Abschlussprüfung Berufliche Oberschule 2010
Mathematik 12 Technik - B II - Lösung

Teilaufgabe 1.0
In einem kartesischen Koordinatensystem des IR^3 mit dem Ursprung O sind die Punkte $A(1, 0, -2)$, $B(-1, 2, 2)$ und $C_k(k, -k, -2 - k)$ mit $k \in IR$ gegeben.

Teilaufgabe 1.1 (3 BE)
Untersuchen Sie, für welche Werte von **k** die drei Vektoren $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ und $\overrightarrow{OC_k}$ eine Basis des IR^3 bilden.

Ortsvektoren: $a := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ $\quad b := \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\quad c(k) := \begin{pmatrix} k \\ -k \\ -2-k \end{pmatrix}$

Aufstellen der Matrix: $M(k) := \text{erweitern}(a, b, c(k))$ $\qquad M(k) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & k \\ 0 & 2 & -k \\ -2 & 2 & -k-2 \end{pmatrix}$

Determinante: $D(k) := |M(k)|$ $\qquad D(k) = 2 \cdot k - 4$

Linear abhängig: $D(k) = 0 \rightarrow 2 \cdot k - 4 = 0$ auflösen, $k \rightarrow 2$

Vektoren bilden eine Basis für $k \neq 2$

Teilaufgabe 1.2 (4 BE)
Die Punkte **O**, **A**, **B** und C_k bilden jeweils ein Tetraeder.
Berechnen Sie alle Werte von **k**, für die das Volumen des zugehörigen Tetraeders **1 VE** beträgt.

Tetraedervolumen: $V_T(k) := \frac{1}{6} \cdot |D(k)|$ $\qquad V_T(k) = \frac{|2 \cdot k - 4|}{6}$

Bedingung: $V_T(k) = 1 \rightarrow \frac{|2 \cdot k - 4|}{6} = 1$

Fallunterscheidung: $k_1 := V_T(k) = 1 \rightarrow \frac{|2 \cdot k - 4|}{6} = 1 \left| \begin{array}{l} \text{annehmen}, k > 2 \\ \text{auflösen}, k \end{array} \right. \rightarrow 5$ $\qquad \boxed{k_1 = 5}$

$k_2 := V_T(k) = 1 \rightarrow \frac{|2 \cdot k - 4|}{6} = 1 \left| \begin{array}{l} \text{annehmen}, k < 2 \\ \text{auflösen}, k \end{array} \right. \rightarrow -1$ $\qquad \boxed{k_2 = -1}$

Teilaufgabe 1.3 (4 BE)
Bestimmen Sie **k** so, dass der zugehörige Punkt C_k von den Punkten **A** und **B** gleich weit entfernt ist.

Verbindungsvektoren:

$$AC_k(k) := c(k) - a \rightarrow \begin{pmatrix} k-1 \\ -k \\ -k \end{pmatrix} \qquad BC_k(k) := c(k) - b \rightarrow \begin{pmatrix} k+1 \\ -k-2 \\ -k-4 \end{pmatrix}$$

Beträge:

$$AC_k(k) := \sqrt{\left(AC_k(k)_1\right)^2 + \left(AC_k(k)_2\right)^2 + \left(AC_k(k)_3\right)^2}$$

$$AC_k(k) \rightarrow \sqrt{2 \cdot k^2 + (k-1)^2}$$

$$BC_k(k) := \sqrt{\left(BC_k(k)_1\right)^2 + \left(BC_k(k)_2\right)^2 + \left(BC_k(k)_3\right)^2}$$

$$BC_k(k) \rightarrow \sqrt{(k+1)^2 + (k+2)^2 + (k+4)^2}$$

Beträge gleichsetzen, quadrieren und auflösen:

$$\left(AC_k(k)\right)^2 = \left(BC_k(k)\right)^2 \rightarrow 2 \cdot k^2 + (k-1)^2 = (k+1)^2 + (k+2)^2 + (k+4)^2 \text{ auflösen}, k \rightarrow -\frac{5}{4}$$

Teilaufgabe 1.4.0
Die Punkte **A** und **B** legen die Gerade **g** fest, die Punkte C_k liegen auf der Geraden **h**.

Teilaufgabe 1.4.1 (5 BE)
Geben Sie für die beiden Geraden **g** und **h** jeweils eine Gleichung an und untersuchen Sie die gegenseitige Lage dieser beiden Geraden.

