Das Newtonsche Näherungsverfahren, Teil 1

Theorie 1 - Der Algorithmus

Das ***Newtonsche Näherungsverfahren*** (benannt nach Sir Isaac Newton 1669) ist in der Mathematik das Standardverfahren zur numerischen Lösung von nichtlinearen und transzendenten Gleichungen.

Bei Gleichungen mit einer Variablen lassen sich zu einer gegebenen stetig differenzierbaren Funktion **f** Näherungswerte für Lösungen der Gleichung **f(x) = 0** finden.

Die grundlegende Idee dieses Verfahrens ist, die Funktion in einem Ausgangspunkt zu ***linearisieren***, d. h. ihre Tangente zu bestimmen, und die Nullstelle der Tangente als verbesserte Näherung der Nullstelle der Funktion zu verwenden. Die erhaltene Näherung dient im Allgemeinen als Ausgangspunkt für einen weiteren Verbesserungsschritt.

Gegeben ist ein Funktionsterm f(x) und die 1. Ableitung f '(x).

Tangente an der Stelle x_0 (Startwert): $t(x) = f'(x_1)\cdot(x - x_1) + f(x_1)$

Nullstelle der Tangente: $t(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f'(x_1)\cdot(x - x_1) + f(x_1) = 0$

$$f'(x_1)\cdot(x - x_1) + f(x_1) = 0 \text{ auflösen}, x \;\rightarrow -\frac{f(x_1) - x_1\cdot f'(x_1)}{f'(x_1)}$$

Vereinfachen: $-\frac{f(x_1) - x_1\cdot f'(x_1)}{f'(x_1)} \text{ vereinfachen } \rightarrow x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$

Lösung: $x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$ als neuer Startwert

Dies wird nun mehrmals durchgeführt, und es ergibt sich folgende rekursive Näherungsformel:

$$\boxed{x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}}$$

Notwendige Bedingung

(1) Die Funktion **f** besitzt im Intervall [a ; b] eine Nullstelle x_0 (Nullstellensatz).

(2) Die Funktion **f** ist im Intervall [a ; b] differenzierbar.

Beispiel

Gegeben ist der Funktionsterm $f(x) := \frac{1}{10}\left(x^3 - 2\cdot x - 5\right)$ mit $x \in \mathbb{R}$.

a) Bestimmen Sie ein Intervall, in dem eine Nullstelle liegen muss.
b) Stellen Sie die erste und die zweite Näherung als Nullstellen der Tangenten dar.
c) Bestimmen Sie, ausgehend vom Startwert x_1, in drei Näherungsschritten die Nullstelle der Funktion f nach der Newtonschen Näherung.

Teilaufgabe a)

$x_w := -2 .. 6$

$x_w =$	$f(x_w) =$
-2	-0.9
-1	-0.4
0	-0.5
1	-0.6
2	-0.1
3	1.6
4	5.1
5	11
6	19.9

$f(2) = -0.1$

$f(3) = 1.6$

$f(2)\cdot f(3) = -\frac{4}{25}$ < 0

$\Rightarrow$ Im Intervall] 2 ; 3 [findet ein Vorzeichenwechsel der Funktionswerte statt.

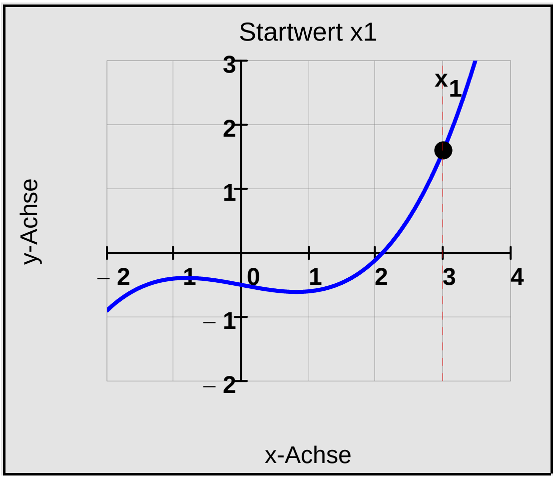
Nach dem Nullstellensatz hat die Funktion f(x) im Intervall I_0 =] 2 ; 3 [mindestens eine Nullstelle.

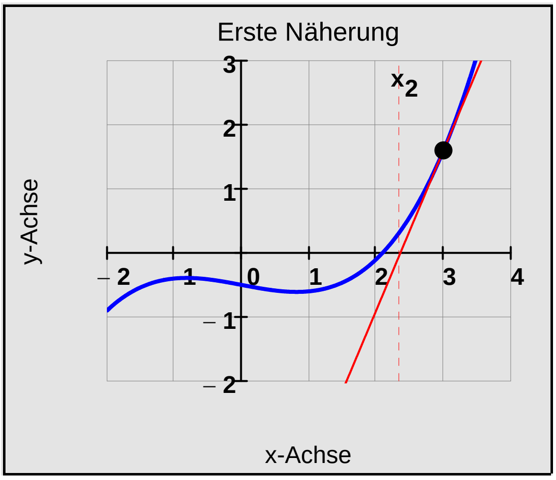
Teilaufgabe b)

