Abschlussprüfung Berufliche Oberschule 2011
Mathematik 12 Nichttechnik - A II - Lösung

Teilaufgabe 1.0

Gegeben ist die reelle Funktion $f(x) := -\frac{1}{9}\cdot x^4 + \frac{4}{3}\cdot x^2 - 3$ mit $D_f = IR$.

Teilaufgabe 1.1 (5 BE)

Berechnen Sie die Nullstellen der Funktion f und geben Sie das Symmetrieverhalten von G_f an.

$f(x) = 0$ Substitution: $x^2 = u$ Umformung:

$$-\frac{1}{9}\cdot x^4 + \frac{4}{3}\cdot x^2 - 3 = 0 \rightarrow \frac{4\cdot u}{3} - \frac{u^2}{9} - 3 = 0 \rightarrow u^2 - 12\cdot u + 27 = 0$$

$$u^2 - 12\cdot u + 27 = 0 \text{ auflösen}, u \rightarrow \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Resubstitution:

$$x^2 = 3 \text{ auflösen}, x \rightarrow \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix} \qquad x_1 := -\sqrt{3} \qquad x_2 := \sqrt{3}$$

$$x^2 = 9 \text{ auflösen}, x \rightarrow \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix} \qquad x_3 := -3 \qquad x_4 := 3$$

G_f ist achsensymmetrisch zur y-Achse, da der Funktionsterm nur gerade Potenzen von x enthält.

Teilaufgabe 1.2 (6 BE)

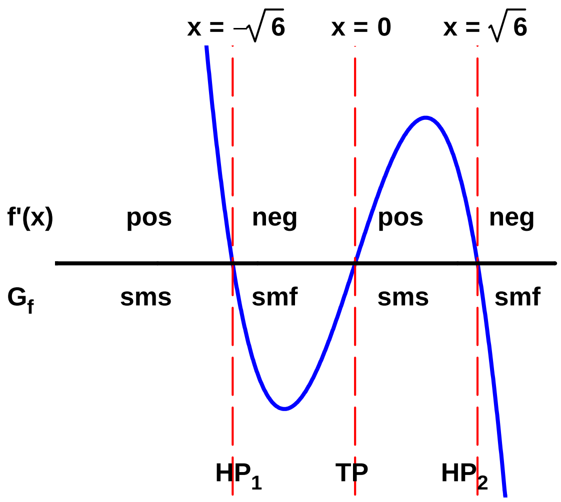
Ermitteln Sie Art und Koordinaten der relativen Extrempunkte des Graphen der Funktion f.

1. Ableitungsfunktion: $f'(x) := -\frac{4}{9}\cdot x^3 + \frac{8}{3}\cdot x$

Horizontale Tangenten: $f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{4}{9}\cdot x^3 + \frac{8}{3}\cdot x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{4}{9}\cdot x\cdot\left(x^2 - 6\right) = 0$

$$x_{E1} := 0 \qquad x^2 - 6 = 0 \text{ auflösen}, x \rightarrow \begin{pmatrix} \sqrt{6} \\ -\sqrt{6} \end{pmatrix} \qquad x_{E2} := -\sqrt{6} \qquad x_{E3} := \sqrt{6}$$

Nachweis der Art über eine Monotonietabelle:



streng monoton steigend: **sms**

streng monoton fallend: **smf**

$f(-\sqrt{6}) = 1$

$HP_1(-\sqrt{6} / 1)$

$f(0) = -3$

$TP(0 / -3)$

$f(\sqrt{6}) = 1$

$HP_2(\sqrt{6} / 1)$

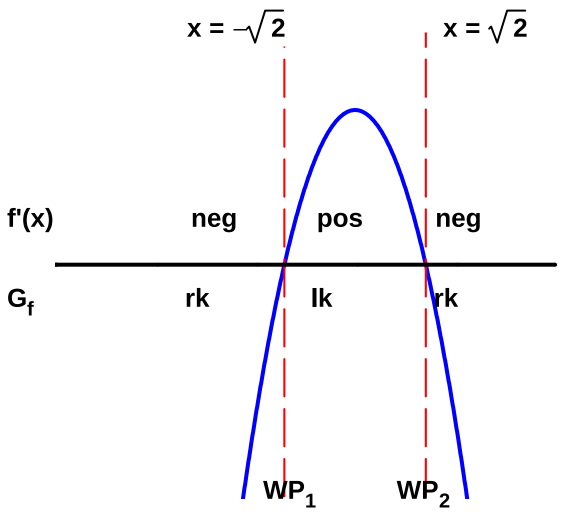
Teilaufgabe 1.3 (6 BE)
Bestimmen Sie die maximalen Intervalle, in denen der Graph der Funktion f rechts- bzw. links-gekrümmt ist und berechnen Sie die Koordinaten der Wendepunkte.

2. Ableitungsfunktion: $f''(x) := -\frac{4}{3} \cdot x^2 + \frac{8}{3}$

Flachpunkte: $f''(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{4}{3} \cdot x^2 + \frac{8}{3} = 0$ auflösen, $x \rightarrow \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}$

$x_{W1} := -\sqrt{2} \qquad x_{W2} := \sqrt{2}$

Vorzeichentabelle:



rechtsgekrümmt: **rk**

linksgekrümmt: **lk**

$f(-\sqrt{2}) = -\frac{7}{9} = -0.8$

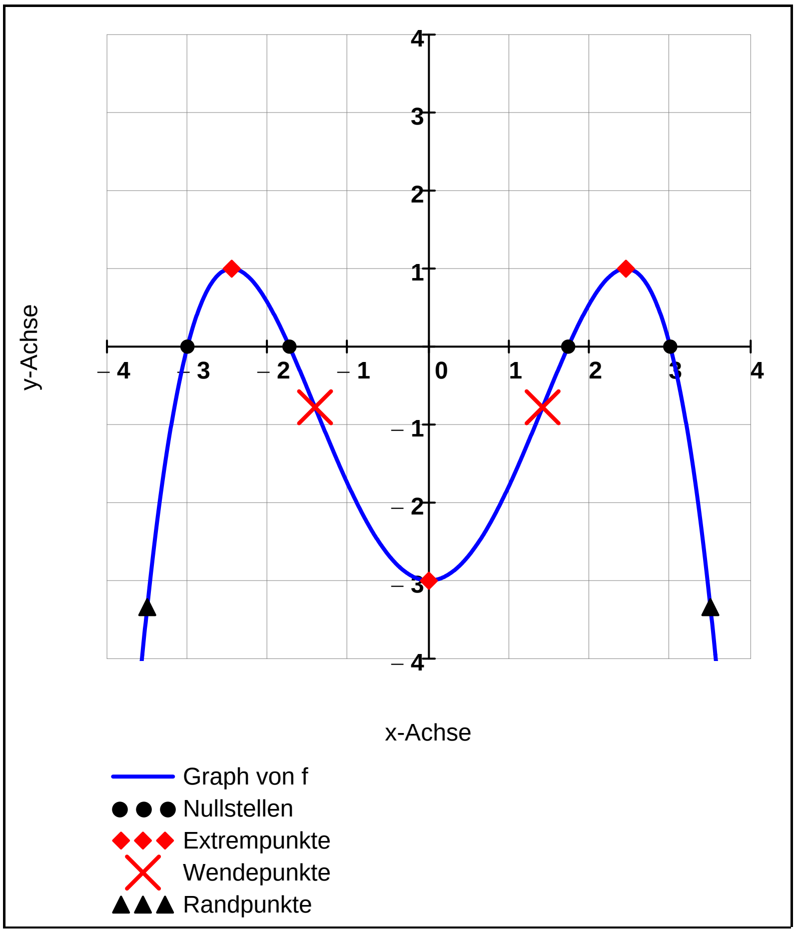
$WP_1(-\sqrt{2} / -0.8)$

$f(\sqrt{2}) = -\frac{7}{9} = -0.8$

$WP_2(\sqrt{2} / -0.8)$

G_f ist rechtsgekrümmt in $]-\infty; -\sqrt{2}]$ und in $[\sqrt{2}; \infty[$, G_f ist linksgekrümmt in $[-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$.

