# Abschlussprüfung Berufliche Oberschule 2011
# Mathematik 12 Nichttechnik - A I - Lösung

**Teilaufgabe 1 (6 BE)**

Gegeben sind die reellen Funktionen $f_a(x) = \frac{1}{9}\cdot(x-a)\cdot\left(x^2+3\cdot x-10\right)$ mit $D_{f_a} = \mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R}$.

Ermitteln Sie in Abhängigkeit von a die Lage und Vielfachheiten der Nullstellen von $f_a$.

$$f_a(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x-a)\cdot\left(x^2+3\cdot x-10\right)$$

$$x - a = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = a$$

$$x^2 + 3\cdot x - 10 = 0 \text{ auflösen}, x \rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad x_2 = 2 \qquad x_3 = -5$$

1. Fall: $x_1 = x_2 \quad \Rightarrow \quad a = 2 \quad \Rightarrow \quad NS_1(2/0)$ zweifach, $NS_2(-5/0)$ einfach

2. Fall: $x_1 = x_3 \quad \Rightarrow \quad a = -5 \quad \Rightarrow \quad NS_1(-5/0)$ zweifach, $NS_2(2/0)$ einfach

3. Fall: a sonst: $\Rightarrow \quad NS_1(-5/0)$ einfach, $NS_2(2/0)$ einfach, $NS_3(a/0)$ einfach

**Teilaufgabe 2.0**

Nun wird $a = 2$ gesetzt. Die Funktion $f_2$ wird im Folgenden kurz mit f bezeichnet.

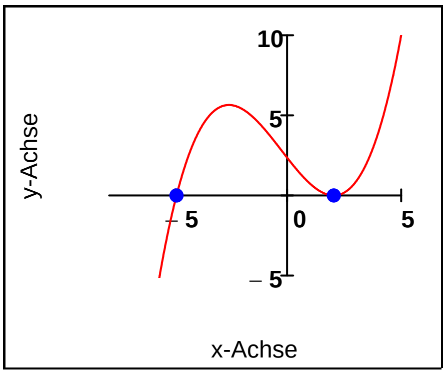
Es gilt: $f(x) = \frac{1}{9}\cdot(x-2)\cdot\left(x^2+3\cdot x-10\right)$.

Die Funktion lässt sich auch auch in der Form $f(x) = \frac{1}{9}\cdot\left(x^3+x^2-16\cdot x+20\right)$ darstellen.

Ein Nachweis ist nicht erforderlich.

**Teilaufgabe 2.1 (3 BE)**

Begründen Sie ohne weitere Rechnung und mithilfe der Ergebnisse aus Aufgabe 1, dass die Funktion f genau zwei Extremstellen hat.

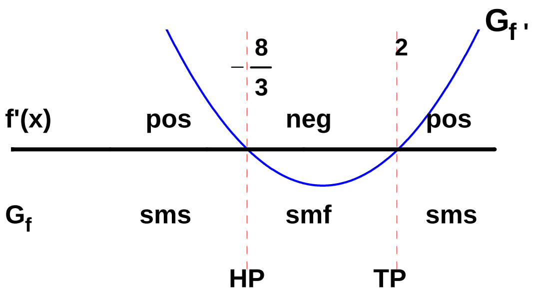



Funktion dritten Grades mit positivem Leitkoeffizient, Verlauf vom III. in den I. Quadranten.
Für $a = 2$ eine einfache und eine zweifache Nullstelle, d. h. es muss zwei Extrempunkte geben.

**Teilaufgabe 2.2 (6 BE)**
Ermitteln Sie Art und Koordinaten der relativen Extrempunkte des Graphen der Funktion f. Runden Sie ggf. auf zwei Nachkommastellen.

