LLL2011

Lehrer Lernen von Lehrern

Dynamische Mathematik
mit dem Computeralgebrasystem Mathcad

Sekundarstufe I

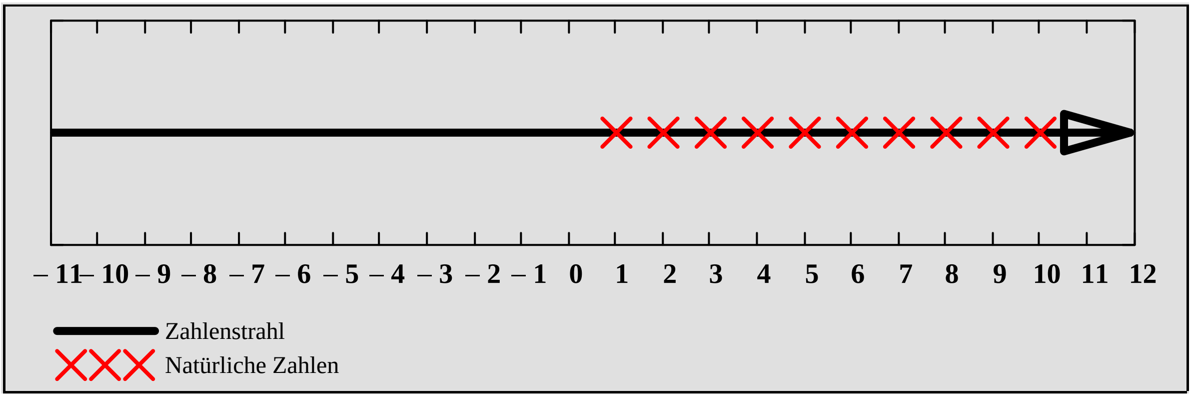
GERTRUD SÄLZLE

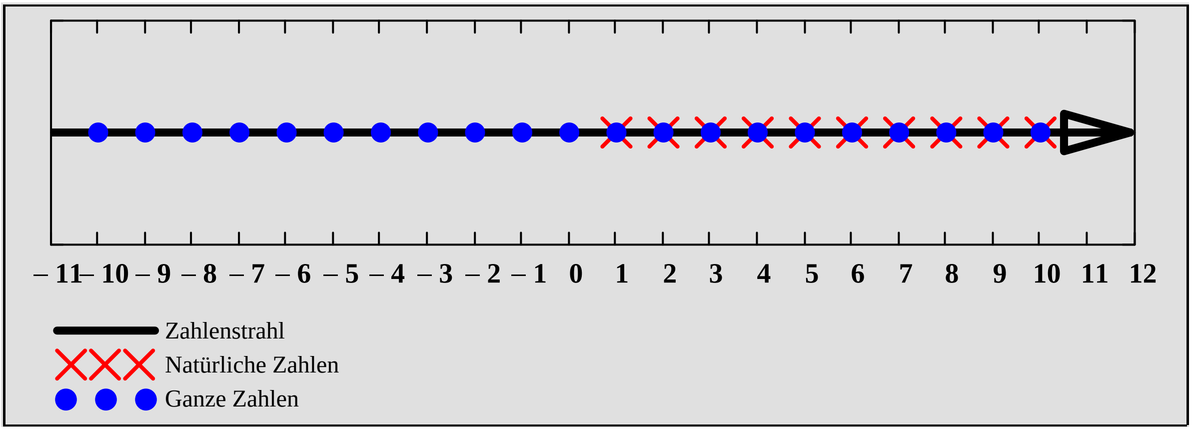
gertrud@saelzle-online.de

Vortrag am 22.02.2011
an der Technischen Universität München

Natürliche Zahlen N, ganze Zahlen Z
- Zahlenbereiche - Zahlenstrahl - Koordinatensystem -

<u>Bemerkung:</u>
Die historische Definition der Menge der natürlichen Zahlen N fängt mit der Zahl "1" an.
Nach DIN 1302 ist die Menge N = { 0, 1, 2, 3 ..... } die Menge der natürlichen Zahlen,
N* = { 1, 2, 3, ... } dagegen die Menge der natürlichen Zahlen ohne die Null.