Teilaufgabe 1.4 (5 BE)
Zeichnen Sie den Graphen der Funktion f im Bereich $-3.5 \le x \le 3.5$ mithilfe vorliegender Ergebnisse in ein Koordinatensystem.



Teilaufgabe 2.0

Gegeben sind nun die reellen Funktion $f_a(x) = -\frac{1}{9} \cdot x^4 + \frac{4}{3} \cdot x^2 - a$ mit $D_{f_a} = \mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R}^+$.

Für $a = 3$ erhält man die Funktion aus Aufgabe 1. Die Ergebnisse aus Aufgabe 1 können bei den folgenden Aufgaben verwendet werden.

Teilaufgabe 2.1 (3 BE)
Ermitteln Sie die Koordinaten aller relativen Extrempunkte des Graphen der Funktion f_a in Abhängigkeit von a.

Funktionsterm: $fa(x, a) := -\frac{1}{9} \cdot x^4 + \frac{4}{3} \cdot x^2 - a$

1. Ableitungsfunktion: $fa'(x, a) := -\frac{4}{9} \cdot x^3 + \frac{8}{3} \cdot x$

unabhängig von a $\Rightarrow$ x-Werte der Extrempunkte stimmen mit denen aus Aufgabe 1.2 überein.

$fa(-\sqrt{6}, a) = 4 - a$ $\quad$ $HP_1\ (-\sqrt{6} /\ 4 - a)$

$fa(0, a) = -a$ $\quad$ $TP_1\ (0 /\ -a)$

$fa(\sqrt{6}, a) = 4 - a$ $\quad$ $HP_2\ (\sqrt{6} /\ 4 - a)$

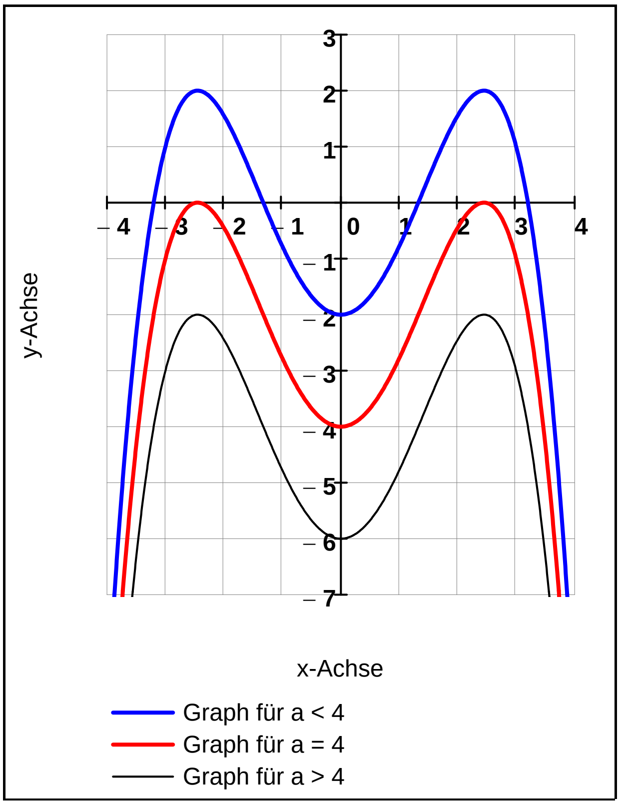
Teilaufgabe 2.2 (6 BE)
Bestimmen Sie nur mithilfe der Ergebnisse aus 2.1 die Anzahl und Vielfachheiten der Nullstellen von f_a in Abhängigkeit von a.

