Abschlussprüfung Berufliche Oberschule 2011
Mathematik 12 Nichttechnik - S I - Lösung

Teilaufgabe 1.0
Die Eisdiele BAVARIA bietet unterschiedliche Eisbecher an. Aus langjähriger Erfahrung weiß der Eigentümer, dass 60% der Gäste einen Eisbecher mit Fruchteis (F) bestellen. Zudem ist bekannt, dass 70% aller Eisbecher mit Sahne (S) bestellt werden. 10% der Eisbecher werden ohne Fruchteis und ohne Sahne bestellt.

Teilaufgabe 1.1 (5 BE)
Untersuchen Sie mithilfe einer Vierfeldertafel, ob die Ereignisse F und S stochastisch unabhängig sind.

Gegeben: $\overline{F} = nF$ $\quad \overline{S} = nS$ Ergänzt:

$$\begin{pmatrix} \blacksquare & \text{"F"} & \text{"nF"} & \blacksquare \\ \text{"S"} & \blacksquare & \blacksquare & 0.7 \\ \text{"nS"} & \blacksquare & 0.1 & \blacksquare \\ \blacksquare & 0.6 & \blacksquare & \blacksquare \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \blacksquare & \text{"F"} & \text{"nF"} & \blacksquare \\ \text{"S"} & 0.4 & 0.3 & 0.7 \\ \text{"nS"} & 0.2 & 0.1 & 0.3 \\ \blacksquare & 0.6 & 0.4 & 1 \end{pmatrix}$$

$P_F := 0.6 \qquad P_S := 0.7 \qquad P_F \cdot P_S = 0.42$

$P_{F \cap S} := 0.4$

$P_F \cdot P_S \neq P_{F \cap S} \quad \Rightarrow$ stochastisch abhängig

Teilaufgabe 1.2 (3 BE)
Beschreiben Sie das Gegenereignis von $\overline{F} \cup S$ möglichst einfach mit Worten und geben Sie seine Wahrscheinlichkeit an.

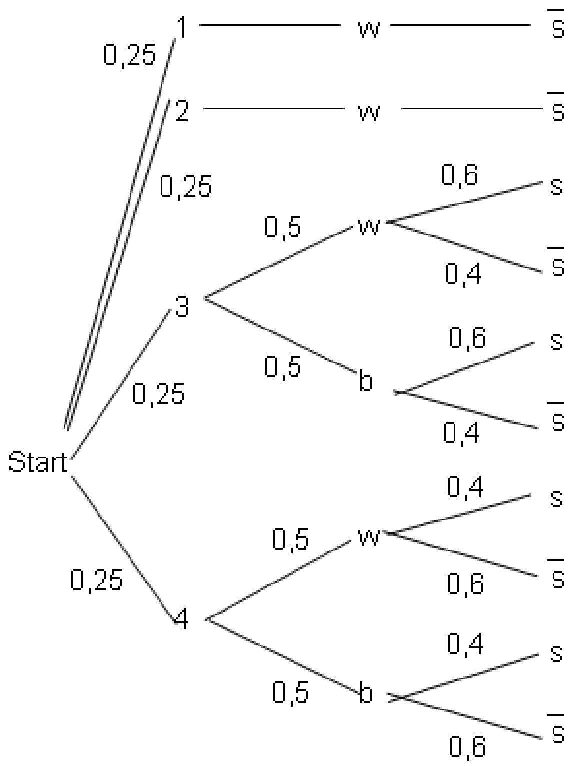
Gegenereignis von $\overline{F} \cup S = nF \cup S$

nach De-Morgan: $F \cap nS$ Der Gast bestellt Fruchteis ohne Sahne

Wahrscheinlichkeit: $P_{F \cap nS} = 0.2$

Teilaufgabe 2.0
Die Eisdiele BAVARIA unterhält im Sommer einen Eisstand an einem Badesee. Jeweils 25% der Kunden kaufen dort 1, 2, 3 oder 4 Kugeln Eis (es werden maximal 4 Kugeln pro Bestellung verkauft).
Die Kugeln werden normalerweise in der Waffel (w) ausgegeben. Beim Kauf von 3 oder 4 Kugeln kann der Kunde auch einen Becher (b) wählen, was jeweils jeder zweite dieser Kunden wünscht. Außerdem können Käufer von 3 oder 4 Kugeln das Eis mit sahne (s) oder ohne Sahne bestellen. Unabhängig davon, ob das Eis im Becher oder in der Waffel verkauft wird, wählen 60% der Kunden, die 3 Kuglen bestellen, auch Sahne, bei den Kunden mit 4 Kuglen sind dies nur 40%.
Das Zufallsexperiment besteht in der Feststellung, wie vile Kuglen Eis ein beliebig ausgewählter Kunde kauft, ob das Eis in der waffel oder im Becher ausgegeben wird und ob Sahne gewünscht wird.