1. Ableitungsfunktion: $f'(x) := \frac{1}{9}\cdot\left(3\cdot x^2 + 2\cdot x - 16\right)$

Horizontale Tangenten. $f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3\cdot x^2 + 2\cdot x - 16 = 0$ auflösen , x $\rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ -\frac{8}{3} \end{pmatrix}$




$f\left(-\frac{8}{3}\right) = 5.65$

HP(−2.67 , 5.65)

$f(2) = 0$

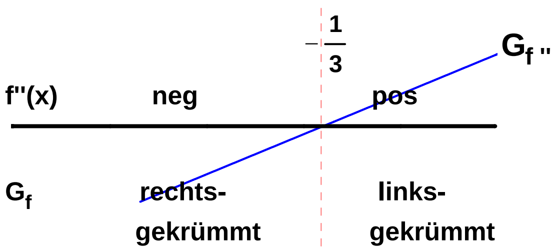
TP(2 , 0)

**Teilaufgabe 2.3 (4 BE)**
Bestimmen Sie die maximalen Intervalle, in denen der Graph der Funktion f rechts- bzw. links-gekrümmt ist.

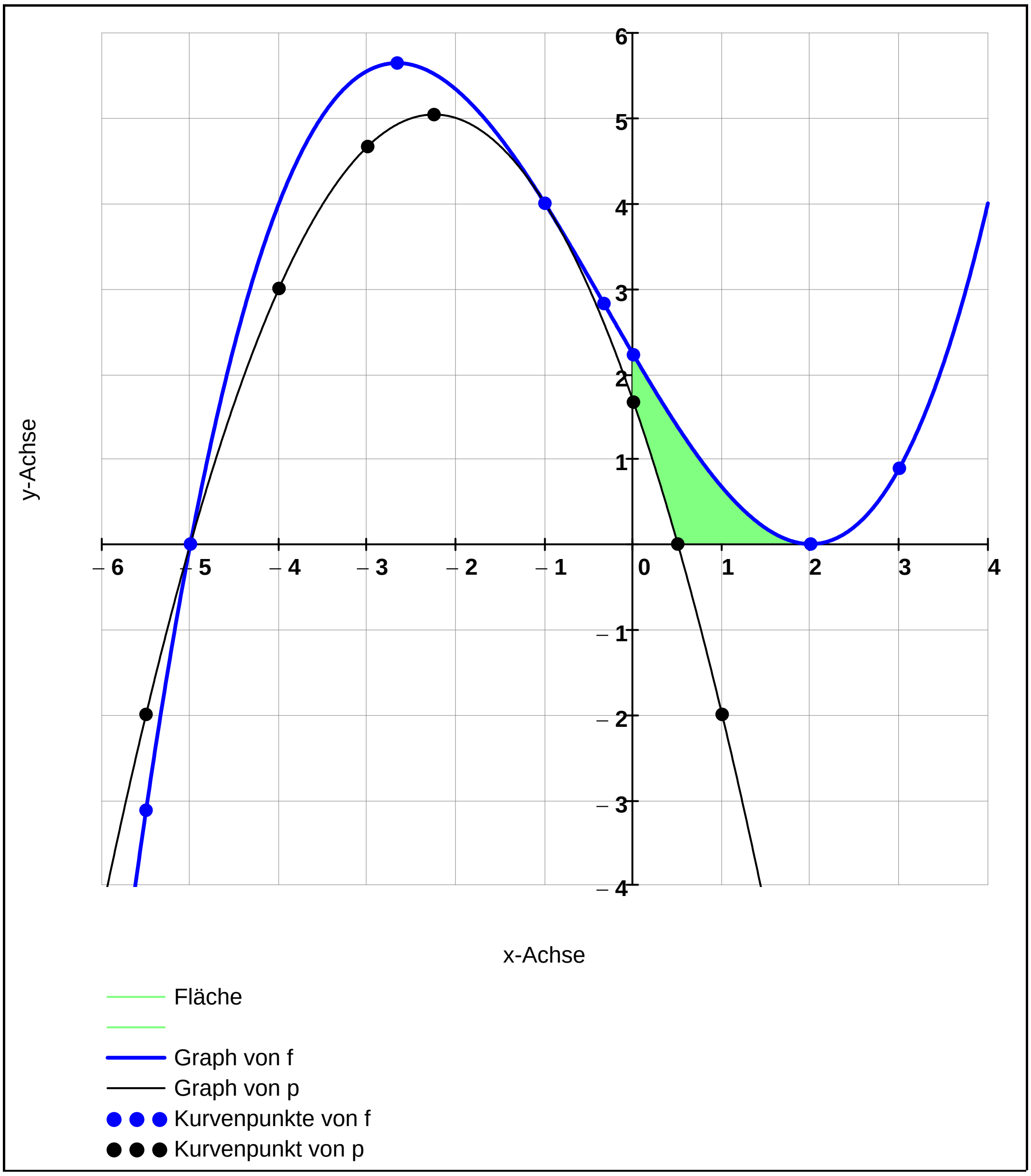
2. Ableitungsfunktion: $f''(x) := \frac{1}{9}\cdot(6\cdot x + 2)$

