Abschlussprüfung Berufliche Oberschule 2011
Mathematik 12 Technik - B I - Lösung

Teilaufgabe 1.0

In einem kartesischen Koordinatenystem des IR^3 sind in Abhängigkeit der Variablen $\mathbf{p, q} \in \mathbf{IR}$ die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} p-q \\ -p \\ q \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} p-q \\ p \\ 2 \cdot p - q \end{pmatrix}$ gegeben.

Teilaufgabe 1.1 (2 BE)

Zeigen Sie, dass unabhängig von der Wahl für p und q die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ senkrecht aufeinander stehen.

$$\begin{pmatrix} p-q \\ -p \\ q \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p-q \\ p \\ 2 \cdot p - q \end{pmatrix} = (p-q)^2 - p^2 + q \cdot (2 \cdot p - q) = p^2 - 2 \cdot p \cdot q + q^2 - p^2 + 2 \cdot p \cdot q - q^2 = 0$$

Skalarprodukt gleich Null $\Rightarrow$ Beh.

Teilaufgabe 1.2.0 (2 BE)

Setzen Sie nun $\mathbf{p = 2}$ und $\mathbf{q = 1}$. Daraus ergeben sich mit dem Koordinatenursprung O die Ortsvektoren $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ und $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$ für die Punkte A und B.

Teilaufgabe 1.2.1 (3 BE)

Bestimmen Sie eine Normalengleichung der Ebene E, in der die Punkte A und B sowie der Koordinatenursprung O liegen. Geben Sie die Ebene E auch in Koordinatenform an.

Ortsvektoren:

$$OA := \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad OB := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Normalenvektor der Ebene:

$$n_E := OA \times OB \qquad n_E = \begin{pmatrix} -8 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Normalengleichung: Koordinatengleichung: Vereinfachung:

$$\left[\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \cdot n_E = 0 \rightarrow 4 \cdot x_3 - 2 \cdot x_2 - 8 \cdot x_1 = 0$$

$$-4 \cdot x_1 - x_2 + 2 \cdot x_3 = 0$$

Teilaufgabe 1.2.2 (7 BE)
Berechnen Sie den Abstand des Koordinatenursprungs O von der durch die Punkte A und B festgelegten Geraden g.
Bestimmen Sie auch den Punkt L auf der Geraden g, der die geringste Entfernung vom Ursprung hat.
[Teilergebnis: **L(1 ; −0.8 ; 1.6)**]

Gerade g: $x_g = OA + \lambda \cdot (OB - OA)$ $\quad x_g(\lambda) := \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$

Fußpunkt L liegt auf der Geraden: $OL = OA + \lambda \cdot u$ (1)

Verbindungsvektor **OL** senkrecht Lotvektor, d.h. Skalarprodukt = 0: $(OL - OP) \cdot u = 0$ (2)

Bedingung: $OL(\lambda) := x_g(\lambda) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \cdot \lambda - 2 \\ 2 \cdot \lambda + 1 \end{pmatrix}$ (1)

$\lambda_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ -2 + 4 \cdot \lambda \\ 1 + 2 \cdot \lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = 0 \rightarrow 20 \cdot \lambda - 6 = 0 \text{ auflösen}, \lambda \rightarrow \frac{3}{10}$ (2)

Lotfußpunkt: $OL := x_g(\lambda_1)$ $\quad OL = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{4}{5} \\ \frac{8}{5} \end{pmatrix}$ $\quad L := OL^T$ $\quad L = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{4}{5} & \frac{8}{5} \end{pmatrix}$

Abstand: $d := |OL|$ $\quad \boxed{d = \frac{\sqrt{5} \cdot \sqrt{21}}{5} = 2.049}$ $\quad \sqrt{4.2} = 2.049$

Teilaufgabe 1.2.3 (9 BE)
Die Punkte S_1 und S_2 liegen auf der Geraden g. Die Strecke $[S_1 \; S_2]$ bildet die Basis eines gleichschenkligen Dreiecks mit dem Koordinatenursprung O als Spitze. Dieses Dreieck besitzt die Flächenmaßzahl $A_\Delta = 2 \cdot \sqrt{4.2}$.
Fertigen Sie eine Lageskizze der Punkte O, A, B, L, S_1 und S_2 an und berechnen Sie die Koordinaten der Punkte S_1 und S_2. Runden Sie die Koordinaten der Punkte S_1 und S_2 auf zwei Stellen nach dem Komma.
[Zwischenergebnis: $\left|\overrightarrow{LS_1}\right| = 2$]

Die Strecke LS_1 ist die Höhe des gleichschenkligen Dreiecks S_1OS_2.

