Abschlussprüfung Berufliche Oberschule 2010
Mathematik 13 Nichttechnik - B II - Lösung

Teilaufgabe 1.0

Im IR^3 sind die Gerade **g:** $\vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix}$ mit $r \in IR$, der Punkt **P(1/4/1)** und die Ebene

$F: \frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{4} + \frac{x_3}{6} = 1$ gegeben.

Teilaufgabe 1.1 (7 BE)
Weisen Sie nach, dass durch die Gerade g und den Punkt P genau eine Ebene E bestimmt wird, und bestimmen Sie eine Gleichung von E in Koordinatenform.
(Mögliches Ergebnis: $E: 2\cdot x_1 + x_2 + 2\cdot x_3 - 8 = 0$)

Geradengleichung: $g(r) := \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix}$ Punkt P: $p := \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

$P \in g$? $p = g(r) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6\cdot r - 2 \\ 6 - 2\cdot r \\ 3 - 5\cdot r \end{pmatrix}$

$p_1 = g(r)_1 \rightarrow 1 = 6\cdot r - 2 \text{ auflösen}, r \rightarrow \frac{1}{2}$

$\Rightarrow$ Widerspruch, also $P \notin g$.

$p_2 = g(r)_2 \rightarrow 4 = 6 - 2\cdot r \text{ auflösen}, r \rightarrow 1$

Aufpunkt von g: $a := \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$ Verbindungsvektor: $p - a = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$

Ebene E: $E(\lambda, \mu) := \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda\cdot\begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix} + \mu\cdot\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$

Umwandlung in Koordinatenform:

$$\begin{pmatrix} 6 & 3 & x_1+2 \\ -2 & -2 & x_2-6 \\ -5 & -2 & x_3-3 \end{pmatrix} \xrightarrow[2\cdot(\mathbf{III})-5(\mathbf{II})]{3\cdot(\mathbf{II})+(\mathbf{I})} \begin{pmatrix} 6 & 3 & x_1+2 \\ 0 & -3 & x_1+3\cdot x_2-16 \\ 0 & 6 & -5\cdot x_2+2\cdot x_3+24 \end{pmatrix}$$

Nebenrechnung: $(\mathbf{III}) + 2\cdot(\mathbf{II})$

$$-5\cdot x_2 + 2\cdot x_3 + 24 + 2\cdot\left(x_1 + 3\cdot x_2 - 16\right) \text{ vereinfachen } \rightarrow 2\cdot x_1 + x_2 + 2\cdot x_3 - 8$$

$$\xrightarrow[(\mathbf{III})+2\cdot(\mathbf{II})]{} \begin{pmatrix} 6 & 3 & x_1+2 \\ 0 & -3 & x_1+3\cdot x_2-16 \\ 0 & 0 & 2\cdot x_1+x_2+2\cdot x_3-8 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \text{ Ebene } E\text{: } 2\cdot x_1 + x_2 + 2\cdot x_3 - 8 = 0$$

