Abschlussprüfung Berufliche Oberschule 2010
Mathematik 12 Technik - A I - Lösung

Teilaufgabe 1.0

Gegeben ist die reelle Funktion **f** mit $f(x) := 4\cdot\frac{1+\ln(1-x)}{1-x}$ in ihrer größtmöglichen Definitionsmenge D_f.

Teilaufgabe 1.1 (3 BE)
Zeigen Sie, dass $D_f =]-\infty\,;1[$ gilt, und berechnen Sie den exakten Wert der Nullstelle der Funktion **f**.

$$1-x>0 \text{ auflösen}, x \;\rightarrow x<1 \qquad \Rightarrow \qquad D_f =]-\infty\,;1[$$

$$f(x)=0 \qquad \Rightarrow \qquad 1+\ln(1-x)=0 \text{ auflösen}, x \;\rightarrow 1-e^{-1} \qquad x_0 := 1-e^{-1}$$

Teilaufgabe 1.2 (4 BE)
Untersuchen Sie das Verhalten der Funktionswerte f(x) an den Rändern der Definitionsmenge.

$$\lim_{x\to-\infty}\left(4\cdot\frac{\overbrace{1+\ln(1-x)}^{\infty}}{\underbrace{1-x}_{\infty}}\right) \overset{\text{l'Hosp.}}{=} \lim_{x\to-\infty}\left(4\cdot\frac{\frac{-1}{1-x}}{-1}\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{4}{\underbrace{1-x}_{\infty}}\right) \rightarrow 0$$

$$\lim_{x\to1^-}\left(4\cdot\frac{\overbrace{1+\ln(1-x)}^{-\infty}}{\underbrace{1-x}_{0^+}}\right) \rightarrow -\infty$$

Teilaufgabe 1.3 (7 BE)
Bestimmen Sie über die maximalen Monotonieintervalle Art und Lage des Extrempunktes des Graphen von **f**.

[Teilergebnis: $f'(x) := 4\cdot\frac{\ln(1-x)}{(1-x)^2}$]

$$f'(x) = 4\cdot\frac{(1-x)\cdot\frac{-1}{1-x}-(1+\ln(1-x))\cdot(-1)}{(1-x)^2} = 4\cdot\frac{-1+1+\ln(1-x)}{(1-x)^2} = 4\cdot\frac{\ln(1-x)}{(1-x)^2}$$

Horizontale Tangenten: $\ln(1-x) = 0 \quad \Rightarrow \quad 1 - x = 1 \quad \Rightarrow \quad x_E = 0$

		$x = 0$		$x \neq 1$
ln(1-x)	pos		neg	
$(1 - x)^2$	pos		pos	nicht definiert
f '(x)	pos		neg	
Graph von f	sms		smf	
		HP		Polstelle

$f(0) = 4$

Hochpunkt: $H(0, 4)$

Teilaufgabe 1.4 (3 BE)
Bestimmen Sie die Wertemenge der Funktion **f** mithilfe bisheriger Ergebnisse.

$\lim_{x \to 1^-} f(x) \to -\infty$

Wegen Monotonie ist der Hochpunkt absolutes Maximum

$\Rightarrow \quad W =]\,-\infty\,; 4\,]$

Teilaufgabe 1.5 (8 BE)
Untersuchen Sie das Krümmungsverhalten des Graphen von **f** und ermitteln Sie die exakten Koordinaten seines Wendepunktes W.

$$f''(x) = 4 \cdot \frac{(1-x)^2 \cdot \frac{-1}{1-x} - \ln(1-x) \cdot 2 \cdot (1-x) \cdot (-1)}{(1-x)^4} = 4 \cdot \frac{-1 + 2 \cdot \ln(1-x)}{(1-x)^3}$$

$f''(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad -1 + 2 \cdot \ln(1-x) = 0 \text{ auflösen}, x \rightarrow 1 - \sqrt{e} \quad \Rightarrow \quad x_W := 1 - \sqrt{e}$