$$A_\Delta = \frac{1}{2} \cdot \left|\overrightarrow{(S_1 S_2)}\right| \cdot d = 2 \cdot \sqrt{4.2} \quad \Rightarrow \quad \left|\overrightarrow{(S_1 S_2)}\right| = \frac{4 \cdot \sqrt{4.2}}{d} = \frac{4 \cdot \sqrt{4.2}}{\sqrt{4.2}} = 4$$

Ortsvektor zum Punkt S_1:

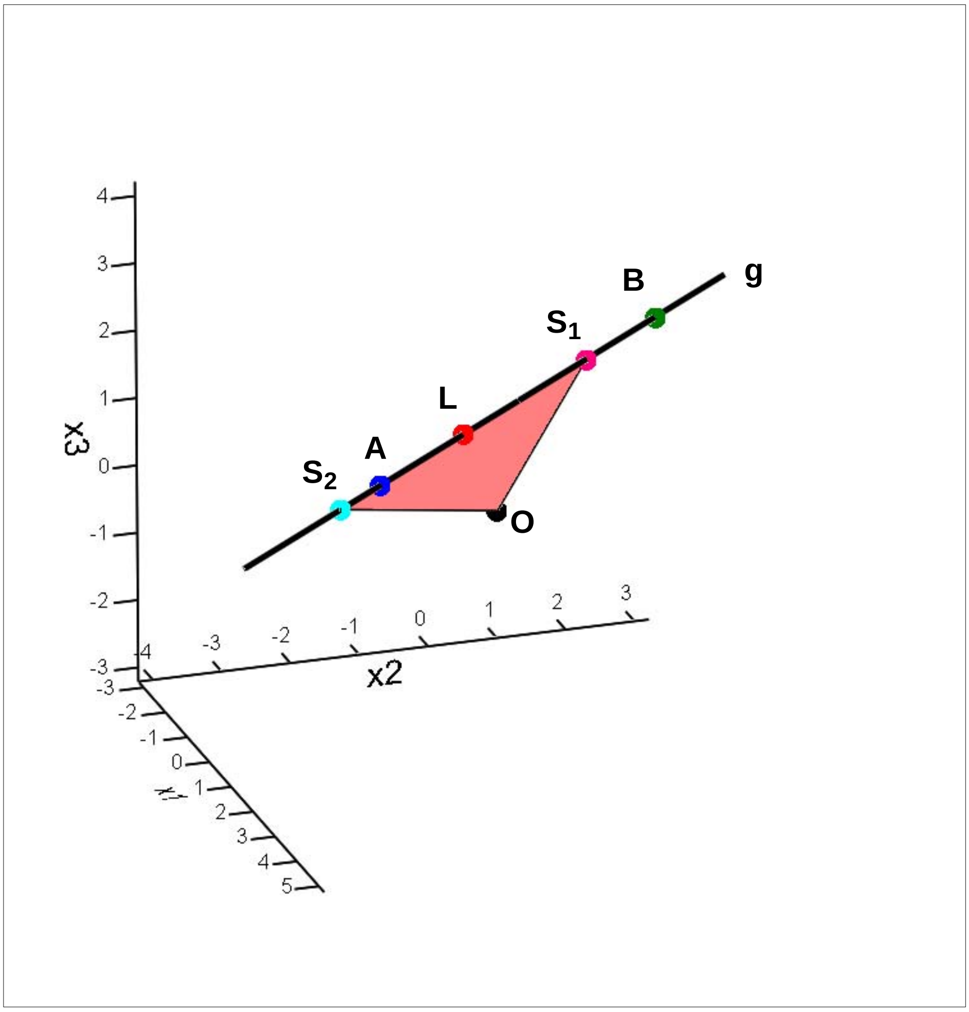
$$OS_1 = OL + 2\cdot\frac{u_g}{|u_g|} \qquad OS_1 := \begin{pmatrix}1\\ -\frac{4}{5}\\ \frac{8}{5}\end{pmatrix} + 2\cdot\frac{\begin{pmatrix}0\\4\\2\end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix}0\\4\\2\end{pmatrix}\right|} \qquad OS_1 = \begin{pmatrix}1\\0.99\\2.49\end{pmatrix}$$

$S_1(1, 0.99, 2.49)$

Ortsvektor zum Punkt S_2:

$$OS_2 = OL - 2\cdot\frac{u_g}{|u_g|} \qquad OS_2 := \begin{pmatrix}1\\ -\frac{4}{5}\\ \frac{8}{5}\end{pmatrix} - 2\cdot\frac{\begin{pmatrix}0\\4\\2\end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix}0\\4\\2\end{pmatrix}\right|} \qquad OS_2 = \begin{pmatrix}1\\-2.59\\0.71\end{pmatrix}$$

$S_2(1, -2.59, 0.71)$



Teilaufgabe 2.0
Die folgenden Gleichungen I, II und III stellen jeweils Ebenen in Koordinatenform dar:

I $\quad x_1 + x_2 + 2 \cdot x_3 = 3$

II $\quad x_2 + x_3 = 1$

III $\quad 2 \cdot x_1 - x_2 + x_3 = c$, wobei $c \in \mathbb{R}$.