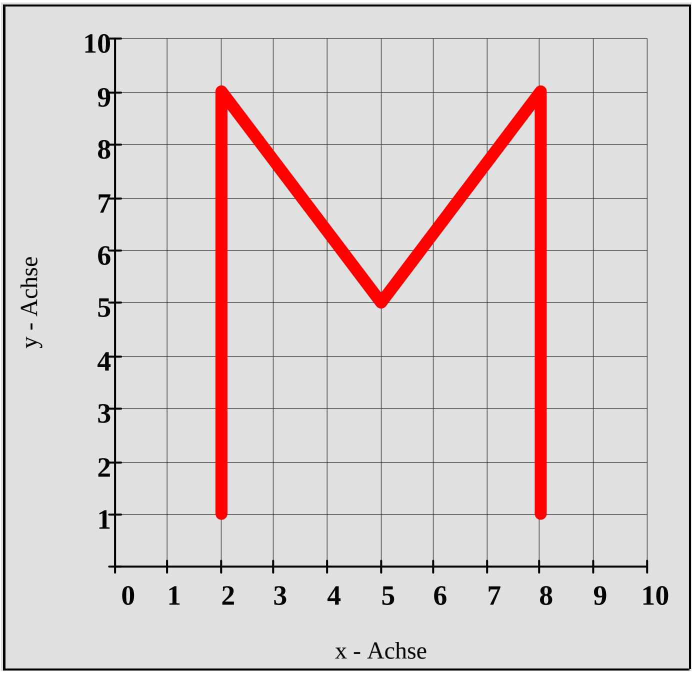


Aufgabe 1

In einer Tabelle sind die Koordinaten von 5 Punkten gegeben.
Tragen Sie die Punkte in ein Koordinatensystem ein und verbinde Sie sie in der gegebenen Reihenfolge.

x-Werte	y-Werte
2	1
2	9
5	5
8	9
8	1

Begrenzungen des Koordinatensystems: $x_A := 0$ $x_E := 10$ $y_A := 0$ $y_E := 10$

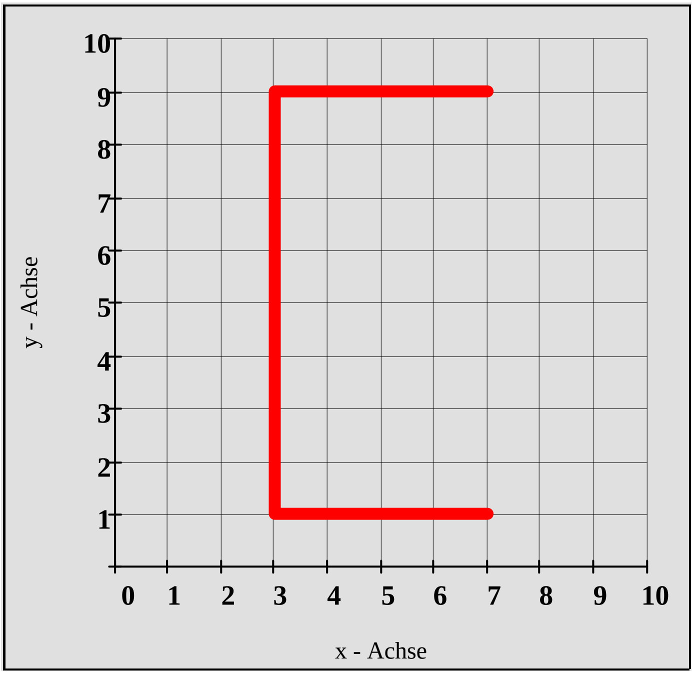


Aufgabe 2

In einer Tabelle sind die Koordinaten von vier Punkten gegeben.
Tragen Sie die Punkte in ein Koordinatensystem ein und verbinden Sie sie in der gegebenen Reihenfolge.

