Abschlussprüfung Berufliche Oberschule 2010
Mathematik 13 Nichttechnik - B I - Lösung

Teilaufgabe 1.0
Die drei Zweigwerke Bamberg (B), München (M) und Weiden (W) eines Unternehmens sind miteinander und mit dem Markt nach dem Leontief-Modell verflochten. Die Verflechtungen sind der untenstehenden Tabelle zu entnehmen. Die Zahlenangaben erfolgen in Mengeneinheiten (ME).

$$\text{Warenflussmatrix} := \begin{pmatrix} \text{"Zweigwerke"} & \text{"B"} & \text{"M"} & \text{"W"} & \text{"Markt"} \\ \text{"B"} & 16 & 15 & 4 & 5 \\ \text{"M"} & 4 & 5 & 6 & 35 \\ \text{"W"} & 8 & 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Teilaufgabe 1.1 (3 BE)
Bestimmen Sie die Inputmatrix A.

Produktionsvektor: $x = \begin{pmatrix} 40 \\ 50 \\ 20 \end{pmatrix}$

Input-Matrix: $A = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{3}{10} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{10} & \frac{1}{10} & \frac{3}{10} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{10} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.3 & 0.2 \\ 0.1 & 0.1 & 0.3 \\ 0.2 & 0.1 & 0.2 \end{pmatrix}$

Teilaufgabe 1.2 (6 BE)
Nun sollen von Werk Bamberg 30 ME und von Werk Weiden 50 ME produziert werden.
Berechnen Sie, in welchem Bereich die Produktion von Werk München dann liegen muss.

Neuer Produktionsvektor: $x(x_2) := \begin{pmatrix} 30 \\ x_2 \\ 50 \end{pmatrix}$

Einheitsmatrix: $E := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$y(x_2) := (E - A) \cdot x(x_2)$

$$y(x_2) = \begin{pmatrix} 8 - \frac{3 \cdot x_2}{10} \\ \frac{9 \cdot x_2}{10} - 18 \\ 34 - \frac{x_2}{10} \end{pmatrix}$$

$$y(x_2) \ge 0 \rightarrow \begin{pmatrix} 8 - \frac{3 \cdot x_2}{10} \ge 0 \\ \frac{9 \cdot x_2}{10} - 18 \ge 0 \\ 34 - \frac{x_2}{10} \ge 0 \end{pmatrix} \text{auflösen}, x_2 \rightarrow 20 \le x_2 \le \frac{80}{3}$$

Zusammenfassung: $20 \le x_2 \le \frac{80}{3}$

Teilaufgabe 1.3 (7 BE)
Die Produkte des Werkes München können am Markt nicht mehr abgesetzt werden. deshalb sollen nun die Werke Bamberg und Weiden an den Markt liefern, wohingegen das Werk München nur als Zulieferer für die Werke des Unternehmens tätig sein soll. Werk Bamberg soll 22 ME an den Markt liefern. Werk München soll nur halb so viele Mengeneinheiten produzieren wie Werk Weiden.
Berechnen Sie hierfür den Produktionsvektor und den Marktvektor.

$$y(y_3) := \begin{pmatrix} 22 \\ 0 \\ y_3 \end{pmatrix} \qquad x(x_1, x_3) := \begin{pmatrix} x_1 \\ \frac{1}{2} \cdot x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} \qquad E - A = \begin{pmatrix} 0.6 & -0.3 & -0.2 \\ -0.1 & 0.9 & -0.3 \\ -0.2 & -0.1 & 0.8 \end{pmatrix}$$

$$Lsg := y(y_3) = (E - A) \cdot x(x_1, x_3) \rightarrow \begin{pmatrix} 22 \\ 0 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3 \cdot x_1}{5} - \frac{7 \cdot x_3}{20} \\ \frac{3 \cdot x_3}{20} - \frac{x_1}{10} \\ \frac{3 \cdot x_3}{4} - \frac{x_1}{5} \end{pmatrix} \text{auflösen}, x_1, x_3, y_3 \rightarrow (60 \quad 40 \quad 18)$$

$x_1 := Lsg_{1,1}$ $\qquad x_1 = 60$

$x_3 := Lsg_{1,2}$ $\qquad x_3 = 40$

$y_3 := Lsg_{1,3}$ $\qquad y_3 = 18$

$$x := x(x_1, x_3) \qquad x = \begin{pmatrix} 60 \\ 20 \\ 40 \end{pmatrix} \qquad y := y(y_3) \qquad y = \begin{pmatrix} 22 \\ 0 \\ 18 \end{pmatrix}$$

Teilaufgabe 2.0

Im IR^3 sind die Punkte **A(1 / –4 / 7), B(–3 / 4 / –1)**, die Ebene $E :: x_1 - 2 \cdot x_2 + 2 \cdot x_3 - 5 = 0$

sowie die Geradenschar $g_a : \vec{x} = \overrightarrow{OB} + k \cdot \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit **a, k** $\in$ **IR** gegeben.