Für $a < 4$ liegen die beiden Hochpunkte über die x-Achse. $\Rightarrow$ vier einfache Nullstellen

Für $a = 4$ liegen die beiden Hochpunkte auf die x-Achse. $\Rightarrow$ zwei zweifache Nullstellen

Für $a > 4$ lieen die beiden Hochpunkte unter die x-Achse. $\Rightarrow$ keine Nullstellen

Folgende graphische Darstellung ist in der Prüfung nicht verlangt.



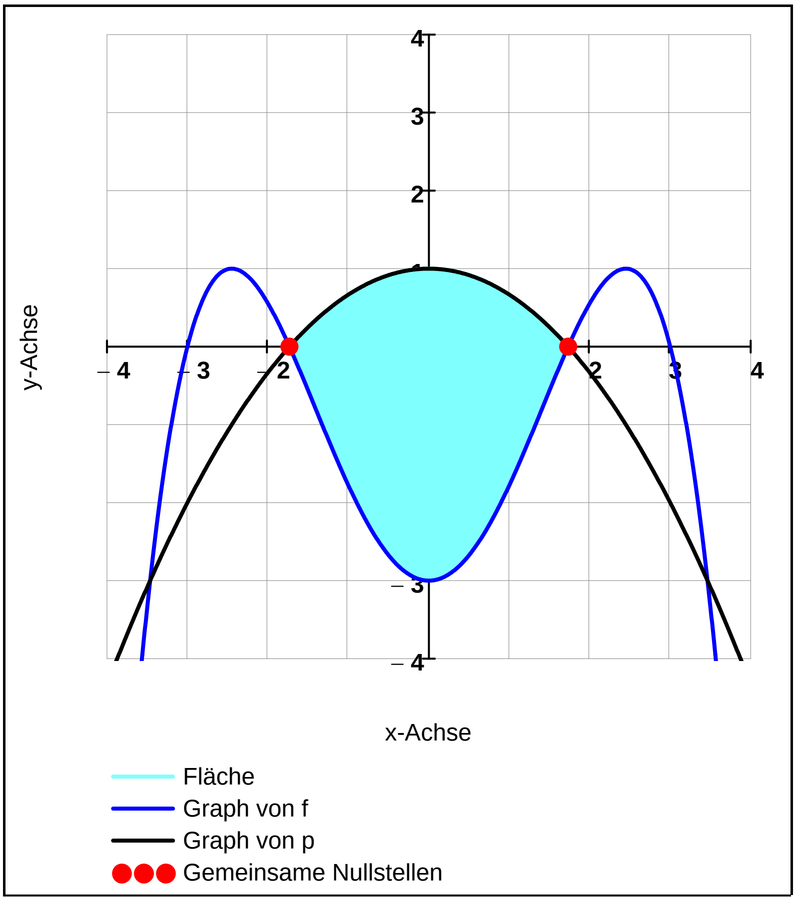
Teilaufgabe 3.0

Gegeben ist weiterhindie Funktion p durch $p(x) := -\frac{1}{3} \cdot x^2 + 1$ mit $D_p = IR$.

Teilaufgabe 3.1 (4 BE)
Zeigen Sie, dass p genau zwei gemeinsame Nullstellen mit der Funktion f aus Aufgabe 1 hat.
Zeichnen Sie den Graphen von p im Bereich $-4 \le x \le 4$ in das Koordinatensystem aus Teilaufgabe 1.4.

$p(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{1}{3} \cdot x^2 + 1 = 0$ auflösen, $x \rightarrow \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix}$

Das sind die Nullstellen von 1.1



Teilaufgabe 3.2 (5 BE)
Die Graphen der Funktionen f (aus Aufgabe 1) und p schließen drei Flächenstücke ein. Berechnen Sie die Maßzahl desjenigen Flächenstücks, das den Ursprung enthält, auf zwei Nachkommastellen genau.