Teilaufgabe 2.1 **(4 BE)**
Ermitteln Sie in Abhängigkeit von c die Anzahl der Lösungen des Gleichungssystems.

Gaußmatrix diagonalisieren:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & c \end{pmatrix} \xrightarrow[(III) - 2\cdot(I)]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -3 & c-6 \end{pmatrix} \xrightarrow[III + 3\cdot(II)]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & c-3 \end{pmatrix}$$

Unendlich viele Lösungen für $c = 3$

Keine Lösungen für $c \neq 3$

Teilaufgabe 2.2 **(5 BE)**
Bestimmen Sie für $c = 3$ die Lösung des Gleichungssystems und interpretieren Sie die gegenseitige Lage der drei Ebenen.

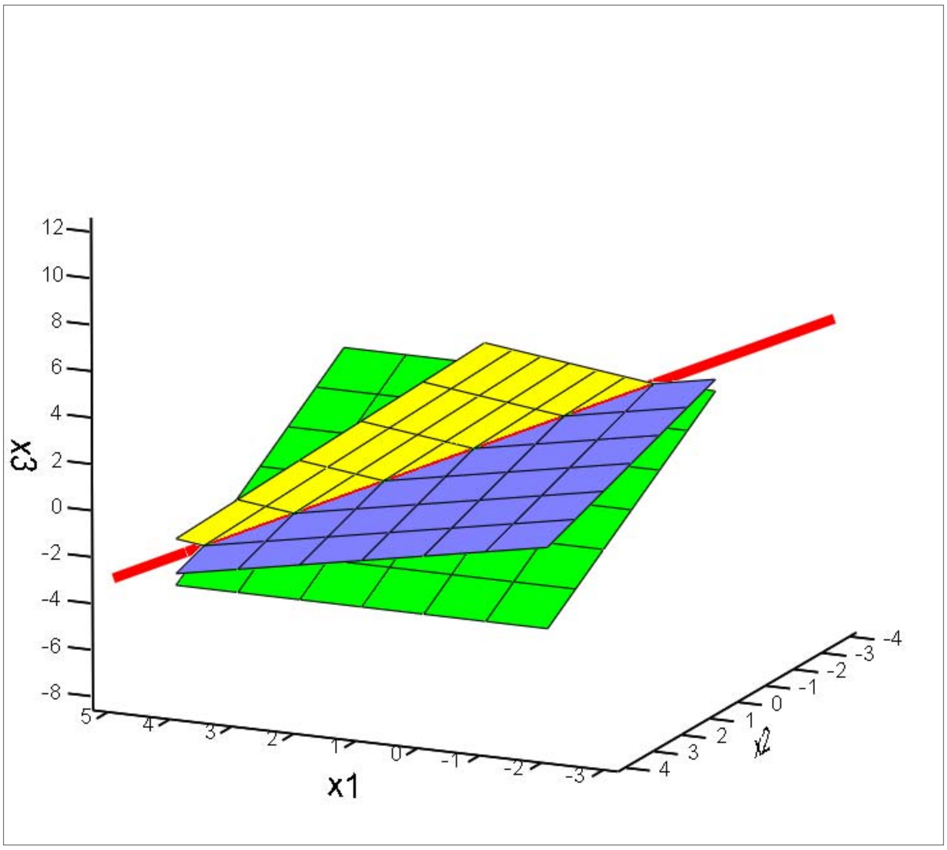
Wählen Sie $\quad x_3(\lambda) := \lambda$

$x_2(\lambda) := 1 - \lambda$

$x_1(\lambda) := 3 - (1 - \lambda) - 2 \cdot \lambda \qquad x_1(\lambda) = 2 - \lambda$

Lösung: $\quad g(\lambda) := \begin{pmatrix} x_1(\lambda) \\ x_2(\lambda) \\ x_3(\lambda) \end{pmatrix} \qquad g(\lambda) = \begin{pmatrix} 2-\lambda \\ 1-\lambda \\ \lambda \end{pmatrix}$

Die Ebenen schneiden sich in einer Geraden (vgl. Skizze auf nächster Seite).



x3
12
10
8
6
4
2
0
-2
-4
-6
-8
x1
5
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
x2
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4