Abschlussprüfung Berufliche Oberschule 2009
Mathematik 13 Nichttechnik - B I - Lösung

Teilaufgabe 1.0
In einem kartesischen Koordinatensystem des IR^3 sind die Gerade

$g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ 5 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, die Ebene E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ mit r, s, t $\in$ IR , und die

Ebene **F:** $-4 \cdot x_2 + 2 \cdot x_3 + 1 = 0$ gegeben.

Vorbemerkung:
Bei den Berechnungen mit dem Programm ist keine vektorielle Schreibweise mit "Pfeil" möglich.

Teilaufgabe 1.1 (3 BE)
Ermitteln Sie eine Gleichung der Ebene E in Koordinatenform.
[Mögliches Ergebnis: **E:** $8 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 - x_3 - 33 = 0$]

Eintragen in Gauß-Matrix. diagonalisieren:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & x_1 - 3 \\ 2 & 1 & x_2 - 2 \\ 0 & 4 & x_3 + 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{(II) + 2 \cdot (I)} \begin{pmatrix} -1 & 0 & x_1 - 3 \\ 0 & 1 & x_2 - 8 + 2 \cdot x_1 \\ 0 & 4 & x_3 + 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[(III) - 4 \cdot (II)]{} \begin{pmatrix} -1 & 0 & x_1 - 3 \\ 0 & 1 & x_2 - 8 + 2 \cdot x_1 \\ 0 & 0 & -8 \cdot x_1 - 4 \cdot x_2 + x_3 + 33 \end{pmatrix}$$

Ebene E: $8 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 - x_3 - 33 = 0$

Teilaufgabe 1.2 (3 BE)
Bestimmen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes S der Geraden g mit der Ebene E.
[Ergebnis: **S(1/7/3)**]

Gerade g: $g(r) := \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ 5 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Ebene E: $E(x_1, x_2, x_3) := 8 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 - x_3 - 33$

g $\cap$ E: $r_1 := E(g(r)_1, g(r)_2, g(r)_3) = 0 \rightarrow 11 \cdot r + 22 = 0$ **auflösen**, r $\rightarrow -2$

Schnittpunkt: $S := g(r_1)^T \qquad S \rightarrow (1\ \ 7\ \ 3)$

Teilaufgabe 1.3 (3 BE)
Geben Sie die besondere Lage von F im Koordinatensystem an und bestimmen Sie die Schnittpunkte von F mit den Koordinatenachsen.

F: $-4 \cdot x_2 + 2 \cdot x_3 + 1 = 0$

Ebene F: x_1 Koordinate fehlt und Konstante ungleich Null, also liegt die Ebene F echt parallel zur x_1-Achse.

Schnittpunkt mit x_2-Achse: $x_3 = 0$ $\quad x_2 = \frac{1}{4}$ $\quad S_2 := \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}$

Schnittpunkt mit x_3-Achse: $x_2 = 0$ $\quad x_3 = -\frac{1}{2}$ $\quad S_3 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

Teilaufgabe 1.4 (4 BE)
Ermitteln Sie eine Gleichung der Schnittgerade h der Ebenen E und F.

[Mögliches Ergebnis: h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0.25 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}$]

E ∩ F : $\begin{pmatrix} 8 & 4 & -1 & 33 \\ 0 & -4 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

Wähle $x_3(\lambda) := \lambda$ $\quad x_2(\lambda) := \frac{1}{4} \cdot \left(2 \cdot x_3(\lambda) + 1\right)$ $\quad x_2(\lambda) \rightarrow \frac{\lambda}{2} + \frac{1}{4}$

$x_1(\lambda) := \frac{1}{8} \cdot \left(33 - 4 \cdot x_2(\lambda) + x_3(\lambda)\right)$ $\quad x_1(\lambda) \rightarrow 4 - \frac{\lambda}{8}$

Schnittgerade: $h(\lambda) := \begin{pmatrix} x_1(\lambda) \\ x_2(\lambda) \\ x_3(\lambda) \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 4 - \frac{\lambda}{8} \\ \frac{\lambda}{2} + \frac{1}{4} \\ \lambda \end{pmatrix}$