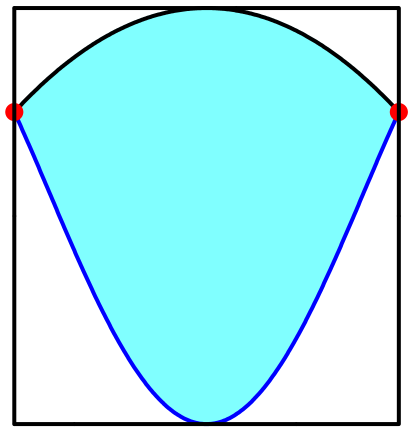
Stammfunktion: $\int (p(x) - f(x))\,dx = \frac{x^5}{45} - \frac{5 \cdot x^3}{9} + 4 \cdot x$

Flächenmaßzahl: $A := 2 \cdot \int_0^{\sqrt{3}} (p(x) - f(x))\,dx$

$A = \frac{76 \cdot \sqrt{3}}{15} = 8.78$

Teilaufgabe 3.3 (3 BE)
Die in 3.2 beschriebene Fläche stellt die Form eines Firmenlogos dar. Es soll aus einer dünnen Styroporplatte ausgesägt werden. die Platte wird durch die Geraden mit den Gleichungen $x = -\sqrt{3}$, $x = \sqrt{3}$, $y = -3$ und $y = 1$ von außen begrenzt. Berechnen Sie den Anteil des Abfalls nach dem Aussägen in Prozent.

Firmenlogo



Äußere Fläche:

$$A_{Viereck} := 2\cdot\sqrt{3}\cdot 4$$

$$A_{Viereck} = 8\cdot\sqrt{3}$$

Abfall: $A_{Viereck} - A = \frac{44\cdot\sqrt{3}}{15}$

$$\frac{A_{Viereck} - A}{A_{Viereck}} \rightarrow \frac{11}{30} = 36.7\cdot\%$$

Teilaufgabe 4 (7 BE)
Gegeben ist die reelle Funktion H durch $H(x) = -\frac{1}{108}\cdot x^4 + a\cdot x^3 + b\cdot x^2 + c\cdot x + d$ mit **a, b, c, d** $\in$ **IR**.
H ist eine Stammfunktion der ganzrationalen Funktion h.
Bestimmen Sie den Funktionsterm $H(x)$, wenn der Graph der Funktion h punktsymmetrisch zum Ursprung verläuft und $W\left(-3, \frac{3}{4}\right)$ ein Wendepunkt des Graphen G_H ist.

$$H(x, a, b, c, d) := -\frac{1}{108}\cdot x^4 + a\cdot x^3 + b\cdot x^2 + c\cdot x + d$$

$$h(x, a, b, c) := -\frac{4}{108}\cdot x^3 + 3\cdot a\cdot x^2 + 2\cdot b\cdot x + c$$

G_h ist punktsymmetrisch, also $a = 0 \wedge c = 0$ $\Rightarrow$ $h(x, 0, b, 0) = 2\cdot b\cdot x - \frac{x^3}{27}$