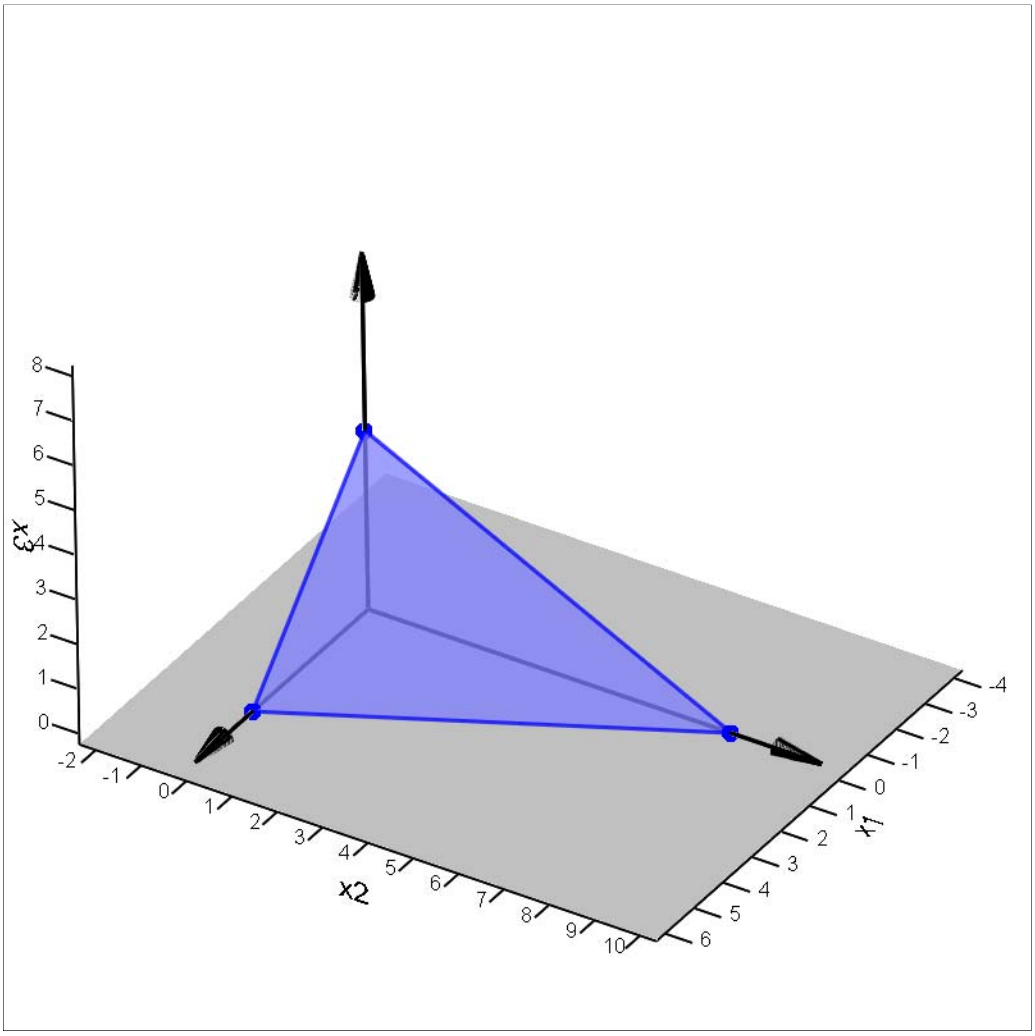
Teilaufgabe 1.2 (4 BE)
Bringen Sie die Ebene E in Achsenabschnittsform, geben Sie die Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen an und zeichnen Sie die Ebene E in ein Koordinatensystem.

$$2\cdot x_1 + x_2 + 2\cdot x_3 = 8 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x_1}{4} + \frac{x_2}{8} + \frac{x_3}{4} = 1$$

Schnittpunkt mit x_1-Achse: $S_1(4, 0, 0)$

Schnittpunkt mit x_2-Achse: $S_2(0, 8, 0)$

Schnittpunkt mit x_3-Achse: $S_3(0, 0, 4)$



Teilaufgabe 1.3 **(3 BE)**
Bestimmen Sie eine Gleichung der Schnittgerade s von E und F.