Gerade g: $g(\lambda) := a + \lambda \cdot (b - a)$ $\qquad g(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 - 2 \cdot \lambda \\ 2 \cdot \lambda \\ 4 \cdot \lambda - 2 \end{pmatrix}$ $\qquad$ Richtungsvektor: $u_g := \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Gerade h: $h(k) := c(k)$ $\qquad h(k) = \begin{pmatrix} k \\ -k \\ -k-2 \end{pmatrix}$ $\qquad$ Richtungsvektor: $u_h := \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Geraden parallel?

$$\begin{pmatrix} u_{g_1} \\ u_{g_2} \\ u_{g_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau_1 \cdot u_{h_1} \\ \tau_2 \cdot u_{h_2} \\ \tau_3 \cdot u_{h_3} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau_1 \\ -\tau_2 \\ -\tau_3 \end{pmatrix} \text{ auflösen}, \tau_1, \tau_2, \tau_3 \rightarrow (-1 \quad -1 \quad -2)$$

Verschiedene τ

$\Rightarrow$ nicht parallel

Geraden schneiden sich?

$$\begin{pmatrix} g(\lambda)_1 \\ g(\lambda)_2 \\ g(\lambda)_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h(k)_1 \\ h(k)_2 \\ h(k)_3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 - 2\cdot\lambda \\ 2\cdot\lambda \\ 4\cdot\lambda - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \\ -k \\ -k - 2 \end{pmatrix} \text{ auflösen}, \lambda, k \rightarrow \begin{pmatrix} 1 - 2\cdot\lambda \\ 2\cdot\lambda \\ 4\cdot\lambda - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \\ -k \\ -k - 2 \end{pmatrix}$$

keine Lösung $\Rightarrow$ Geraden sind windschief

Teilaufgabe 1.4.2 (8 BE)
Stellen Sie eine Gleichung der Geraden **i** auf, die die beiden Geraden **g** und **h** jeweils senkrecht schneidet.

Verbindungsvektor der beiden allgemeinen Geradenpunkte:

$$h(k) - g(\lambda) = \begin{pmatrix} 2\cdot\lambda + k - 1 \\ -2\cdot\lambda - k \\ -4\cdot\lambda - k \end{pmatrix}$$

senkrecht auf g: $(h(k) - g(\lambda))\cdot u_g = 0 \rightarrow 1 - 4\cdot k - 12\cdot\lambda = 0$

senkrecht auf h: $(h(k) - g(\lambda))\cdot u_h = 0 \rightarrow 8\cdot\lambda + 3\cdot k - 1 = 0$

Lösen des Gleichungssystems

$$Lsg := \begin{bmatrix} (h(k) - g(\lambda))\cdot u_g = 0 \\ (h(k) - g(\lambda))\cdot u_h = 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 - 4\cdot k - 12\cdot\lambda = 0 \\ 8\cdot\lambda + 3\cdot k - 1 = 0 \end{pmatrix} \text{ auflösen}, \lambda, k \rightarrow \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & 1 \end{pmatrix}$$

$\lambda_1 := Lsg_{1,1}$ $\quad \lambda_1 = -0.25$ $\quad k_1 := Lsg_{1,2}$ $\quad k_1 = 1$