$x_W = -0.649$

		x_W		$x \neq 1$
Zähler	pos		neg	
$(1 - x)^3$	pos		pos	nicht definiert
f ''(x)	pos		neg	
Graph von f	lk		rk	
		WP		Polstelle

$x = 0$

$f(1 - \sqrt{e}) = 6 \cdot e^{-\frac{1}{2}}$

Wendepunkt: $W\left(1 - \sqrt{e}, \frac{6}{\sqrt{e}}\right)$

Teilaufgabe 1.6 (5 BE)
Bestimmen Sie eine Gleichung der Tangente t an den Graphen von f im Punkt W und berechnen Sie deren Schnittpunkt mit der x-Achse.

[mögliches Teilergebnis: $t(x) = \frac{2}{e} \cdot x + \frac{8 \cdot \sqrt{e} - 2}{e}$]

Steigung im Wendepunkt: $f'\left(1 - \sqrt{e}\right) = 2 \cdot e^{-1}$

Wendetangente $t(x) := \frac{2}{e} \cdot \left(x - 1 + \sqrt{e}\right) + \frac{6}{\sqrt{e}}$

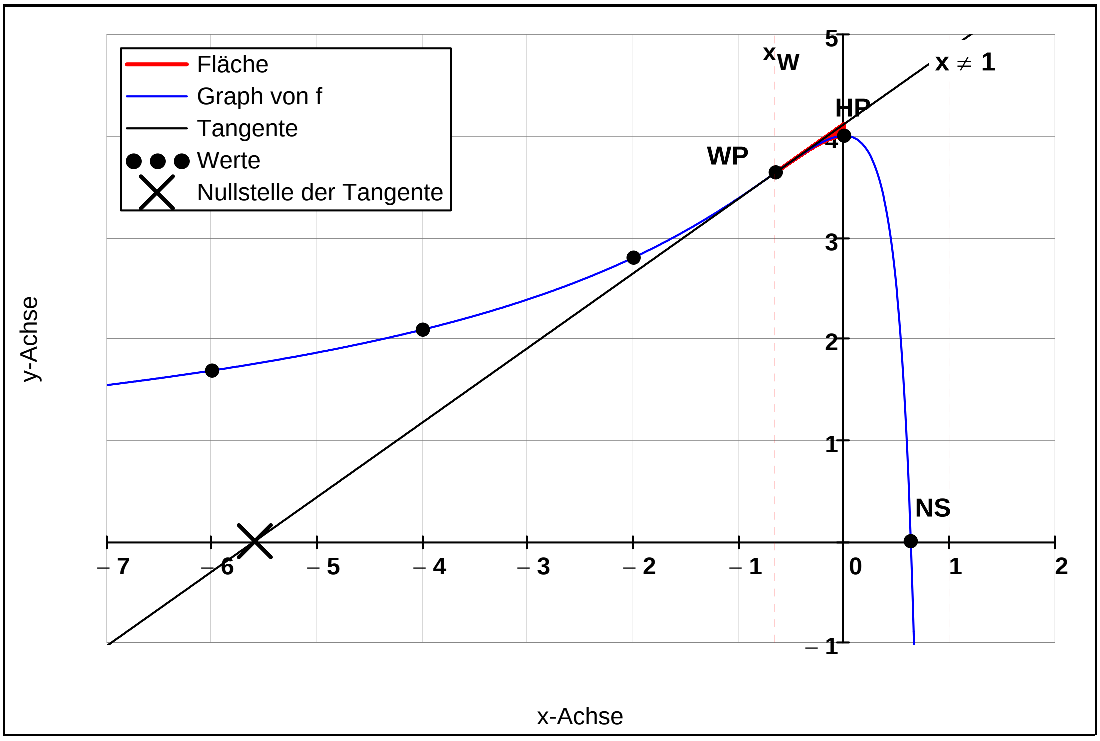
Umformung: $t(x) = \frac{2}{e} \cdot x - \frac{2}{e} + \frac{2 \cdot \sqrt{e}}{e} + \frac{6 \cdot \sqrt{e}}{e}$