Flachpunkte: $f''(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 6\cdot x + 2 = 0$ auflösen , x $\rightarrow -\frac{1}{3}$

Nullstelle mit Vorzeichenwechsel, also Wendepunkt: $f\left(\frac{-1}{3}\right) = 2.823$ WP(−0.33 , 2.82)



**Teilaufgabe 2.4** **(4 BE)**
Zeichnen Sie den Graphen der Funktion f im Bereich $-5.5 \le x \le 3$ mithilfe vorliegender Ergebnisse in ein Koordinatensystem.



**Teilaufgabe 3.0**

Gegeben ist weiterhin eine quadratische Funktion p. Der Graph von p besitzt an der Stelle $x = -\frac{9}{4}$ den Scheitelpunkt und berührt den Graphen der Funktion f (aus Aufgabe 2) an der Stelle $x = -1$.

**Teilaufgabe 3.1 (7 BE)**

Bestimmen Sie den Funktionsterm $p(x)$.

[ Ergebnis: $p(x) = -\frac{2}{3}\cdot x^2 - 3\cdot x + \frac{5}{3}$ ]

$p(x,a,b,c) := a\cdot x^2 + b\cdot x + c \qquad p'(x,a,b,c) := 2\cdot a\cdot x + b$

Aufstellen des Gleichungssystems:

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} p'\left(\frac{-9}{4},a,b,c\right) = 0 \\ p(-1,a,b,c) = f(-1) \\ p'(-1,a,b,c) = f'(-1) \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} b - \frac{9\cdot a}{2} = 0 \\ a - b + c = 4 \\ b - 2\cdot a = -\frac{5}{3} \end{pmatrix} \text{ auflösen}, a, b, c \rightarrow \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & -3 & \frac{5}{3} \end{pmatrix}$$

Auslesen der Koeffizienten: $a_1 = -\frac{2}{3} \qquad b_1 = -3 \qquad c_1 = \frac{5}{3}$

$p(x) := p(x, a_1, b_1, c_1) \qquad p(x) = \frac{5}{3} - 3\cdot x - \frac{2\cdot x^2}{3}$

**Teilaufgabe 3.2 (5 BE)**

Zeichnen Sie den Graphen von **p** im Bereich $-5.5 \le x \le 3$ in das Koordinatensystem aus Aufgabe 2.4. Berechnen Sie dazu die Nullstellen von **p** sowie die Koordinaten des Scheitels.

$$p(x) = 0 \rightarrow \frac{5}{3} - 3\cdot x - \frac{2\cdot x^2}{3} = 0 \text{ auflösen}, x \rightarrow \begin{pmatrix} -5 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Nullstellen: $x_1 = -5 \qquad x_2 = 2$

$p'(x) := \frac{d}{dx}p(x) \qquad p'(x) = -\frac{4\cdot x}{3} - 3$

$$p'(x) = 0 \rightarrow -\frac{4\cdot x}{3} - 3 = 0 \text{ auflösen}, x \rightarrow -\frac{9}{4}$$

Scheitel: $p\left(-\frac{9}{4}\right) = 5.04 \qquad S(-2.25, 5.04)$

**Teilaufgabe 3.3 (7 BE)**
Die Koordinatenachsen und die Graphen der Funktionen **f** (aus Aufgabe 2) und **p** schließen im I. Quadranten ein Flächenstück ein. Kennzeichnen Sie das Flächenstück und berechnen Sie die Maßzahl des Flächeninhalts auf zwei Nachkommastellen genau.

