Abschlussprüfung Berufliche Oberschule 2011
Mathematik 12 Technik - B II - Lösung

Teilaufgabe 1.0

In einem kartesischen Koordinatenystem des IR^3 sind die Punkte $\mathbf{P}(1,0,0)$, $\mathbf{Q}(0,1,0)$, $\mathbf{R}(0,0,1)$ und $\mathbf{S_k}(k,k,k)$ mit $k \in IR \setminus \{0\}$ gegeben.

Teilaufgabe 1.1 (6 BE)

Berechnen Sie die Werte des Parameters k, für die die gegebenen Punkte eine dreiseitige Pyramide aufspannen.

Gegeben sind folgende Ortsvektoren:

$$OP := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad OQ := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad OR := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad OS(k) := \begin{pmatrix} k \\ k \\ k \end{pmatrix}$$

Verbindungsvektoren:

$$PQ := OQ - OP = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad PR := OR - OP = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad PS(k) := OS(k) - OP = \begin{pmatrix} k-1 \\ k \\ k \end{pmatrix}$$

Spatprodukt gleich Null:

$$(PQ \times PR) \cdot PS(k) = 0 \rightarrow 3 \cdot \bar{k} - 1 = 0 \text{ auflösen}, k \rightarrow \frac{1}{3}$$

Für $\boxed{k \neq \frac{1}{3}}$ spannen die Punkte eine Pyramide auf.

Teilaufgabe 1.2 (6 BE)

Bestimmen Sie, für welche Werte des Parameters k die Pyramide ein reguläres Tetraeder, also eine gleichseitige Pyramide ist.

Alle Seitenkanten sind gleich lang, also Berechnung der Länge der einzelnen Verbindungsvektoren:

$$|PQ| = \sqrt{2} \qquad |PR| = \sqrt{2} \qquad |OR - OP| = \sqrt{2}$$

Bedingung: $\quad |PQ| = |PS(k)| \rightarrow \sqrt{2} = \sqrt{(|k-1|)^2 + 2 \cdot (|k|)^2}$

$$2 = (k-1)^2 + k^2 + k^2 \text{ vereinfachen } \rightarrow 2 = 3 \cdot k^2 - 2 \cdot k + 1 \text{ auflösen}, k \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

zwei Lösungen

Teilaufgabe 2.0
Methan CH_4 ist eine Kohlenwasserstoffverbindung. Das Molekül hat die Form eines regulären Tetraeders, in dessen Ecken sich die H-Atome befinden. Das C-Atom liegt im Punkt C, gleich weit von allen H-Atomen entfernt. Der Punkt C teilt die Höhen des Tetraeders im Verhältnis 3:1. Die Ecken des Teraeders, also die Lage der H-atome, seien die Punkte aus 1.0 mit k = 1, also $P(1,0,0)$, $Q(0,1,0)$, $R(0,0,1)$ und $S_1(1,1,1)$.

Teilaufgabe 2.1 (3 BE)
Die Punkte P, Q und S_1 liegen in einer Ebene F. Bestimmen Sie eine Gleichung dieser Ebene in Koordinatenform.
[Mögliches Ergebnis: **F:** $x_1 + x_2 - x_3 - 1 = 0$]

Richtungsvektoren: $PQ = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad PS(1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Normalenvektor: $n_E := PQ \times PS(1)$ $\quad n_E = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Ebene F: $\left[\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - OP\right] \cdot n_E = 0 \rightarrow x_1 + x_2 - x_3 - 1 = 0$

Teilaufgabe 2.2 (3 BE)
Bestimmen Sie das Volumen des Tetraeders PQS_1R.

$V := \frac{1}{6} \cdot \left|(PQ \times PS(1)) \cdot PR\right|$ $\quad \boxed{V = \frac{1}{3} = 0.333}$

Teilaufgabe 2.3 (4 BE)
Der Punkt T ist der Fußpunkt des vom Punkt R auf die Ebene F gefällten Lotes. Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes T.
[Ergebnis: $T\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$]

Hilfsgerade $l \perp F$ durch R:

$x_l(\tau) := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \tau \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