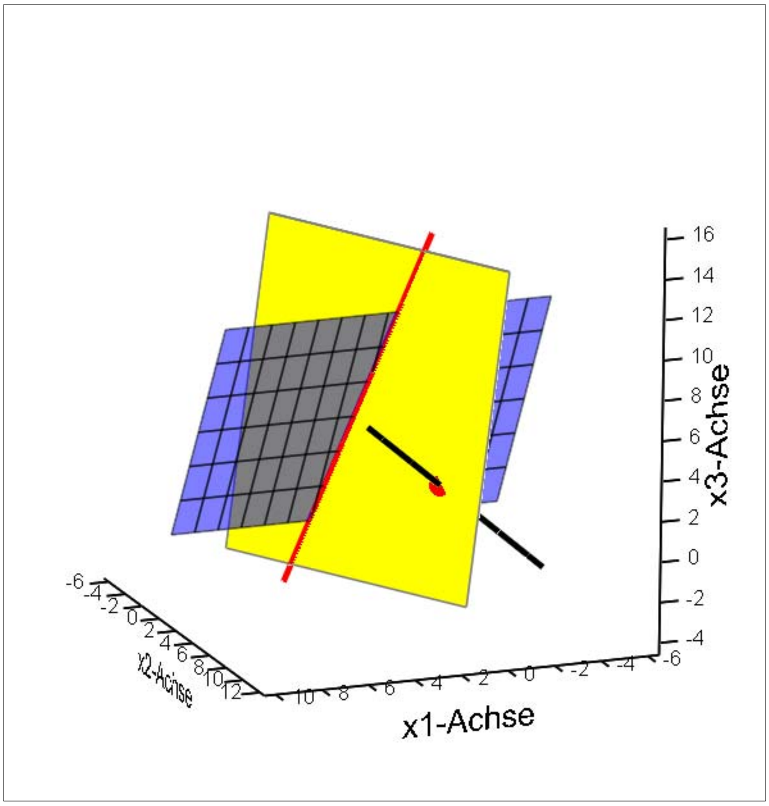
Teilaufgabe 1.5 (6 BE)
Überprüfen Sie, ob der Punkt S aus Aufgabe 1.2 auf der Geraden h liegt, schließen Sie aus dem Ergebnis auf die gegenseitige Lage von g und h und fertigen Sie eine Skizze, aus der die gegenseitige Lage von E, g und h hervorgeht.

$$s := S^T \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}$$ einsetzen in Geradengleichung:

$$s = \begin{pmatrix} h(\lambda_1)_1 \\ h(\lambda_2)_2 \\ h(\lambda_3)_3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 - \frac{\lambda_1}{8} \\ \frac{\lambda_2}{2} + \frac{1}{4} \\ \lambda_3 \end{pmatrix} \text{ auflösen}, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \rightarrow \begin{pmatrix} 24 & \frac{27}{2} & 3 \end{pmatrix}$$

λ_i sind nicht identisch, also liegt S nicht auf h.

(1) S ist Schnittpunkt von g und E, also g $\notin$ E.
(2) h liegt als Schnittgerade in E und S $\notin$ h
$\Rightarrow$ g und h liegen windschief zueinander.



Ebene E: gelb
Ebene F: blau
Gerade h: rot
Gerade g: schwarz
Punkt S: rot

Teilaufgabe 2.0
Die Länder A, B und C sind untereinander und mit dem Weltmarkt nach dem Leontief-Modell mit der Inputmatrix $\mathbf{M} := \begin{pmatrix} 0.2 & 0.05 & 0.05 \\ 0.2 & 0.6 & 0.1 \\ 0.2 & 0.2 & 0.6 \end{pmatrix}$ verflochten.

Teilaufgabe 2.1 (2 BE)
Interpretieren Sie die Bedeutung der Werte $\mathbf{a_{11}}$ und $\mathbf{a_{21}}$ der Inputmatrix M.

$a_{11} := 0.2$ das heißt, 20% der Produkte im Land A werden im eigenen land benötigt.

$a_{21} := 0.2$ das heißt, für die Produktion einer Mengeneinheit benötigt Land A von Land B 0,2 Mengeneinheiten.

Teilaufgabe 2.2 (6 BE)
Erstellen Sie die Input-Output-Tabelle und zeichnen Sie das Verflechtungsdiagramm (Gozintograph) für den Produktvektor $\mathbf{x} = (100 \quad 160 \quad 200)^T$

Gegeben: $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.05 & 0.05 \\ 0.2 & 0.6 & 0.1 \\ 0.2 & 0.2 & 0.6 \end{pmatrix}$ $\mathbf{x} := \begin{pmatrix} 100 \\ 160 \\ 200 \end{pmatrix}$

Gesucht: y, Warenflussmatrix

Grundgleichung für Verflechtungen: $(\mathbf{E} - \mathbf{M}) \cdot \vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{y}}$

Definitionen

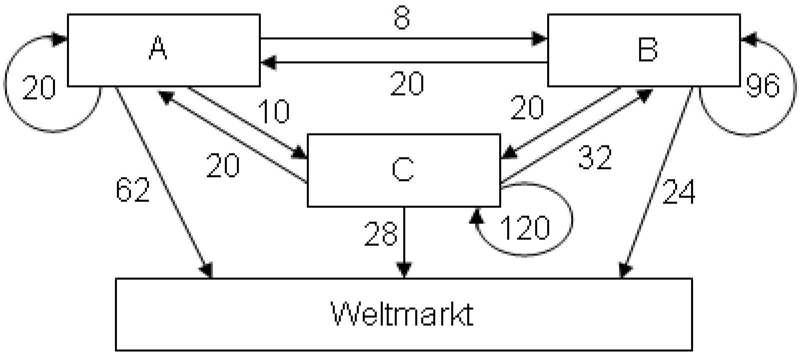
Zwischenrechnung: $\mathbf{E} - \mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0.8 & -0.05 & -0.05 \\ -0.2 & 0.4 & -0.1 \\ -0.2 & -0.2 & 0.4 \end{pmatrix}$ $\mathbf{y} := (\mathbf{E} - \mathbf{M}) \cdot \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 62.0 \\ 24.0 \\ 28.0 \end{pmatrix}$