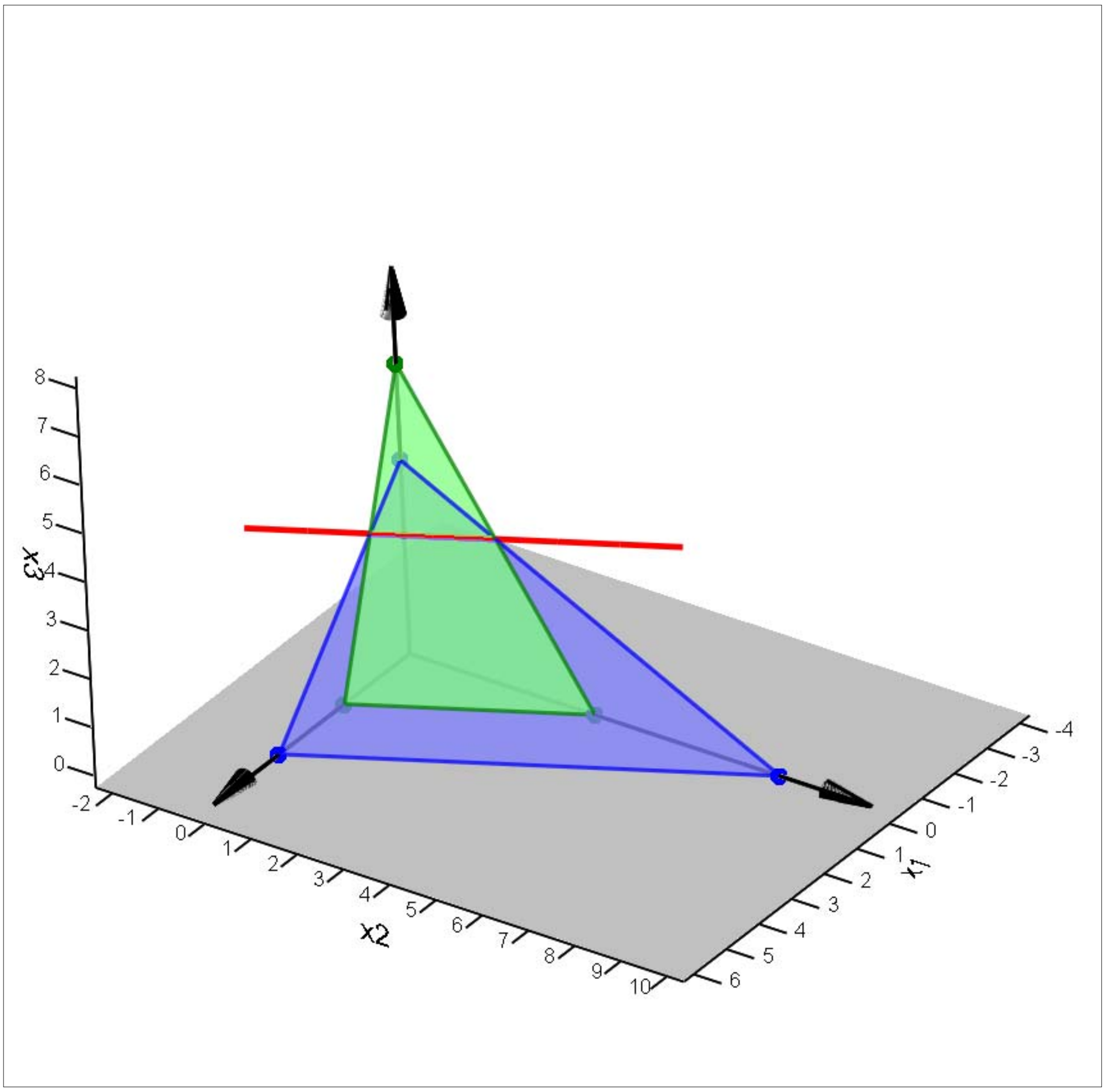
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 8 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{6} & 1 \end{pmatrix} \quad \xrightarrow[\text{--------------------}]{4\cdot(\mathrm{II}) - (\mathrm{I})} \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & -\frac{4}{3} & -4 \end{pmatrix}$$

$x_3 := -4\cdot\left(-\frac{3}{4}\right) \qquad x_3 = 3$

Wähle: $\quad x_2(\tau) := \tau \qquad x_1(\tau) := \frac{1}{2}\cdot\left(8 - x_2(\tau) - 2\cdot 3\right) \qquad x_1(\tau) \to 1 - \frac{\tau}{2}$

Schnittgerade s: $\quad s(\tau) := \begin{pmatrix} x_1(\tau) \\ x_2(\tau) \\ x_3 \end{pmatrix} \qquad s(\tau) \to \begin{pmatrix} 1 - \frac{\tau}{2} \\ \tau \\ 3 \end{pmatrix}$

Teilaufgabe 1.4 (2 BE)
Zeichnen Sie F und s in das Koordinatensystem von 1.2.