Teilaufgabe 2.1 **(6 BE)**

Die Gerade **h = AB** schneidet die Ebene **E** im Punkt **S**. Berechnen Sie die Koordinaten von **S** und zeigen Sie, dass der Punkt **B** der Spiegelpunkt des Punktes **A** bezüglich **S** ist.
(Teilergebnis: **S(–1 / 0 / 3)**)

Gerade h: $h(\lambda) := \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \\ -8 \end{pmatrix}$

Ebene E: $E(x_1, x_2, x_3) := x_1 - 2 \cdot x_2 + 2 \cdot x_3 - 5$

h ∩ E: $\lambda_1 := E(h(\lambda)_1, h(\lambda)_2, h(\lambda)_3) = 0 \rightarrow 18 - 36 \cdot \lambda = 0 \text{ auflösen}, \lambda \rightarrow \frac{1}{2}$

Schnittpunkt: $s := h(\lambda_1) \rightarrow \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\qquad S := s^T \qquad S \rightarrow (-1 \ \ 0 \ \ 3)$

$a := \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix} \qquad AS := s - a \qquad AS = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}$

$b := \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad SB := b - s \qquad SB = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ **AS = SB**

A und B sind Spiegelpunkte bzgl. S

Teilaufgabe 2.2 **(2 BE)**

Beschreiben Sie die besondere Lage der Geraden g_a im Koordinatensystem in Abhängigkeit von a.

$g_a(k, a) := \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\qquad$ Richtungsvektor: $u(a) := \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$a = 0 \qquad u(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\qquad g_0$ ist parallel zur x_3-Achse

$a \neq 0 \qquad g_a$ ist parallel zur x_1x_2-Ebene

Teilaufgabe 2.3 (4 BE)
Bestimmen Sie **a** so, dass die zugehörige Gerade g_a echt parallel zur Ebene **E** verläuft.
(Ergebnis: $a = 2$)

$$E(x_1, x_2, x_3) := x_1 - 2\cdot x_2 + 2\cdot x_3 - 5$$

$$g_a(k, a) := \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} + k\cdot\begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$g_a \cap E$: $\quad E\left(g_a(k,a)_1, g_a(k,a)_2, g_a(k,a)_3\right) \rightarrow a\cdot k - 2\cdot k - 18 \text{ auflösen}, k \rightarrow \frac{18}{a-2}$

für $a \neq 2$ schneidet die Gerade g die Ebene E.

für $a = 2$ ist die Gerade g parallel zur Ebene E.

Teilaufgabe 2.4.0
Die Ebene **F** enthält die Geraden **h** aus 2.1 und g_2.

Teilaufgabe 2.4.1 (5 BE)
Ermitteln Sie je eine Gleichung von F in Parameter- und Koordinatenform.
(Mögliches Ergebnis: **F :** $-2\cdot x_1 + 4\cdot x_2 + 5\cdot x_3 - 17 = 0$

Richtungsvektor von g_2: $\quad u(2) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\qquad$ Ebene F: $\quad x = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix} + \lambda\cdot\begin{pmatrix} -4 \\ 8 \\ -8 \end{pmatrix} + \mu\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Umwandlung in Koordinatenform

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & x_1 - 1 \\ 1 & 8 & x_2 + 4 \\ 0 & -8 & x_3 - 7 \end{pmatrix} \xrightarrow{2\cdot(II) - (I)} \begin{pmatrix} 2 & -4 & x_1 - 1 \\ 0 & 20 & -x_1 + 2\cdot x_2 + 9 \\ 0 & -8 & x_3 - 7 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[5\cdot(III) + 2\cdot(II)]{} \begin{pmatrix} 2 & -4 & x_1 - 1 \\ 1 & 8 & -x_1 + 2\cdot x_2 + 9 \\ 0 & 0 & -2\cdot x_1 + 4\cdot x_2 + 5\cdot x_3 - 17 \end{pmatrix}$$

$$5\cdot(x_3 - 7) + 2\cdot(-x_1 + 2\cdot x_2 + 9) \text{ vereinfachen } \rightarrow 4\cdot x_2 - 2\cdot x_1 + 5\cdot x_3 - 17$$