Vereinfachen: $t(x) := \frac{2}{e} \cdot x + \frac{8 \cdot \sqrt{e} - 2}{e}$

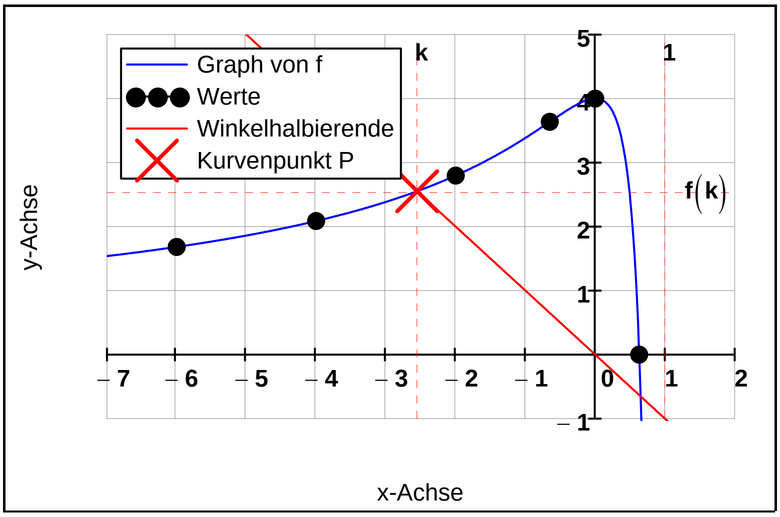
Schnittpunkt: $t(x) = 0 \rightarrow 2 \cdot x \cdot e^{-1} + e^{-1} \cdot \left(8 \cdot \sqrt{e} - 2\right) = 0$ **auflösen** $, x \rightarrow 1 - 4 \cdot \sqrt{e}$

Nullstelle der Tangente: $S_x\left(1 - 4 \cdot \sqrt{e}, 0\right)$

Teilaufgabe 1.7 (4 BE)
Zeichnen Sie mithilfe der vorliegenden Ergebnisse den Graphen der Funktion f und die Tangente t für $-6 \le x \le 0.7$ in ein kartesisches Koordinatensystem mit dem Maßstab **1 LE = 1 cm**.



Teilaufgabe 1.8 (7 BE)
Im zweiten Quadranten liegt ein Punkt **P(k / f(k))** auf dem Graphen von f, dessen Koordinaten die Bedingung $f(k) = -k$ erfüllen. Entnehmen Sie Ihrem Graphen einen geeigneten Startwert k_0 und berechnen Sie mit Hilfe des Newton-Verfahrens einen Näherungswert für die Stelle k. Führen Sie zwei Näherungsschritte durch und geben Sie Ihre Ergebnisse auf drei Nachkommastellen gerundet an.



$$f(k) = -k \quad \Leftrightarrow \quad 4 \cdot \frac{1 + \ln(1-k)}{1-k} = -k$$

$$d(k) := f(k) + k \qquad d(k) := 4 \cdot \frac{1 + \ln(1-k)}{1-k} + k \qquad d'(k) := 4 \cdot \frac{\ln(1-k)}{(1-k)^2} + 1$$

Newton: $\quad k_1 = k_0 - \dfrac{d(k_0)}{d'(k_0)}$

Startwert: $\quad k_0 := -2.5$

$$k_1 := k_0 - \frac{d(k_0)}{d'(k_0)} \qquad d(k_0) = 0.07459 \qquad d'(k_0) = 1.40907$$

$$k_1 = -2.55293$$

$$k_2 := k_1 - \frac{d(k_1)}{d'(k_1)} \qquad d(k_1) = 0.00019513 \qquad d'(k_1) = 1.40172$$

$k_2 = -2.55307$ $\qquad$ gerundet: $\qquad k_2 = -2.553$

Teilaufgabe 1.9 (7 BE)