Ebene E: blau
Ebene F: grün
Schnittgerade s: rot

Teilaufgabe 2.0

Im IR^3 sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ m \end{pmatrix}$ mit $m \in IR$ gegeben.

Teilaufgabe 2.1 (5 BE)

Berechnen Sie, für welche Werte von m die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ eine Basis des IR^3 bilden.

Vektoren: $\mathbf{a} := \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\mathbf{b} := \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\mathbf{c}(\mathbf{m}) := \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ \mathbf{m} \end{pmatrix}$

Als Matrix schreiben:

$$\mathbf{M}(\mathbf{m}) := \mathbf{erweitern}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}(\mathbf{m})) \qquad \mathbf{M}(\mathbf{m}) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -3 & 1 & -4 \\ 2 & 1 & \mathbf{m} \end{pmatrix}$$

Diagonalisieren der Matrix:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -3 & 1 & -4 \\ 2 & 1 & \mathbf{m} \end{pmatrix} \xrightarrow[(\mathrm{III}) - 2\cdot(\mathrm{I})]{(\mathrm{II}) + 3\cdot(\mathrm{I})} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & -4 \\ 0 & 5 & \mathbf{m} \end{pmatrix} \xrightarrow[(\mathrm{III}) + (\mathrm{II})]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & -4 \\ 0 & 0 & \mathbf{m} - 4 \end{pmatrix}$$

für $\mathbf{m} \neq 4$ sind die Vektoren linear unabhängig, also Basis des IR^{3}.

Teilaufgabe 2.2 **(3 BE)**

Stellen Sie für $\mathbf{m} = 5$ den Vektor $\vec{\mathbf{d}} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ als Linearkombination von $\vec{\mathbf{a}}$, $\vec{\mathbf{b}}$ und $\vec{\mathbf{c}}$ dar.

Verktor d: $\mathbf{d} := \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Linearkombination: $\vec{\mathbf{d}} = \lambda_1 \cdot \vec{\mathbf{a}} + \lambda_2 \cdot \vec{\mathbf{b}} + \lambda_3 \cdot \overrightarrow{\mathbf{c_5}}$

Gaußmatrix: $\mathbf{G} := \mathbf{erweitern}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}(5), \mathbf{d})$ $\qquad \mathbf{G} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -4 \\ -3 & 1 & -4 & 1 \\ 2 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$

Diagonalisieren: $\mathbf{D} := \mathbf{zref}(\mathbf{G})$ $\qquad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

Abrufen der Lösungen:

$\lambda_3 := \mathbf{D}_{3,4}$ $\qquad \lambda_3 = -1$

$\lambda_2 := \mathbf{D}_{2,4}$ $\qquad \lambda_2 = 3$

$\lambda_1 := \mathbf{D}_{1,4}$ $\qquad \lambda_1 = 2$

Teilaufgabe 3.0
Die drei Zweigwerke U, V und W eines Unternehmens sind nach dem Leontief-Modell untereinander und mit dem Markt verflochten.

Die Inputmatrix ist gegeben durch $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0.15 & 0.02 \\ 0.125 & 0 & 0.08 \\ 0.20 & 0.05 & 0 \end{pmatrix}$.

Die derzeitige Produktion beträgt im Werk U 400 Mengeneinheiten (ME), im Werk V 600 ME, im Werk W 500 ME.

Teilaufgabe 3.1 (5 BE)
Erläutern Sie die Bedeutung der Werke 0 in der Inputmatrix und erstellen Sie die Input-Output-Tabelle für das Unternehmen.

Es gilt: $\mathbf{a_{11} = a_{22} = a_{33} = 0}$

Die Werke U, V und W produzieren nichts für den Eigenverbrauch.