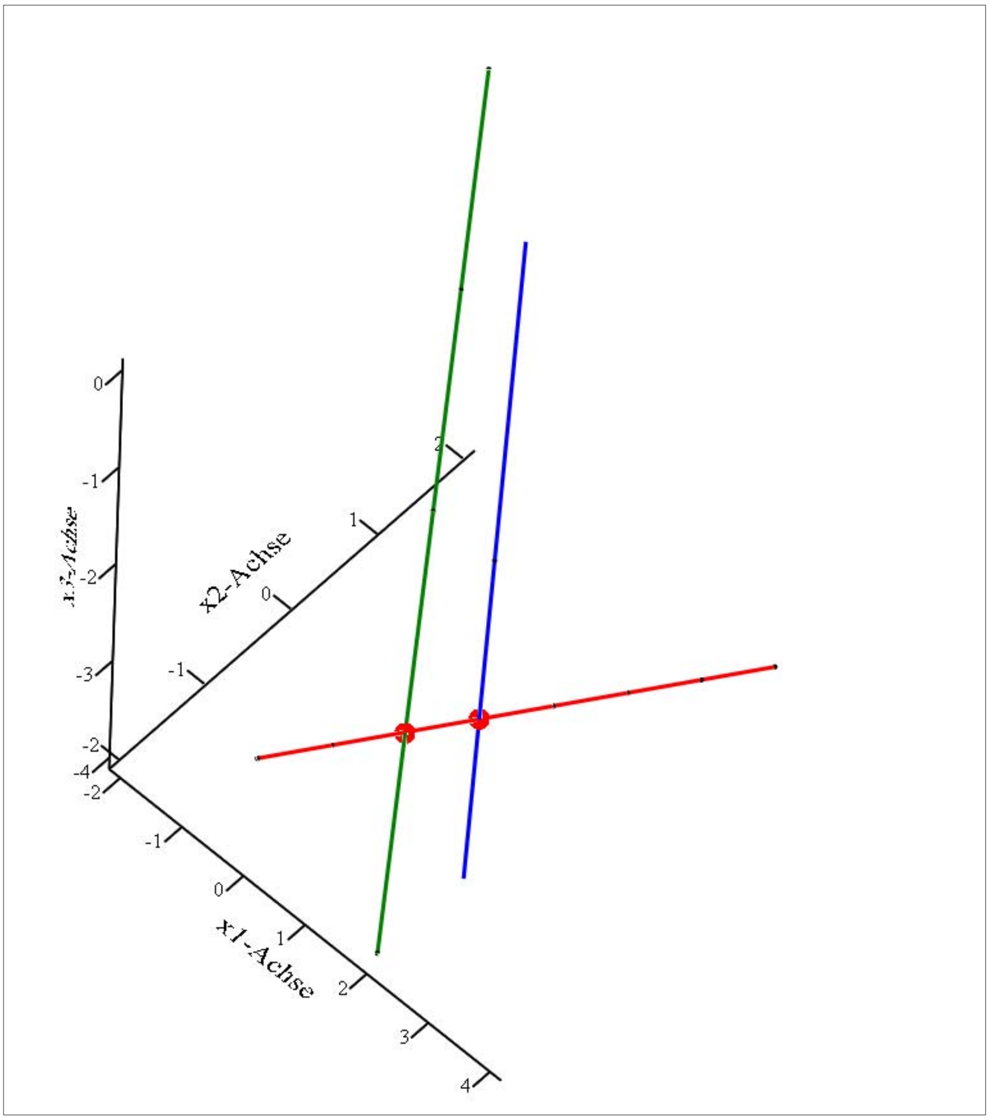
Aufpunkt der Geraden i:

$$p := h(k_1) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Richtung der Geraden i:

$$u_i := h(k_1) - g(\lambda_1) \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Gerade i: $\mathbf{i}(\tau) := \mathbf{p} + \tau \cdot \mathbf{u_i}$ $\qquad$ $\mathbf{i}(\tau) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 - \frac{\tau}{2} \\ -\frac{\tau}{2} - 1 \\ -3 \end{pmatrix}$



Gerade g: blau
Gerade h: grün
Gerade i: rot

Teilaufgabe 2.0
Die Punkte **A**, **B** und $\mathbf{C_k}$ aus 1.0 legen für jeden Wert von **k** genau eine Ebene $\mathbf{E_k}$ fest.

Teilaufgabe 2.1 (2 BE)
Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene E_k in Normalenform.
[Mögliches Teilergebnis: $E_k : k \cdot x_1 + (k-2) \cdot x_2 + x_3 - k + 2 = 0$]

Ebene: $E(\lambda, \mu, k) := a + \lambda \cdot (b - a) + \mu \cdot (c(k) - a)$ $\qquad E(\lambda, \mu, k) = \begin{bmatrix} \mu \cdot (k-1) - 2 \cdot \lambda + 1 \\ 2 \cdot \lambda - \mu \cdot k \\ 4 \cdot \lambda - \mu \cdot k - 2 \end{bmatrix}$

Normalenvektor: $n_E(k) := (b - a) \times (c(k) - a)$ $\qquad n_E(k) = \begin{pmatrix} 2 \cdot k \\ 2 \cdot k - 4 \\ 2 \end{pmatrix}$

Ebene E in vektorieller Normalenform: $\left[\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} 2 \cdot k \\ 2 \cdot k - 4 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$

Ebene E in Koordinatenform: $E(x_1, x_2, x_3, k) := k \cdot x_1 + (k-2) \cdot x_2 + x_3 - k + 2$

Teilaufgabe 2.2 (4 BE)
Geeben ist außderdem die Ebene **H:** $x_1 - x_2 - 2 \cdot x_3 + 19 = 0$
Ermitteln Sie die Koordinaten des Punktes S, der sowohl auf der Ebene H als auch auf jeder Ebene E_k liegt.