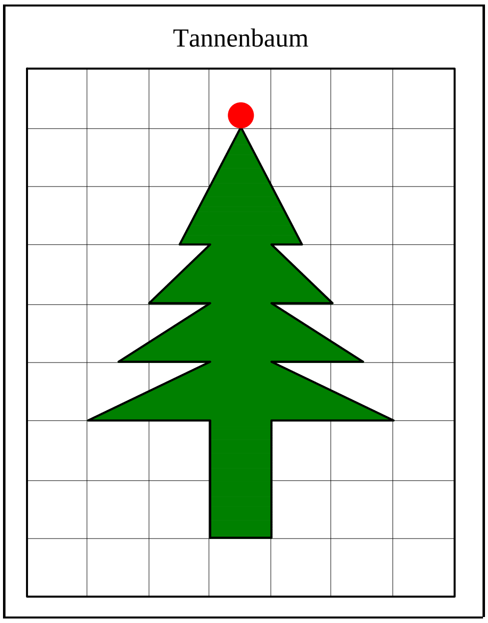
x-Werte	y-Werte
7	9
3	9
3	1
7	1

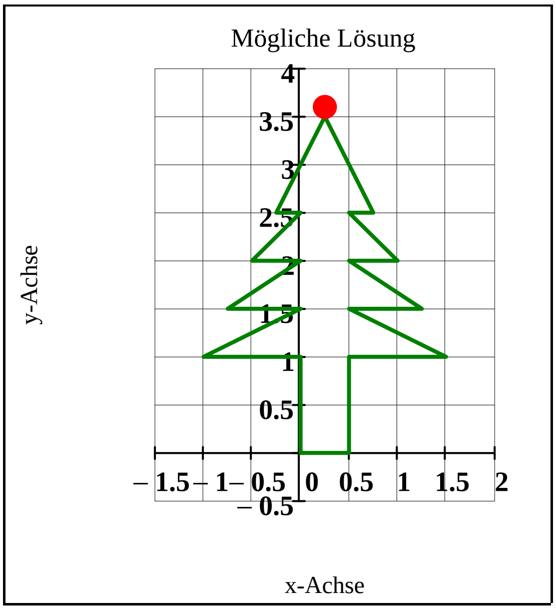
Begrenzungen des Koordinatensystems: $x_A := 0$ $x_E := 10$ $y_A := 0$ $y_E := 10$



Aufgabe 3

Es ist das Bild eines Tannenbaumes gegeben. Finden Sie die Koordinaten in einem geeigneten Koordinatensystem und zeichnen Sie den Tannenbaum selbst.





Eine mögliche Lösung:

Punkt =

"Nr."	"x"	"y"
1	0	0
2	0.5	0
3	0.5	1
4	1.5	1
5	0.5	1.5
6	1.25	1.5
7	0.5	2
8	1	2
9	0.5	2.5
10	0.75	2.5
11	0.25	3.5
12	-0.25	2.5
13	0	2.5
14	-0.5	2
15	0	2
16	-0.75	1.5
17	0	1.5
18	-1	1
19	0	1
20	0	0

Zeichnen Sie einen Tannenbaum mit Geonext:

Derweihnachtsbaum.gxt

Reelle Zahlen
- Berechnung einer Wurzel mittels Intervallschachtelung -

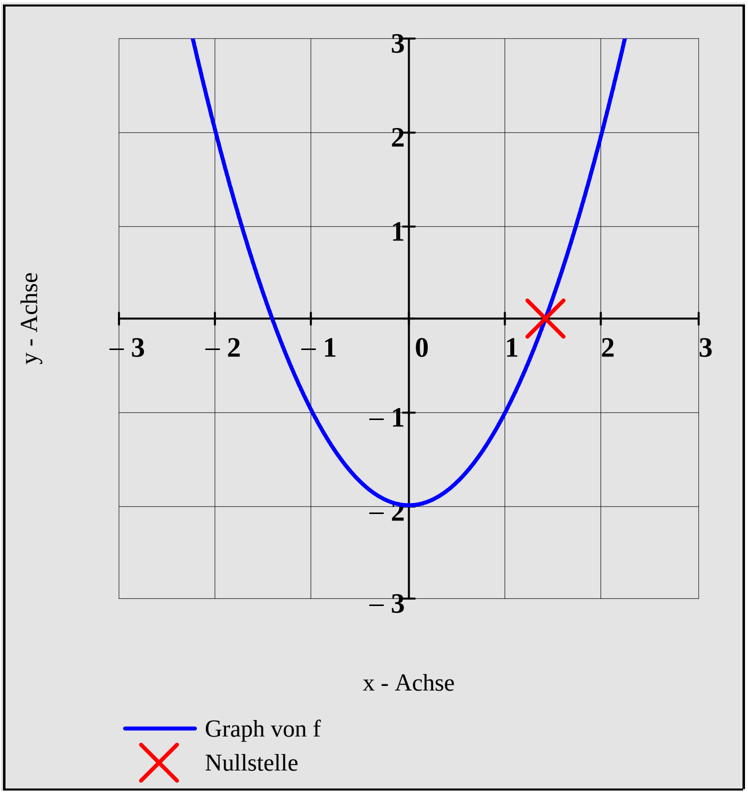
Aufgabe

Gegeben ist die Funktion f mit $\mathbf{f(x) := x^2 - 2}$

a) Zeichnen Sie den Graphen der Funktion f für $\mathbf{-1 \le x \le 3}$.

b) Ermitteln Sie die Nullstelle der Funktion f durch fortlaufende Intervallverkleinerung.

Teilaufgabe a)



Teilaufgabe b)

$\mathbf{f(x) = 0}$ $\qquad$ $\mathbf{x^2 - 2 = 0}$ $\qquad$ $\mathbf{x = \sqrt{2}}$

Aus der graphischen Darstellung folgt: $\mathbf{\sqrt{2} \in [1; 2]}$

Die genauere Ermittlung von $\mathbf{\sqrt{2}}$ erfolgt durch schrittweise Verkleinerung des Intervalls.