1. Ableitung: $f'(x) := \frac{d}{dx}f(x) = \frac{3\cdot x^2 - 2}{10}$

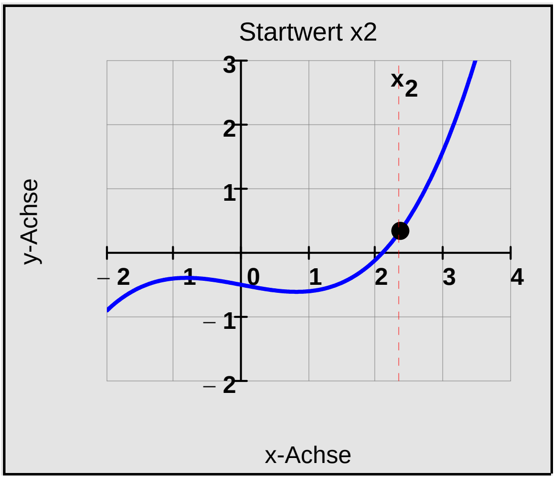
Ausgangswert: $x_1 := 3$

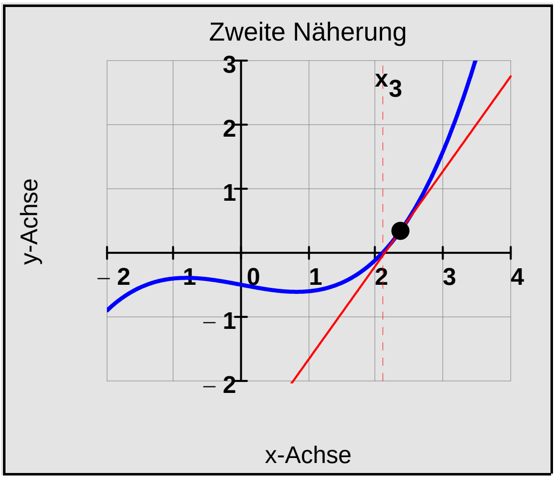
1. Tangente: $t_1(x) := f'(x_1)\cdot(x - x_1) + f(x_1) = \frac{5\cdot x}{2} - \frac{59}{10}$





2. Tangente: $t_2(x) := f'(x_2)\cdot(x - x_2) + f(x_2) = \frac{9193\cdot x}{6250} - \frac{488883}{156250}$





Teilaufgabe c)

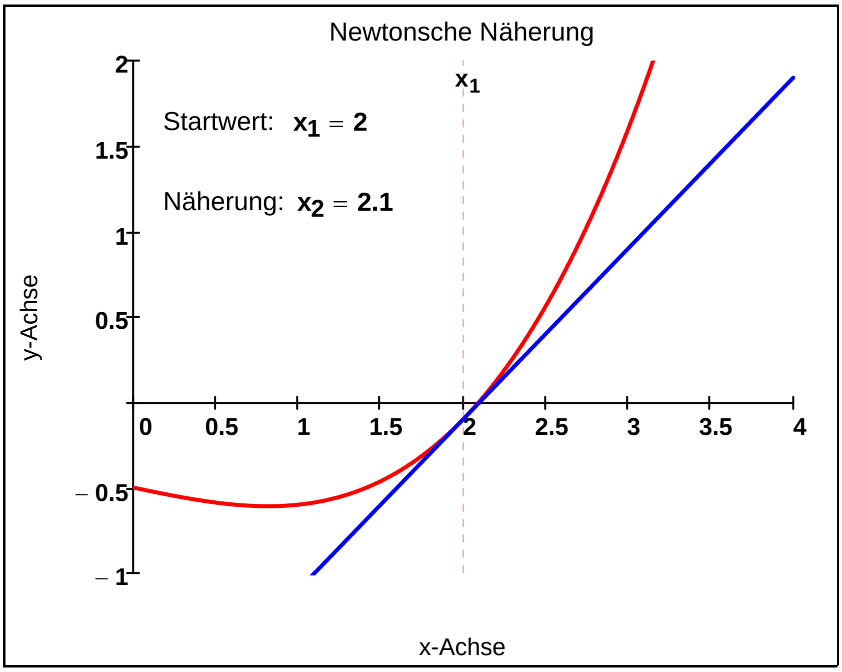
Iteration: Funktionswerte:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{(x_i)^3 - 2\cdot(x_i) - 5}{3\cdot(x_i)^2 - 2}$$

$x_2 := x_1 - \frac{(x_1)^3 - 2\cdot(x_1) - 5}{3\cdot(x_1)^2 - 2}$	Startwert:	$x_1 := 3$	$f(x_1) = 1.60000$
	1. Näherung:	$x_2 = 2.36000$	$f(2) = -0.10000$
$x_3 := x_2 - \frac{(x_2)^3 - 2\cdot(x_2) - 5}{3\cdot(x_2)^2 - 2}$	2. Näherung:	$x_3 = 2.12720$	$f(x_3) = 0.03711$
$x_4 := x_3 - \frac{(x_3)^3 - 2\cdot(x_3) - 5}{3\cdot(x_3)^2 - 2}$	3. Näherung:	$x_4 = 2.09514$	$f(x_4) = 0.00065$

$x := x$ $\qquad f(x) = \frac{x^3 - 2\cdot x - 5}{10}$

Startwert wählen: $\qquad$ Anzahl der Schritte:



Anzahl der Schritte:

$N = 6$

Lage der Nullstelle:

$x_N = 2.09455$

Iteration:

$x_i =$

2
2.1
2.12719678015882
2.09513603693363
2.09455167382427
2.09455148154235

Funktionswerte:

$f(x_i) =$

-0.10000000000000
0.00610000000000
0.03710998462472
0.00065266259537
0.00000021461431
0.00000000000002

Hinweis
Im Iterationsverfahren immer ***mit mindestens 4 gültigen Ziffern rechnen*** und erst beim Endergebnis auf die vorgeschrieben Dezimalstellen runden.