$$\Rightarrow \quad H(x, 0, b, 0, d) = b\cdot x^2 - \frac{x^4}{108} + d$$

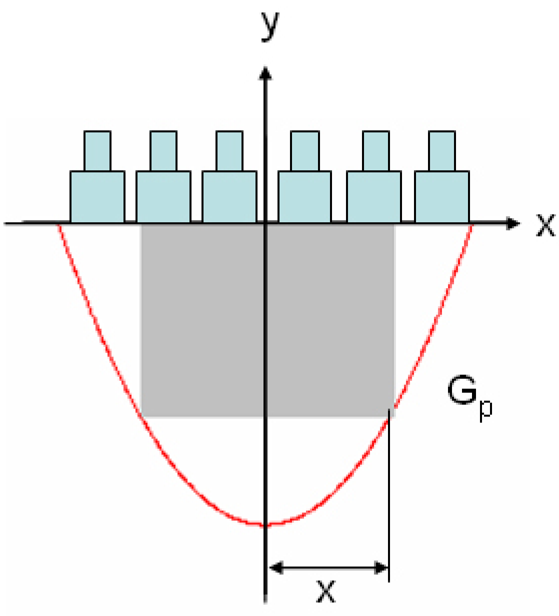
W Wendepunkt von H: $H''(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad h'(x) = 0$

$h'(x,b) := 2\cdot b - \frac{1}{9}\cdot x^2$ $\quad h'(-3,b) = 0 \rightarrow 2\cdot b - 1 = 0$ auflösen, b $\rightarrow \frac{1}{2}$ $\quad b = \frac{1}{2}$

$H\left(-3, 0, \frac{1}{2}, 0, d\right) = \frac{3}{4} \rightarrow d + \frac{15}{4} = \frac{3}{4}$ auflösen, d $\rightarrow -3$ $\quad d = -3$

Teilaufgabe 5.0

Der Gepäckraum eines Flugzeugs kann im Querschnitt mithilfe der Funktion $p(x) := \frac{1}{2}\cdot x^2 - \frac{25}{8}$ beschrieben werden. Das Gepäck soll dabei in Containern mit rechteckiger Querschnittsfläche untergebracht werden (vgl. Abbildung).
Die Längeneinheit ist Meter und kann bei den Berechnungen weggelassen werden.



Teilaufgabe 5.1 **(4 BE)**
Stellen Sie eine Gleichung für die Querschnittsfläche $A(x)$ der Container in Abhängigkeit von x auf und bestimmen Sie eine im Sachzusammenhang sinnvolle Definitionsmenge.

[Teilergebnis: $A(x) = -x^3 + \frac{25}{4}\cdot x$]

$A(x) := 2\cdot x\cdot\left[-\left(\frac{1}{2}\cdot x^2 - \frac{25}{8}\right)\right]$ $\quad A(x) = \frac{25\cdot x}{4} - x^3$

Nullstellen der Parabel: $\frac{1}{2}\cdot x^2 - \frac{25}{8} = 0$ auflösen, x $\rightarrow \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ -\frac{5}{2} \end{pmatrix}$ obere Grenze für x

Definitionsmenge: $x \in \left]0\,;\,2.5\right[$

Teilaufgabe 5.2 **(6 BE)**
Berechnen Sie x so, dass die Querschnittsfläche der Container den größten Inhalt annimmt.
Berechnen Sie für diesen Fall auch die Breite und Höhe der Container.

$$A'(x) := \frac{25}{4} - 3 \cdot x^2 \qquad A'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{25}{4} - 3 \cdot x^2 = 0 \text{ auflösen}, x \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{5 \cdot \sqrt{3}}{6} \\ -\frac{5 \cdot \sqrt{3}}{6} \end{pmatrix}$$

Rel. Extremum: $x_E := \frac{5 \cdot \sqrt{3}}{6}$ $\qquad x_E = 1.44$

Funktionswert: $y_E := A(x_E)$ $\qquad y_E = \frac{125 \cdot \sqrt{3}}{36} = 6.01$

Vergleich mit den Randwerten:

$$\lim_{x \to 0^+} \left(\frac{25 \cdot x}{4} - x^3 \right) \rightarrow 0$$

$$\lim_{x \to \frac{5}{2}^-} \left(\frac{25 \cdot x}{4} - x^3 \right) \rightarrow 0$$

Absoluter Hochpunkt **(1.44 / 6.01)**

Breite des Containers: $b = 1.44 \cdot m$

Höhe des Containers: $h := -p(x_E) \cdot m$ $\qquad h = 2.083\, m$