1. Schritt: $\mathbf{x := 1, 1 + 0.1 .. 2}$

$\mathbf{x} =$	$\mathbf{x^2} =$
1	1.00
1.1	1.21
1.2	1.44
1.3	1.69
1.4	1.96
1.5	2.25
1.6	2.56
1.7	2.89
1.8	3.24
1.9	3.61
2	4.00

$\Rightarrow \quad \sqrt{2} \in [1.4; 1.5]$

2. Schritt: $\mathbf{x := 1.4, 1.4 + 0.01 .. 1.5}$

$\mathbf{x} =$	$\mathbf{x^2} =$
1.40	1.9600
1.41	1.9881
1.42	2.0164
1.43	2.0449
1.44	2.0736
1.45	2.1025
1.46	2.1316
1.47	2.1609
1.48	2.1904
1.49	2.2201
1.50	2.2500

$\Rightarrow \quad \sqrt{2} \in [1.41; 1.42]$

3. Schritt: $\mathbf{x := 1.41, 1.41 + 0.001 .. 1.42}$

$\mathbf{x} =$	$\mathbf{x^2} =$
1.410	1.988100
1.411	1.990921
1.412	1.993744
1.413	1.996569
1.414	1.999396
1.415	2.002225
1.416	2.005056
1.417	2.007889
1.418	2.010724
1.419	2.013561
1.420	2.016400

$\Rightarrow \quad \sqrt{2} \in [1.414; 1.415]$

4. Schritt: $x := 1.414, 1.414 + 0.0001 .. 1.415$

$x =$	$x^2 =$
1.4140	1.99939600
1.4141	1.99967881
1.4142	1.99996164
1.4143	2.00024449
1.4144	2.00052736
1.4145	2.00081025
1.4146	2.00109316
1.4147	2.00137609
1.4148	2.00165904
1.4149	2.00194201
1.4150	2.00222500

$\Rightarrow \quad \sqrt{2} \in [1.4142; 1.4143]$

5. Schritt: $x := 1.4142, 1.4142 + 0.00001 .. 1.4143$

$x =$	$x^2 =$
1.41420	1.9999616400
1.41421	1.9999899241
1.41422	2.0000182084
1.41423	2.0000464929
1.41424	2.0000747776
1.41425	2.0001030625
1.41426	2.0001313476
1.41427	2.0001596329
1.41428	2.0001879184
1.41429	2.0002162041
1.41430	2.0002444900

$\Rightarrow \quad \sqrt{2} \in [1.41421; 1.41422]$

Zusatzaufgabe

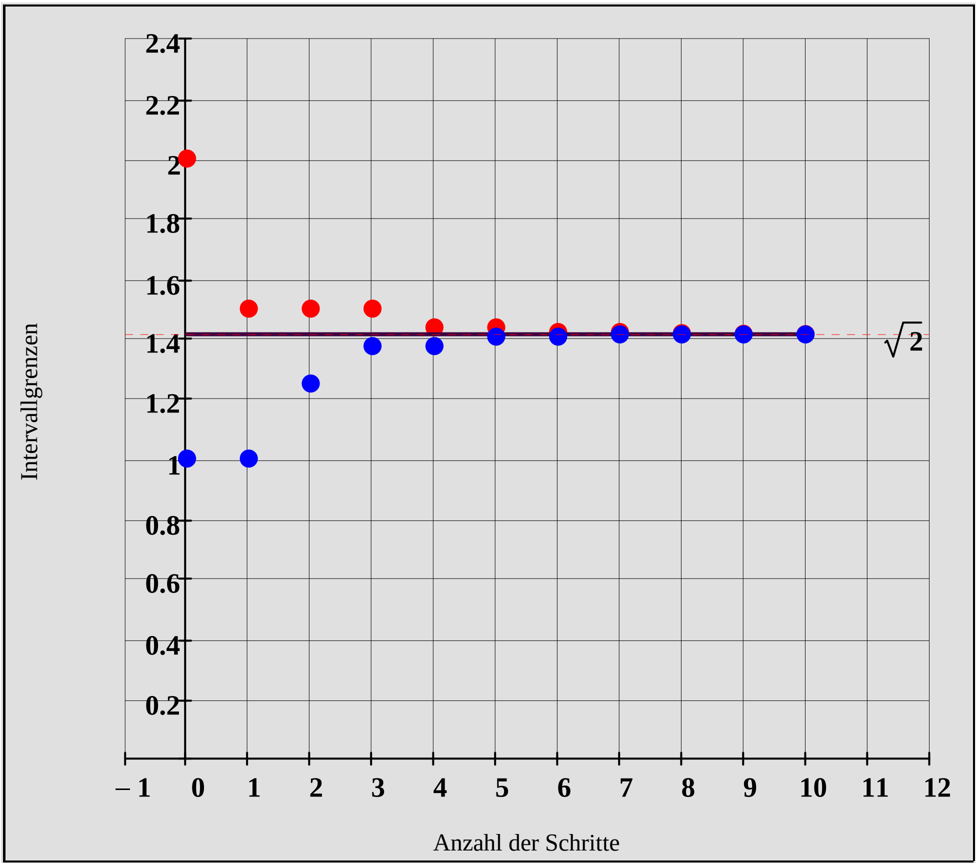
Gegeben ist wieder die Funktion f mit $f(x) := x^2 - 2$