Zeigen Sie, dass die Funktion $\mathbf{F}$ mit $F(x) = -2\cdot(\ln(1-x))^2 - 4\cdot\ln(1-x)$ in ihrer Definitionsmenge $D_F = D_f$ eine Stammfunktion der Funktion f ist, und berechnen Sie den Flächeninhalt des Flächenstückes, das vom Graphen von f, der Tangente t und der y-Achse eingeschlossen wird. Runden Sie das Ergebnis auf drei Nachkommastellen.

$$F'(x) = -2\cdot 2\cdot(\ln(1-x))\cdot\frac{-1}{1-x} - 4\cdot\frac{-1}{1-x} = \frac{4\cdot\ln(1-x)+4}{1-x} = 4\cdot\frac{\ln(1-x)+1}{1-x} = f(x)$$

Flächenmaßzahlunktion:

$$A(x) = \int (t(x) - f(x))\,dx = \int \left(\frac{2}{e}\cdot x + \frac{8\cdot\sqrt{e}-2}{e} - f(x)\right) dx$$

$$A(x) := \left[\frac{1}{e}\cdot x^2 + \frac{8\cdot\sqrt{e}-2}{e}\cdot x + 2\cdot(\ln(1-x))^2 + 4\cdot\ln(1-x)\right]$$

Grenzen einsetzen:

$A(0) = 0$ $\quad A(1-\sqrt{e}) = -0.016$ $\quad A_{ges} := A(0) - A(1-\sqrt{e})$ $\quad \boxed{A_{ges} = 0.016}$

Teilaufgabe 2.0

Das Hinterrad eines Traktors übt auf den Ackerboden an der Oberfläche einen Druck von $4.0\cdot 10^4\,\mathrm{Pa}$ aus. Der Druck nimmt mit zunehmender Tiefe unter der Oberfläche ab und beträgt in $1.0\cdot\mathrm{m}$ Tiefe nur noch ein Viertel des Wertes an der Oberfläche.

Für die Abhängigkeit des Drucks p in Pascal (Pa) von der Tiefe x in Meter gilt in einem mathematischen Modell die Funktionsgleichung $p(x) = a\cdot e^{-b\cdot x^2}$, wobei $x \geq 0$ und a, b $\in$ IR.

Auf das Mitführen der Einheiten kann verzichtet werden.

Teilaufgabe 2.1 (3 BE)

Bestimmen Sie die Parameterwerte a und b.

[Mögliche Ergebnisse: $a = 4.0\cdot 10^4$, $b = 2\cdot\ln(2)$]

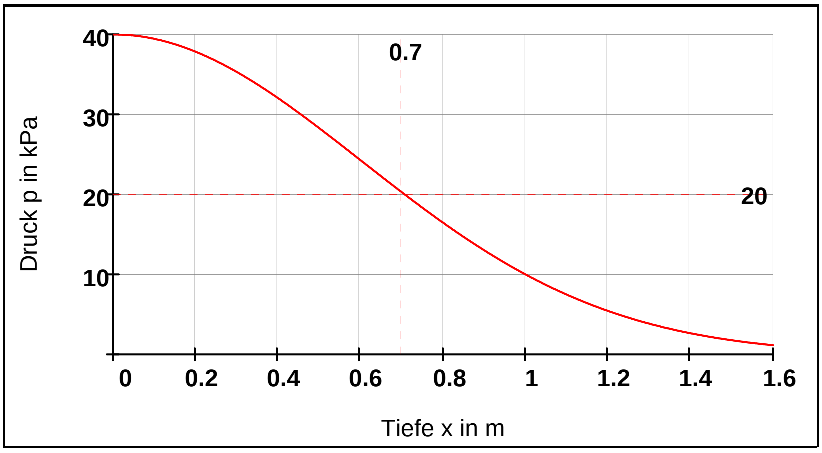
$p(0) = 4\cdot 10^4 \quad\Rightarrow\quad a\cdot e^0 = 4\cdot 10^4 \quad\Rightarrow\quad a = 4\cdot 10^4$

$p(1) = 1\cdot 10^4 \quad\Rightarrow\quad a\cdot e^{-b} = 1\cdot 10^4 \quad\Rightarrow$

$$e^{-b} = \frac{1\cdot 10^4}{a} = \frac{1\cdot 10^4}{4\cdot 10^4} = \frac{1}{4} \quad\Rightarrow\quad -b = \ln\left(\frac{1}{4}\right) \quad\Rightarrow\quad b = \ln(4) = 2\cdot\ln(2)$$

Teilaufgabe 2.2 (3 BE)
Stellen Sie den Druck **p** in Abhängigkeit von der Tiefe x für $0 \le x \le 1.5$ graphisch dar.
Wählen Sie dazu selbst einen geeigneten Maßstab.

