sie, dass trotz der neuen gesetzlichen Regelungen die Emission des Schadstoffes in der EU weiter zunimmt, die jährliche Zunahme jedoch geringer wird.

Für t>21: $s_2(t) := 1200 - 941 \cdot e^{-0.0235 \cdot t}$

Ableitung: $\frac{d}{dt}\left(1200 - 941 \cdot e^{-0.0235 \cdot t}\right) \rightarrow 22.1135 \cdot e^{-0.0235 \cdot t}$ ist größer 0

Der Graph steigt also weiter steng monoton.

Änderungsrate der Ableitung: $\frac{d^2}{dt^2}\left(1200 - 941 \cdot e^{-0.0235 \cdot t}\right) \rightarrow -0.51966725 \cdot e^{-0.0235 \cdot t}$

ist kleiner 0, also wird die Zunahme geringer

Teilaufgabe 3.4.3 (3 BE)
Untersuchen Sie das Verhalten von **s(t)** für die ferne Zukunft und interpretieren Sie das Verhalten im Sachzusammenhang.
Im Jahr 2007 betrug die reale Jahresemission des Schadstoffes in der EU 753 ME. Vergleichen Sie diesen Wert und kommentieren Sie den Unterschied der Werte.

$$\lim_{t \to \infty} \left(1200 - 941 \cdot \underbrace{e^{-0.0235 \cdot t}}_{\downarrow \atop 0}\right) \rightarrow 1200.0$$

Das ist der maximale Schadstoffausstoß, er wird nahezu konstant.

erwartete Emission im Jahr 2007: $s_2(37) = 806$

tatsächliche Emission von 753 geringer als erwartet.

Zeichnung in der Prüfung nicht verlangt