c) Ermitteln Sie die Nullstelle der Funktion f mit Hilfe eines Programms.

$f(x) = 0$ $\qquad$ $x^2 - 2 = 0$ $\qquad$ $x = \sqrt{2}$

Die gesuchte Nullstelle der Funktion und somit der Wert von $\sqrt{2}$ liegt im Intervall [1; 2] (Nullstellensatz). Das Intervall, in dem die Nullstelle liegt, soll schrittweise mit Hilfe eines Programms eingeengt werden.

Intervall für die Schritte: $k := 0 .. 10$



Rechnen mit Bruchzahlen, Prozentrechnen,
Rechnen mit Messwerten, Diagramme

Aufgabe 1

Jede der folgenden Rechnungen ist mit einem Buchstaben versehen.

a) Berechnen Sie die Termwerte genau und als Dezimalbruch mit zwei Nachkommastellen.
Ordnen Sie nach steigenden Werten. Welches Lösungswort ergibt sich?

b) Tragen Sie in einem Koordinatensystem auf der waagrechten Achse die Buchstaben und auf der senkrechten Achse den zugehörigen Termwert an.
Was lässt sich über den Graph des Terms aussagen?
Inwiefern kann man hier die Reihenfolge der Buchstaben des Lösungswortes erkennen?

$$A := \frac{7}{13} + \frac{7}{26} + \frac{7}{39}$$

$$D := \left(3 + \frac{1}{5}\right) \cdot \left(2 + \frac{1}{8}\right) \cdot \frac{5}{16}$$

$$E := \left(-\frac{2}{3}\right)^2 - 2 \cdot \left(1 + \frac{1}{12}\right)$$

$$N := \left(\frac{6}{7}\right)^2 + \left(\frac{5}{7}\right)^2$$

$$R := 2 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) - \frac{1}{8} \cdot \frac{2}{3}$$

$$S := \left(\frac{1}{3}\right)^2 - \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{5}$$

$$T := \frac{3 + \frac{1}{4} \cdot 5}{\frac{1}{8} + \frac{5}{8} \cdot 5 + 2}$$

$$V := 2 \cdot \frac{2}{5} - \frac{2^2 \cdot 7}{3^2}$$

Teilaufgabe a)

$$A = \frac{77}{78} = 0.99 \qquad D = \frac{17}{8} = 2.13 \qquad E = -\frac{31}{18} = -1.72$$

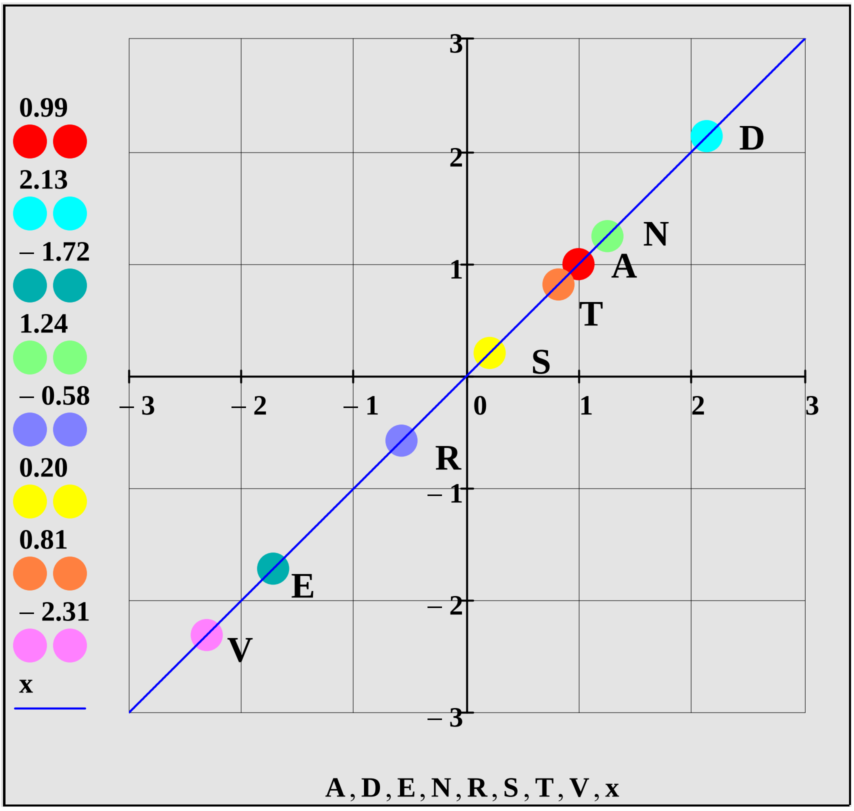
$$N = \frac{61}{49} = 1.24 \qquad R = -\frac{7}{12} = -0.58 \qquad S = \frac{1}{5} = 0.20$$