Modellfunktion $\quad p(x) := 4 \cdot 10^4 \cdot e^{-2 \cdot \ln(2) \cdot x^2}$



$x_D =$	$p(x_D) =$
0	$4 \cdot 10^4$
0.2	$3.8 \cdot 10^4$
0.4	$3.2 \cdot 10^4$
0.6	$2.4 \cdot 10^4$
0.8	$1.6 \cdot 10^4$
1	$1 \cdot 10^4$
1.2	$5.4 \cdot 10^3$
1.4	$2.6 \cdot 10^3$
1.6	$1.2 \cdot 10^3$

Teilaufgabe 2.3 (4 BE)
Entnehmen Sie Ihrem Diagramm die ungefähre Tiefe, in der der Druck halb so groß ist wie an der Oberfläche, und berechnen Sie dann diese Tiefe genau.

Diagramm: $\quad x_1 \approx 0{,}7$

Ansatz: $\quad 4 \cdot 10^4 \cdot e^{-2 \cdot \ln(2) \cdot x^2} = 2 \cdot 10^4 \quad \Rightarrow \quad e^{-2 \cdot \ln(2) \cdot x^2} = \frac{1}{2}$

Auflösen: $\quad -2 \cdot \ln(2) \cdot x^2 = \ln(1) - \ln(2) \quad \Rightarrow \quad x^2 = \frac{1}{2}$ auflösen, $x \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$ nicht definiert

Genauer Wert: $\quad x_2 = \sqrt{\frac{1}{2}} = 0.71$

Teilaufgabe 2.4 (4 BE)
Berechnen Sie die lokale Änderungsrate des Drucks in **0.50 m** Tiefe.

$p'(x) := 4 \cdot 10^4 \cdot (-2 \cdot 2 \cdot \ln(2) \cdot x) \cdot e^{-2 \cdot \ln(2) \cdot x^2} \qquad p'(0.5) = -3.9 \times 10^4$

Teilaufgabe 2.5 (8 BE)
Bestimmen Sie, in welcher Tiefe die lokale Änderungsrate des Drucks betragsmäßig am größten ist, und berechnen Sie diese lokale Änderungsrate.

$$p''(x) = -16\cdot 10^4\cdot \ln(2)\cdot e^{-2\cdot\ln(2)\cdot x^2} - 16\cdot 10^4\cdot \ln(2)\cdot x\cdot(-4\cdot\ln(2)\cdot x)\cdot e^{-2\cdot\ln(2)\cdot x^2}$$

$$p''(x) := -16\cdot 10^4\cdot \ln(2)\cdot e^{-2\cdot\ln(2)\cdot x^2}\cdot\left(1 - 4\cdot\ln(2)\cdot x^2\right)$$

$$p''(x) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad 1 - 4\cdot\ln(2)\cdot x^2 = 0$$

$$x^2 = \frac{1}{4\cdot\ln(2)} \text{ auflösen}, x \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{2\cdot\sqrt{\ln(2)}} \\ -\frac{1}{2\cdot\sqrt{\ln(2)}} \end{pmatrix}$$

nicht definiert

$$x_W := \frac{1}{2\cdot\sqrt{\ln(2)}}$$

ist Wendepunkt, da Nullstelle mit VZW

$$p'\left(\frac{1}{2\cdot\sqrt{\ln(2)}}\right) = -4.04\times 10^4$$

Betrag der größten Änderungsrate: $\left|-4.04\times 10^4\right| = 4.04\times 10^4$

In der Prüfung nicht verlangt: $p_0 := 40$