Marktvektor: $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 62 \\ 24 \\ 28 \end{pmatrix}$

Verflechtungsmatrix: $\mathbf{V0} := \begin{pmatrix} M_{1,1} \cdot x_1 & M_{1,2} \cdot x_2 & M_{1,3} \cdot x_3 \\ M_{2,1} \cdot x_1 & M_{2,2} \cdot x_2 & M_{2,3} \cdot x_3 \\ M_{3,1} \cdot x_1 & M_{3,2} \cdot x_2 & M_{3,3} \cdot x_3 \end{pmatrix}$ $\mathbf{V0} = \begin{pmatrix} 20 & 8 & 10 \\ 20 & 96 & 20 \\ 20 & 32 & 120 \end{pmatrix}$

Berechnungen

Warenflussmatrix =	"Länder"	"A"	"B"	"C"	"y"	"x"
	"A"	20	8	10	62	100
	"B"	20	96	20	24	160
	"C"	20	32	120	28	200



Teilaufgabe 2.3 (8 BE)
Eine Wirtschaftskrise in A führt dazu, dass A kurzzeitig keine Güter an den Weltmarkt liefern kann. Die Produktionsmengen von B und C sollen in diesem Zeitraum gleich groß sein. Berechnen Sie das Verhältnis der Produktionsmengen von C und A. Bestimmen Sie, wie viel Prozent ihrer Produktion B und C an den Weltmarkt abgeben können.

Es gilt: $x_1 = x_2$

Ansatz:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = (E - M) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.8 \cdot x_1 + -0.1 \cdot x_2 \\ -0.2 \cdot x_1 + -0.1 \cdot x_2 + 0.4 \cdot x_2 \\ -0.2 \cdot x_1 + -0.2 \cdot x_2 + 0.4 \cdot x_2 \end{pmatrix}$$

Vereinfacht:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.8 \cdot x_1 - 0.1 \cdot x_2 \\ -0.2 \cdot x_1 + 0.3 \cdot x_2 \\ -0.2 \cdot x_1 + 0.2 \cdot x_2 \end{pmatrix} \text{ auflösen}, x_1, y_2, y_3 \rightarrow \begin{pmatrix} 0.125 \cdot x_2 & 0.275 \cdot x_2 & 0.175 \cdot x_2 \end{pmatrix}$$

Lösung:

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{x_1}{x_3} = \frac{1}{8}$$ C produziert die achtfache Menge von A.

$y_2 = 0.275 \cdot x_2 = 27.5 \cdot \% \cdot x_2$ B kann 27,5% an den Weltmarkt abgeben

$y_3 = 0.175 \cdot x_2 = 17.5 \cdot \% \cdot x_2$ C kann 17,5% an den Weltmarkt abgeben

Teilaufgabe 3 (5 BE)
Drei 13. Klassen einer Fach- und Berufsoberschule gehen zu einem Imbissstand zum Essen und geben den Inhalt ihrer Klassenkassen von jeweils 108 € aus. Es werden drei Speisen angeboten: Leberkässemmel (L), Pizza (P) und Gyros (G). Die Tabelle zeigt die jeweils bestellten Mengen.
Berechnen Sie die Preise der einzelnen Speisen.

$$\begin{pmatrix} \blacksquare & \text{"L"} & \text{"P"} & \text{"G"} \\ \text{"13a"} & 9 & 9 & 9 \\ \text{"13b"} & 5 & 9 & 11 \\ \text{"13c"} & 12 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

Aufstellen des Gleichungssystems als Gauß-Matrix:

$$G := \begin{pmatrix} 9 & 9 & 9 & 108 \\ 5 & 9 & 11 & 108 \\ 12 & 8 & 9 & 108 \end{pmatrix}$$

Diagonalisieren

$$D := \text{zref}(G) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Definition Euro: $€ := 1$

Abrufen der Lösung: $x_1 := D_{1,4} \cdot €$ $\quad x_1 = 2 \cdot €$ Leberkäse kostet 2 €

Abrufen der Lösung: $x_2 := D_{2,4} \cdot €$ $\quad x_2 = 6 \cdot €$ Pizza kostet 6 €

Abrufen der Lösung: $x_3 := D_{3,4} \cdot €$ $\quad x_3 = 4 \cdot €$ Gyros kostet 4 €