$$T = \frac{17}{21} = 0.81 \qquad V = -\frac{104}{45} = -2.31$$

Mit der richtigen Reihenfolge ergibt sich folgendes Lösungswort:

V E R S T A N D

Teilaufgabe b)



Alle Punkte liegen auf einer Geraden. Ordnet man den Punkten von unten nach oben die richtige Farbe und damit den Buchstaben zu, so ergibt sich das Lösungswort:
V E R S T A N D

Aufgabe 2

Brot besteht hauptsächlich aus Mehl. Dieses wird durch Mahlen von Getreide hergestellt. Dabei sinkt der Gehalt an Ballaststoffen.
Welches Mehl aus der unteren Tabelle hat den größten Ballaststoffgehalt?
Berechnen Sie diesen in Prozent.

Tabelle =

"Mehlsorte"	"Ballaststoffe"
"Vollkornmehl"	1/10
"Weizenmehl 405"	4/125
"Weizenmehl 1050"	9/125
"Roggenmehl 815"	13/200
"Roggenmehl 1150"	77/1000
"Kleie"	1/2

Lösung =

"Mehlsorte"	"Ballaststoffe"	"Anteile in %"
"Vollkornmehl"	0.1	10
"Weizenmehl 405"	0.032	3.2
"Weizenmehl 1050"	0.072	7.2
"Roggenmehl 815"	0.065	6.5
"Roggenmehl 1150"	0.077	7.7
"Kleie"	0.5	50

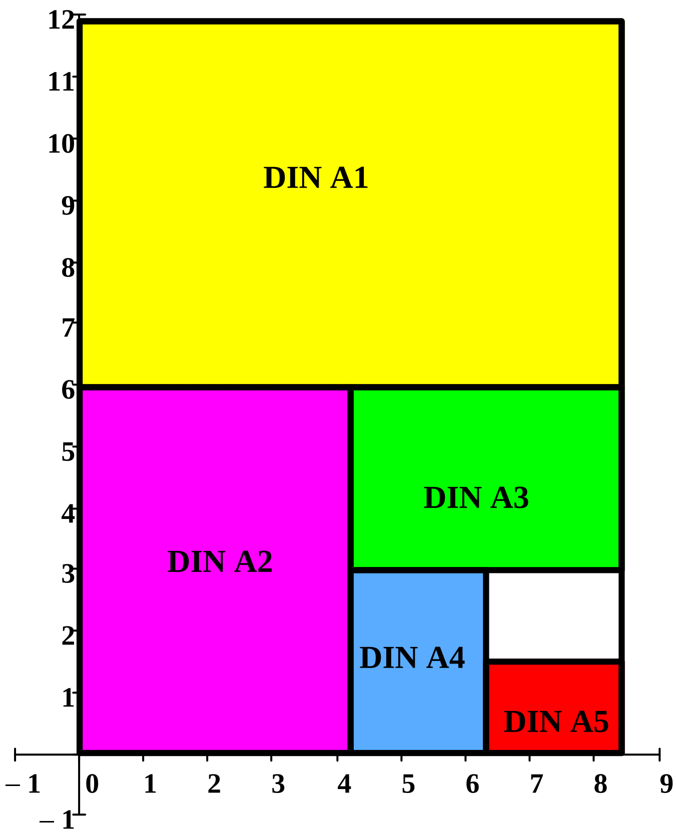
Aufgabe 3

Zeichenblocks und Schulhefte haben die Formate DIN A3, DIN A4 oder DIN A5. Diese Flächenformate ergeben sich durch dreimaliges, viermaliges bzw. fünfmaliges halbierendes Falten bezüglich der längeren Seite aus dem DIN A0-Format.