Teilaufgabe 2.1 (6 BE)
Ermitteln Sie mithilfe eines Baumdiagramms alle 10 Elementarereignisse mit ihren Wahrscheinlichkeiten.



$\{\omega_i\}$	$P(\{\omega_i\})$	X
$1 w \bar{s}$	0,250	1
$2 w \bar{s}$	0,250	2
$3 w s$	0,075	4
$3 w \bar{s}$	0,050	3
$3 b s$	0,075	4
$3 b \bar{s}$	0,050	3
$4 w s$	0,050	5
$4 w \bar{s}$	0,075	4
$4 b s$	0,050	5
$4 b \bar{s}$	0,075	4

Teilaufgabe 2.2 (4 BE)
Gegeben seien folgende Ereignisse:
E_1: *Ein Kunde bestellt mehr als eine Kugel Eis.*
E_2: *Ein Kunde erhält keine Sahne.*
E_3: *Ein Kunde erhält das Eis im Becher, aber ohne Sahne.*
Geben Sie die Ereignisse E_3 und $E_4 = E_1 \cap E_2$ in aufzählender Mengenschreibweise an und bestimmen Sie ihre Wahrscheinlichkeiten.

$E_3 = \{3\,b\,\bar{s}, 4\,b\,\bar{s}\}$ $\quad P_{E3} := 0.05 + 0.075$ $\quad P_{E3} = 0.125$

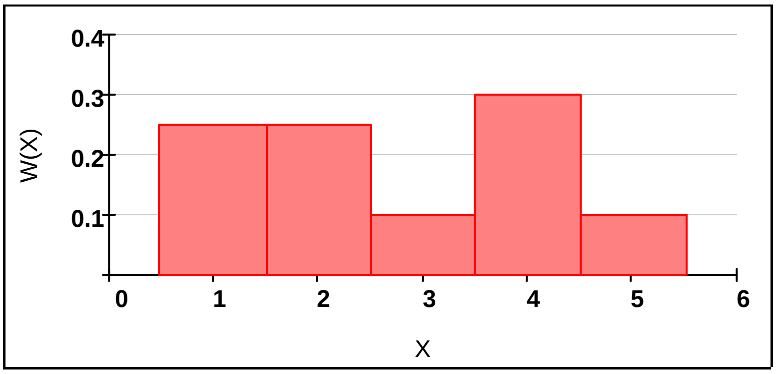
$E_1 = \Omega \setminus \{1\,w\,\bar{s}\}$

$E_2 = \{1\,w\,\bar{s}, 2\,w\,\bar{s}, 3\,w\,\bar{s}, 3\,b\,\bar{s}, 4\,w\,\bar{s}, 4\,b\,\bar{s}\}$

$E_4 = E_1 \cap E_2$ $\quad E_4 = \{2\,w\,\bar{s}, 3\,w\,\bar{s}, 3\,b\,\bar{s}, 4\,w\,\bar{s}, 4\,b\,\bar{s}\}$

$P_{E4} := 0.25 + 0.05 + 0.05 + 0.075 + 0.075$ $\quad P_{E4} = 0.5$

Teilaufgabe 2.3 (5 BE)
Eine Kugel Eis und eine Portion Sahne kosten jeweils 1,00 €.
Die Zufallsgröße X gibt den Preis einer Bestellung an.
Geben Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X an und stellen Sie sie geeignet graphisch dar.



Berechnen Sie bei den folgenden Aufgaben die Wahrscheinlichkeiten auf vier Nachkommastellen.

Teilaufgabe 3.0
Bei einem Wandertag kommt eine Klasse mit 25 Schülerinnen und Schülern an einem Eisstand vorbei. Der Lehrer kauft jedem Schüler eine Kugel Eis. Erfahrungsgemäß sind 40% aller verkauften Kugeln Schokoladeneiskugeln.

Teilaufgabe 3.1 (5 BE)
Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die Anzahl der Schokoladeneiskugeln, die der Lehrer für seine Klasse bezahlt, innerhalb der einfachen Standardabweichung um den Erwartungswert liegt.

Bernoulli-Experiment: Schokolade oder Nichtschokolade

$n := 25 \qquad p := 0.4$

$\mu := n \cdot p \qquad \mu = 10$

$\sigma := \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} \qquad \sigma = 2.45$

obere Grenze: $\mu + \sigma = 12.45$

untere Grenze: $\mu - \sigma = 7.55$

$P_\sigma = P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) = P(7.55 < X < 12.45) = P(8 \le X \le 12) = F(12) - F(7)$

Schlüsselwort für die kumulative Binomialverteilung: $F(k) = \text{pbinom}(k, n, p)$

$F(k) := \text{pbinom}(k, 25, 0.4) \qquad F(12) = 0.84623 \qquad F(7) = 0.15355$

$P_\sigma := F(12) - F(7) = 0.69268$

Teilaufgabe 3.2 (3 BE)
Nachdem die ersten 14 Schüler ihr Eis erhalten haben, merkt der Eisverkäufer, dass das Schokoladeneis nur noch für zwei Kugeln reicht. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass alle weiteren Bestellungen erfüllt werden können, wenn von den restlichen Eissorten noch genügend vorhanden sind.