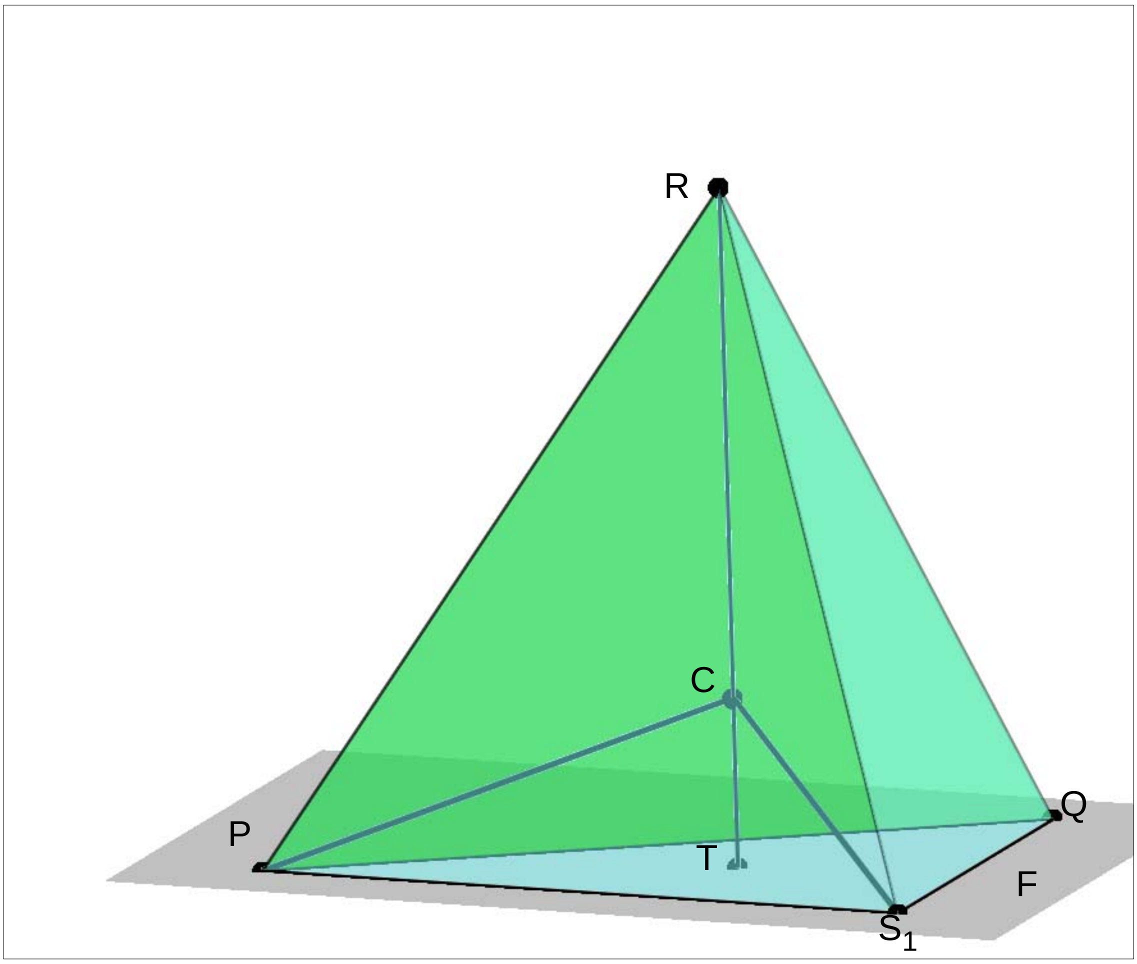
$l \cap F$: $\quad \tau + \tau - (1 - \tau) - 1 = 0 \text{ vereinfachen } \rightarrow 3 \cdot \tau - 2 = 0 \text{ auflösen}, \tau \rightarrow \frac{2}{3}$

Ortsvektor zum Lotfußpunkt:

$$\mathbf{OT} := \mathbf{x_l}\left(\frac{2}{3}\right) = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Lotfußpunkt:

$$\mathbf{T} := \mathbf{OT}^{\mathbf{T}} \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$



Teilaufgabe 2.4 (4 BE)
Berechnen Sie die Koordinaten des C-Atoms.
[Ergebnis: $C\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$]

Ortsvektor zum Punkt C: $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OT} + \frac{1}{4}\cdot\overrightarrow{TR}$

Verbindungsvektor $\overrightarrow{TR}$: $TR := OR - OT \rightarrow \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$

Ortsvektor $\overrightarrow{OT}$: $OT = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

einsetzen: $OC := \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} + \frac{1}{4}\cdot\begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

Koordinaten des C-Atoms: $C := OC^T$ $\quad C \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

Teilaufgabe 2.5 (4 BE)
Bestimmen Sie den Winkel φ zwischen zwei C-H-Bindungen, also z. B. den Winkel PCS_1.

$$\cos(\varphi) = \frac{\overrightarrow{CP}\cdot\overrightarrow{CS_1}}{\left|\overrightarrow{CP}\right|\cdot\left|\overrightarrow{CS_1}\right|} \qquad \cos(\varphi) := \frac{\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}}{\sqrt{\frac{3}{4}}\cdot\sqrt{\frac{3}{4}}} \qquad \cos(\varphi) = -\frac{1}{3}$$

$\varphi := \operatorname{acos}\left(-\frac{1}{3}\right)$ $\quad \varphi = 109.5\cdot°$