Dieses DIN A0-Format ist ein Rechteck mit dem Flächeninhalt 1 m^2.

a) Welchen Bruchteil von 1 m^2 betragen die Flächeninhalte der Formate DIN A3, DIN A4 und DIN A5.

b) Berechnen Sie die Flächeninhalte der Formate aus Teilaufgabe a) in cm^2.
c) Wie groß ist der Flächeninhalt einer Postkarte im Format DIN A6?
d) Wie groß ist der Anteil des Flächeninhalts des DIN A6-Formates am Flächeninhalt einer normalen Seite, die aus einem PC-Drucker kommen?



Teilaufgabe a)

$$\mathbf{DIN\_A3 := \frac{1}{8} \cdot 1\ m^2}$$

$$\mathbf{DIN\_A4 := \frac{1}{16} \cdot 1\ m^2}$$

$$\mathbf{DIN\_A5 := \frac{1}{32} \cdot 1\ m^2}$$

Teilaufgabe b)

$$\mathbf{DIN\_A3 = 1.25 \times 10^3 \cdot cm^2}$$

$$\mathbf{DIN\_A4 = 625 \cdot cm^2}$$

$$\mathbf{DIN\_A5 = 312.5 \cdot cm^2}$$

Teilaufgaben c) und d)

Normales Druckformat PC: DIN A4
Durch zweimaliges Teilen entsteht DIN A6 (Postkarte):

$$\mathbf{DIN\_A6 := \frac{1}{4} \cdot DIN\_A3}$$

Aufgabe 4

Anna mischt sich ihr Lieblingsmüsli selbst aus 45 % Haferflocken, 20 % Rosinen, 10 % Haselnüssen und 25 % Sonnenblumenkernen zusammen.

a) Wieviel Gramm Haferflocken braucht sie, um 150 Gramm Müsli zu mischen?

b) Ihr Bruder Berthold mag nur die Rosinen. Er stibitzt ihr die Hälfte aus dem frisch zubereiteten Müsli. Berechnen Sie nun die prozentualen Anteile der Zutaten im Müsli.

Teilaufgabe a) Definition für das Gramm: $\mathrm{Gramm} := \mathrm{gm}$

Haferflocken: $m_H := 0.45 \cdot 150 \cdot \mathrm{Gramm}$ $\quad m_H = 67.5 \cdot \mathrm{Gramm}$

Teilaufgabe b)

Rosinen: $m_R := 0.20 \cdot 150 \cdot \mathrm{Gramm}$ $\quad m_R = 30 \cdot \mathrm{Gramm}$

Haselnüsse: $m_H := 0.1 \cdot 150 \cdot \mathrm{Gramm}$ $\quad m_H = 15 \cdot \mathrm{Gramm}$

Sonnenblumenkerne: $m_S := 0.25 \cdot 150 \cdot \mathrm{Gramm}$ $\quad m_S = 37.5 \cdot \mathrm{Gramm}$

Halbe Rosinenmenge: $m_{R2} := \frac{m_R}{2}$ $\quad m_{R2} = 15 \cdot \mathrm{Gramm}$

Gesamtmenge Müsli: $m_{ges} := 150 \cdot \mathrm{Gramm} - m_{R2}$ $\quad m_{ges} = 135 \cdot \mathrm{Gramm}$

Prozentuale Anteile: $P_R := \frac{m_R}{m_{ges}}$ $\quad P_R = 22.22 \cdot \%$

Prozentuale Anteile: $P_H := \frac{m_H}{m_{ges}}$ $\quad P_H = 11.11 \cdot \%$

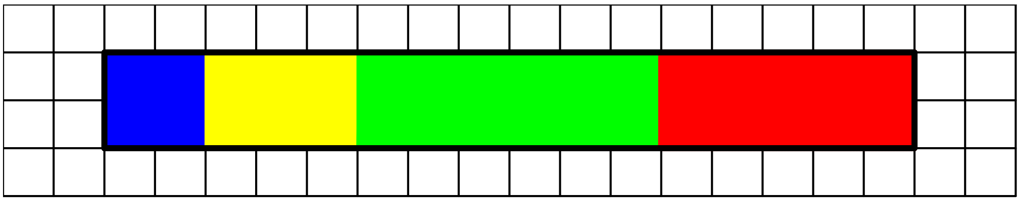
Prozentuale Anteile: $P_S := \frac{m_S}{m_{ges}}$ $\quad P_S = 27.78 \cdot \%$

Aufgabe 5

Gegeben ist ein 8 cm langer Messstreifen, bei dessen Auswertung die verschiedenen Farben den prozentualen Anteil des getesteten Objektes veranschaulichen.

a) Zum Abschätzen der Bruchteile des Flächenanteils der Farben ist ein Gitternetz über den Messstreifen gelegt. Geben Sie an, welchen Bruchteil der Fläche die jeweilige Farbe einnimmt.

b) Berechnen Sie, welche Fläche von der jeweiligen Farbe repräsentiert wird.