Stammfunktionen: $$\int f(x)\,dx = \frac{x^4}{36} + \frac{x^3}{27} - \frac{8\cdot x^2}{9} + \frac{20\cdot x}{9}$$

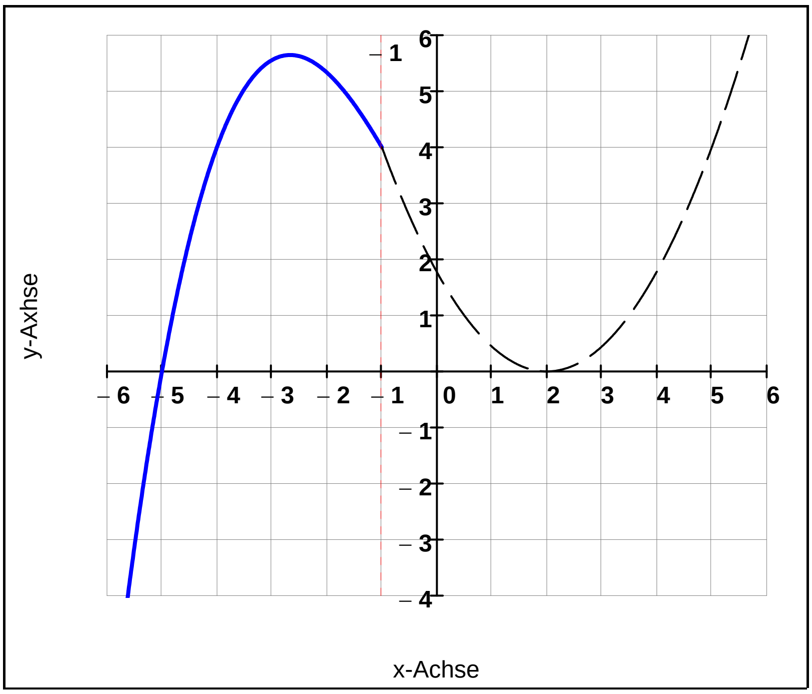
$$\int p(x)\,dx = \frac{5\cdot x}{3} - \frac{3\cdot x^2}{2} - \frac{2\cdot x^3}{9}$$

Fläche: $$A := \int_0^2 f(x)\,dx - \int_0^{0.5} p(x)\,dx$$ $$A = 1.20$$

**Teilaufgabe 4 (5 BE)**
Gegeben ist die abschnittsweisedefinierte Funktion h durch

$$h(x) = \begin{cases} \frac{1}{9}\cdot\left(x^3 + x^2 - 16\cdot x + 20\right) & \text{if } x < -1 \\ \frac{4}{9}\cdot\left(x^2 - 4\cdot x + 4\right) & \text{if } x \geq -1 \end{cases}$$

Untersuchen Sie rechnerisch, ob die Funktion h an der Nahtstelle $x_0 = -1$ differenzierbar ist.



Stetigkeit:

$$\lim_{x \to -1^-} \left[\frac{1}{9}\cdot\left(x^3 + x^2 - 16\cdot x + 20\right)\right] \to 4$$

$$\lim_{x \to -1^+} \left[\frac{4}{9}\cdot\left(x^2 - 4\cdot x + 4\right)\right] \to 4$$

$h(-1) = 4 \qquad \Rightarrow \qquad G_h$ ist stetig an $x_0 = -1$

Differenzierbarkeit:

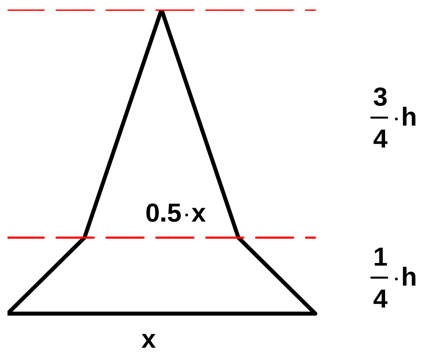
$$h'(x) = \begin{cases} \frac{1}{9}\cdot\left(3\cdot x^2 + 2\cdot x - 16\right) & \text{if } x < -1 \\ \left[\frac{4}{9}\cdot(2\cdot x - 4)\right] & \text{if } x > -1 \end{cases}$$