Zwei spezielle Ebenen aus der Ebenenschar:

$$E_1(x_1, x_2, x_3) := E(x_1, x_2, x_3, 0) \rightarrow x_3 - 2 \cdot x_2 + 2$$

$$E_2(x_1, x_2, x_3) := E(x_1, x_2, x_3, 1) \rightarrow x_1 - x_2 + x_3 + 1$$

$$H(x_1, x_2, x_3) := x_1 - x_2 - 2 \cdot x_3 + 19$$

Eintragen in die Gaußmatrix: $\qquad$ Diagonalisieren:

$$G := \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -2 & -19 \end{pmatrix} \qquad D := \operatorname{zref}(G) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

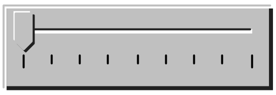
Lösungen: $s_1 := D_{1,4}$ $\quad s_1 = -3$

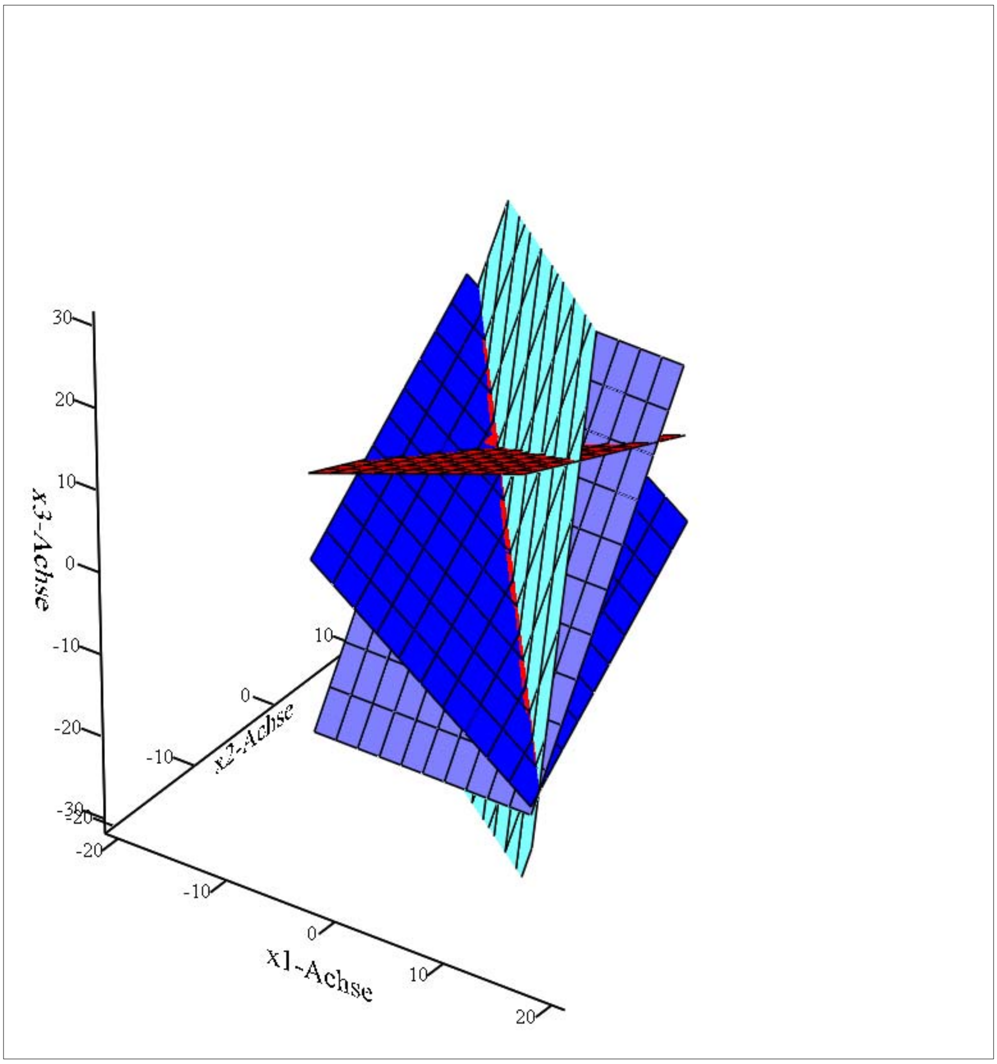
$s_2 := D_{2,4}$ $\quad s_2 = 4$

$s_3 := D_{3,4}$ $\quad s_3 = 6$

Schnittpunkt: $S := \begin{pmatrix} s_1 & s_2 & s_3 \end{pmatrix}$ $\quad S \rightarrow \begin{pmatrix} -3 & 4 & 6 \end{pmatrix}$

Wählen Sie den Parameter k:





Ebene H: rot
Ebenen E: k = 0: hellblau, k = 1: dunkelblau k bel.: türkis
Gerade g: rot, Punkt S: rot