Anzahl der verbleibenden Schüler: $n_2 := 25 - 14$ $\qquad n_2 = 11$

Neue Binomialverteilung (nicht im Tafelwerk): $W(k) := \text{dbinom}(k, 11, 0.4)$

$W(0) = 0.00363$ $\qquad W(1) = 0.02661$ $\qquad W(2) = 0.08868$

$P_2 := W(0) + W(1) + W(2)$ $\qquad P_2 = 0.11892$

Teilaufgabe 3.3.0
Der Eisverkäufer vermutet, dass der Anteil der verkauften Schoko-Eiskugeln höher als sonst liegt (Gegenhypothese) und will diese Vermutung anhand von 200 Bestellungen von jeweils einer Kugel Eis überprüfen.

Teilaufgabe 3.3.1 (6 BE)
Geben Sie die Testgröße sowie die Nullhypothese an und ermitteln Sie den maximalen Ablehnungsbereich der Nullhypothese auf dem 10%-Niveau.

Teilaufgabe 3.3.2 (3 BE)
Erläutern Sie, worin im vorliegenden Fall der Fehler 2. Art besteht. wie muss sich der minimale Annahmebereich von H_0 ändern, wenn das Signifikanzniveau abgesenkt wird?

Stichprobenumfang: $N := 200$
Wahrscheinlichkeit der Nullhypothese: $p := 0.4$
Nullhypothese H_0: $p_0 \le 0.6$
Gegenhypothese H_1: $p_1 > 0.6$
Signifikanzniveau: $\alpha_S := 10\%$

Lösung mit Tafelwerk:

$1 - P_A \le 0.1 \quad \Leftrightarrow \quad P_A \ge 0.9 \quad \Leftrightarrow \quad F(k) \ge 0.9$

Kumulative Binomialverteilung: $F(k) = \sum_{i=0}^{k} B(200, 0.4, i)$

$F(k) \ge 0.9 \xrightarrow{\text{Tafelwerk}} 0.91426 \quad \Leftrightarrow \quad k = 89$

Annahmebereich: $A = \{0, 1, 2, ..., 89\}$

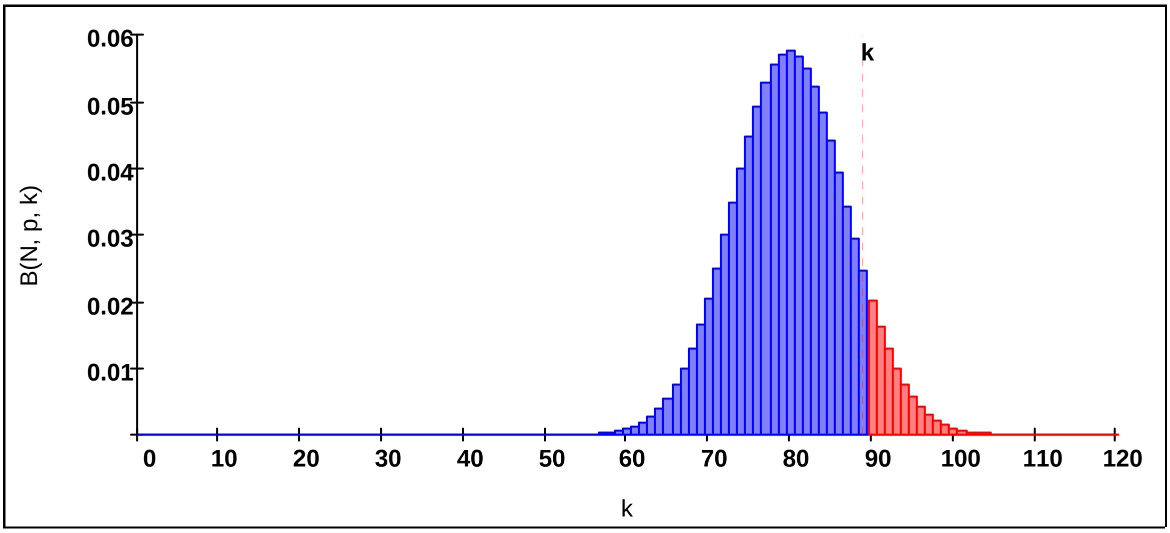
Ablehnungsbereich: $\overline{A} = \{90; 91; \ ...\ ; 200\}$

Lösung mit Mathcad:

Annahmebereich: $k := \text{qbinom}\left(1 - \alpha_S, N, p\right)$ $k = 89$

In Mathcad definierte Funktion: $F(x) := \text{pbinom}(x, N, p)$

Darstellung



Achtung: rechter Teil **N>120** abgeschnitten