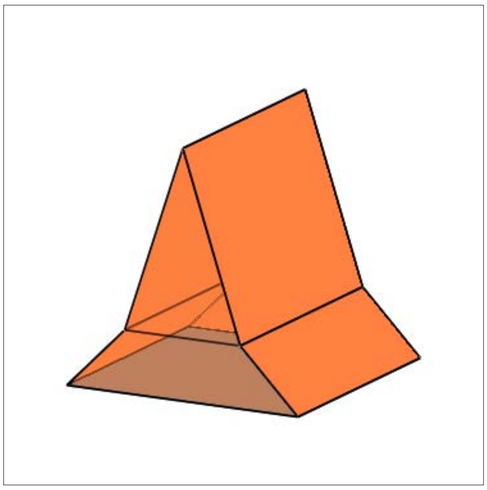
$$\lim_{x \to -1^-} \left[\frac{1}{9}\cdot\left(3\cdot x^2 + 2\cdot x - 16\right)\right] \to -\frac{5}{3}$$

$$\lim_{x \to -1^+} \left[\frac{4}{9}\cdot(2\cdot x - 4)\right] \to -\frac{8}{3}$$

$\Rightarrow \qquad G_h$ ist nicht differenzierbar an $x_0 = -1$

**Teilaufgabe 5.0**
Eine Schokoladenfirma will eine neue Praline auf den Markt bringen. Die Länge und die Breite der Praline beträgt jeweils x cm. Die weiteren Größenverhältnisse sind den folgenden Abbildungen zu entnehmen.
Aus verpackungstechnischen Gründen gilt für die Summe aus Höhe h, Breite und Länge 8 cm.
Führen Sie die folgenden Rechnungen ohne Einheiten durch.



**Teilaufgabe 5.1 (7 BE)**
Stellen Sie eine Gleichung für das Volumen $V(x)$ der Praline in Abhängigkeit von x auf und geben Sie eine im Sachzusammenhang sinnvolle Definitionsmenge an.
[ Teilergebnis: $V(x) = -0.75\cdot x^3 + 3\cdot x^2$ ]

Der Körper setzt sich aus einem Prisma mit einem Dreieck als Grundfläche und einem Prisma mit einem Trapez als Grundfläche zusammen.

Zielfunktion: $V(x,h) := \frac{x + \frac{1}{2}\cdot x}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot h\cdot x + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot x\cdot\frac{3}{4}\cdot h\cdot x$

Nebenbedingung: $h + x + x = 8$ auflösen, $h \rightarrow 8 - 2\cdot x$ also $h(x) := 8 - 2\cdot x$

Einsetzen: $V(x) := V(x, h(x)) = 3\cdot x^2 - \frac{3\cdot x^3}{4}$

Definitionsmenge: $h = 0 \quad \Rightarrow \quad h(x) = 0 \rightarrow 8 - 2\cdot x = 0$ auflösen, $x \rightarrow 4$

$D = ]0;4[$

**Teilaufgabe 5.2 (6 BE)**
Berechnen Sie x so, dass das Volumen der Praline den absolut größten Wert annimmt.
Berechnen Sie hierfür auch die Höhe h der Praline.

$V'(x) := \frac{d}{dx}V(x)$ $\qquad V'(x) = 6 \cdot x - \frac{9 \cdot x^2}{4}$

Horizontale Tangenten. $\qquad V'(x) = 0 \rightarrow 6 \cdot x - \frac{9 \cdot x^2}{4} = 0$ auflösen, $x \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{8}{3} \end{pmatrix}$ $\qquad$ nicht definiert

$x_E := \frac{8}{3}$ $\qquad$ Funktionswert: $\qquad V(x_E) = \frac{64}{9}$

Vergleich mit den Randwerten: $\qquad \lim_{x \to 0^+} \left(3 \cdot x^2 - \frac{3 \cdot x^3}{4}\right) \rightarrow 0$

$$\lim_{x \to 4^-} \left(3 \cdot x^2 - \frac{3 \cdot x^3}{4}\right) \rightarrow 0$$

$\Rightarrow$ absolutes Maximum $x_E = \frac{8}{3}$; Höhe der Praline: $h(x_E) = \frac{8}{3}$