$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} 0 & 0.15 & 0.02 \\ 0.125 & 0 & 0.08 \\ 0.20 & 0.05 & 0 \end{pmatrix}$ Produktionsvektor: $\mathbf{x} := \begin{pmatrix} 400 \\ 600 \\ 500 \end{pmatrix}$

Grundgleichung für Verflechtungen: $(\mathbf{E} - \mathbf{A}) \cdot \vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{y}}$

Zwischenrechnung:

$$\mathbf{E} - \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -0.15 & -0.02 \\ -0.125 & 1 & -0.08 \\ -0.2 & -0.05 & 1 \end{pmatrix}$$

Berechung: $\mathbf{y} := (\mathbf{E} - \mathbf{A}) \cdot \mathbf{x}$ $\quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 300 \\ 510 \\ 390 \end{pmatrix}$

$$\textbf{Warenflussmatrix} = \begin{pmatrix} \text{"Zweigwerke"} & \text{"U"} & \text{"V"} & \text{"W"} & \text{"y"} & \text{"x"} \\ \text{"U"} & 0 & 90 & 10 & 300 & 400 \\ \text{"V"} & 50 & 0 & 40 & 510 & 600 \\ \text{"W"} & 80 & 30 & 0 & 390 & 500 \end{pmatrix}$$

Teilaufgabe 3.2 (5 BE)
In der Urlaubszeit fährt das Werk W seine Produktion von 500 ME auf 220 ME herunter. Das Werk V soll weiterhin das 1,5-fache des Werkes U produzieren. Berechnen Sie die für das Werk U unter diesen Bedingungen möglichen Produktionsmengen.

$$x(x_1) := \begin{pmatrix} x_1 \\ 1.5 \cdot x_1 \\ 220 \end{pmatrix} \qquad y(x_1) := (E - A) \cdot x(x_1) \qquad y(x_1) = \begin{pmatrix} 0.775 \cdot x_1 - 4.4 \\ 1.375 \cdot x_1 - 17.6 \\ -0.075 \cdot x_1 + -0.2 \cdot x_1 + 220 \end{pmatrix}$$

Bedingung:

$$y(x_1) \geq 0 \rightarrow \begin{pmatrix} 0.775 \cdot x_1 - 4.4 \geq 0 \\ 1.375 \cdot x_1 - 17.6 \geq 0 \\ -0.075 \cdot x_1 + -0.2 \cdot x_1 + 220 \geq 0 \end{pmatrix} \text{auflösen}, x_1 \rightarrow 12.8 \leq x_1 \leq 800.0$$

Lösungsmenge: $12.8 \leq x_1 \leq 800$

Teilaufgabe 3.3 (6 BE)
Nach der Urlaubszeit soll die Produktion in Werk U wieder 80% der Produktion des Werkes W betragen.
Zeigen Sie, dass unter dieser Voraussetzung, unabhängig von der Produktion in Werk V, die Summe der Marktabgaben 80% der Gesamtproduktion aller drei Werke beträgt.

Neuer Marktvektor: $x_{neu}(x_2, x_3) := \begin{pmatrix} 0.8 \cdot x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

$$y(x_2, x_3) := (E - A) \cdot x_{neu}(x_2, x_3) = \begin{pmatrix} 0.78 \cdot x_3 - 0.15 \cdot x_2 \\ x_2 - 0.18 \cdot x_3 \\ 0.84 \cdot x_3 - 0.05 \cdot x_2 \end{pmatrix}$$

Summe der Marktabgaben: $s(x_2, x_3) := y(x_2, x_3)_1 + y(x_2, x_3)_2 + y(x_2, x_3)_3$

$s(x_2, x_3) = 0.8 \cdot x_2 + 1.44 \cdot x_3$

Gesamtproduktion: $p(x_2, x_3) := x_{neu}(x_2, x_3)_1 + x_{neu}(x_2, x_3)_2 + x_{neu}(x_2, x_3)_3$

$p(x_2, x_3) = x_2 + x_3 + 0.8 \cdot x_3$

zu zeigen: $s = 0.8 \cdot p$ $\qquad 0.8 \cdot p(x_1, x_2) = 0.8 \cdot x_1 + 1.44 \cdot x_2$ $\qquad$ vgl. mit $s(x_2, x_3)$