Ebene F: $\quad -2\cdot x_1 + 4\cdot x_2 + 5\cdot x_3 - 17 = 0$

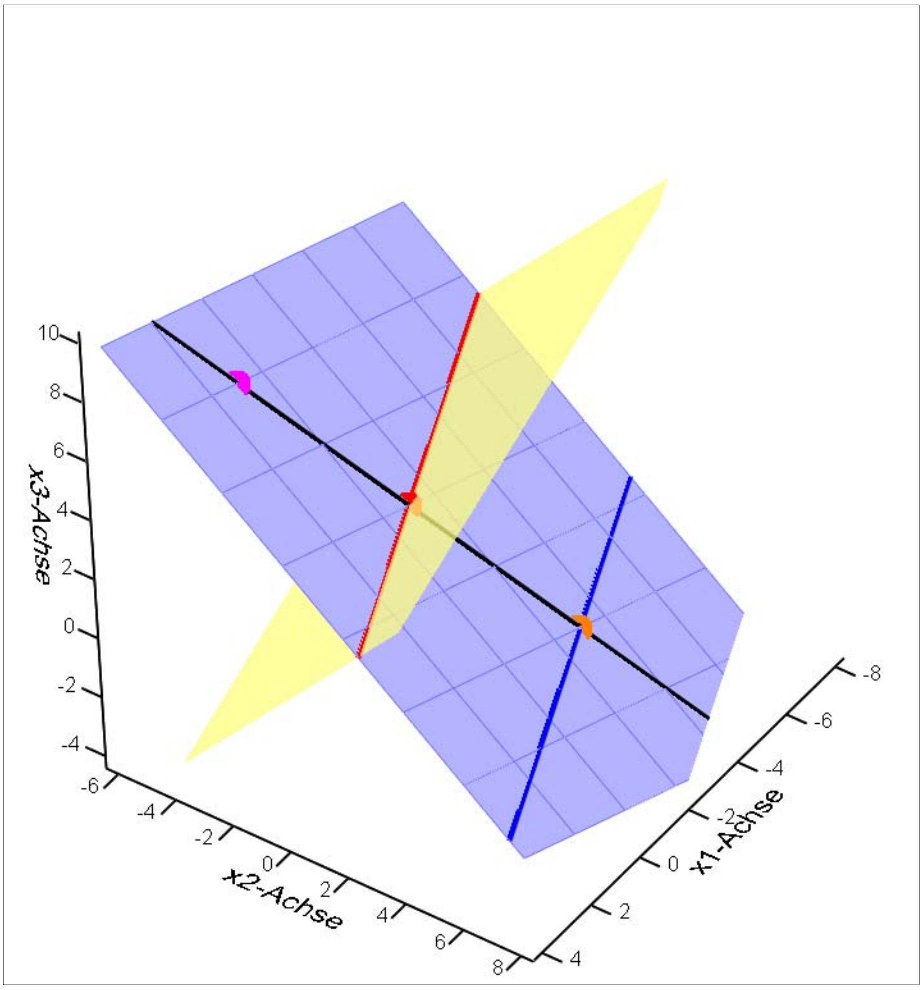
Teilaufgabe 2.4.2 **(7 BE)**
Die Gerade **s** ist die Schnittgerade der Ebenen **E** und **F.** Tragen Sie die Ebene **F**, die Gerade $\mathbf{g_2}$, **h** und **s** sowie die Punkte **A**, **B** und **S** in eine Skizze ein und ermitteln Sie eine Gleichung der Schnittgeraden **s**.

$$M := \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 5 \\ -2 & 4 & 5 & 17 \end{pmatrix} \qquad \text{zref}(M) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

3. Zeile: $x_3 := 3$

Wählen Sie: $x_2(\tau) := \tau \qquad x_1(\tau) := -1 + 2 \cdot x_2(\tau)$

Schnittgerade s: $s(\tau) := \begin{pmatrix} x_1(\tau) \\ x_2(\tau) \\ x_3 \end{pmatrix} \qquad s(\tau) = \begin{pmatrix} 2 \cdot \tau - 1 \\ \tau \\ 3 \end{pmatrix}$



Ebene E: gelb
Ebene F: blau
Schnittgerade s: rot
Gerade g_2: blau
Gerade h: schwarz
Punkt A: violett
Punkt S: rot
Punkt B: orange