Teilaufgabe a)

Gesamtzahl der Kästchen: $K := 16 \cdot 2$ $\qquad K = 32$

1. Streifen: $K_{Blau} := \frac{4}{32}$ $\qquad K_{Blau} = 0.125$

2. Streifen: $K_{Gelb} := \frac{6}{32}$ $\qquad K_{Gelb} = 0.188$

3. Streifen: $K_{Grün} := \frac{12}{32}$ $\qquad K_{Grün} = 0.375$

4. Streifen: $K_{Rot} := \frac{10}{32}$ $\qquad K_{Rot} = 0.313$

Teilaufgabe b)

Gesamtfläche: $A_{ges} := 8 \cdot cm \cdot 1 \cdot cm$ $\qquad A_{ges} = 8.00 \cdot cm^2$

Flächenanteile: $A_{Blau} := A_{ges} \cdot K_{Blau}$ $\qquad A_{Blau} = 1.00 \cdot cm^2$

$A_{Gelb} := A_{ges} \cdot K_{Gelb}$ $\qquad A_{Gelb} = 1.50 \cdot cm^2$

$A_{Grün} := A_{ges} \cdot K_{Grün}$ $\qquad A_{Grün} = 3.00 \cdot cm^2$

$A_{Rot} := A_{ges} \cdot K_{Rot}$ $\qquad A_{Rot} = 2.50 \cdot cm^2$

Aufgabe 6

Pommes frites enthalten 34 % Kohlehydrate, 24 % Fett und 4 % Wasser. Der Rest sind Fasern und Salze. Stellen Sie die Anteile in einem Kreisdiagramm dar.

Berechnung der Mittelpunktswinkel der Kreissektoren:

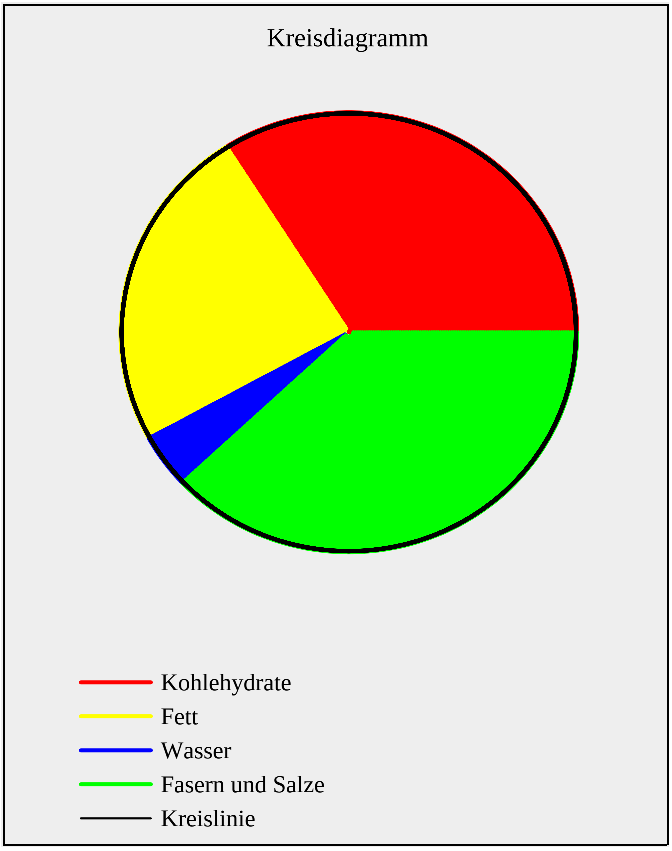
Kohlehydrate: $\alpha_K := 0.34 \cdot 360 \cdot \text{Grad}$ $\quad \alpha_K = 122.4 \cdot °$

Fett: $\alpha_F := 0.24 \cdot 360 \cdot \text{Grad}$ $\quad \alpha_F = 86.4 \cdot °$

Wasser: $\alpha_W := 0.04 \cdot 360 \cdot \text{Grad}$ $\quad \alpha_W = 14.4 \cdot °$

Prozentualer Anteil des verbleibenden Restes: $100 - (34 + 24 + 4) = 38$

Rest: $\alpha_R := 0.38 \cdot 360 \cdot \text{Grad}$ $\quad \alpha_R = 136.8 \cdot °$



Aufgabe 7

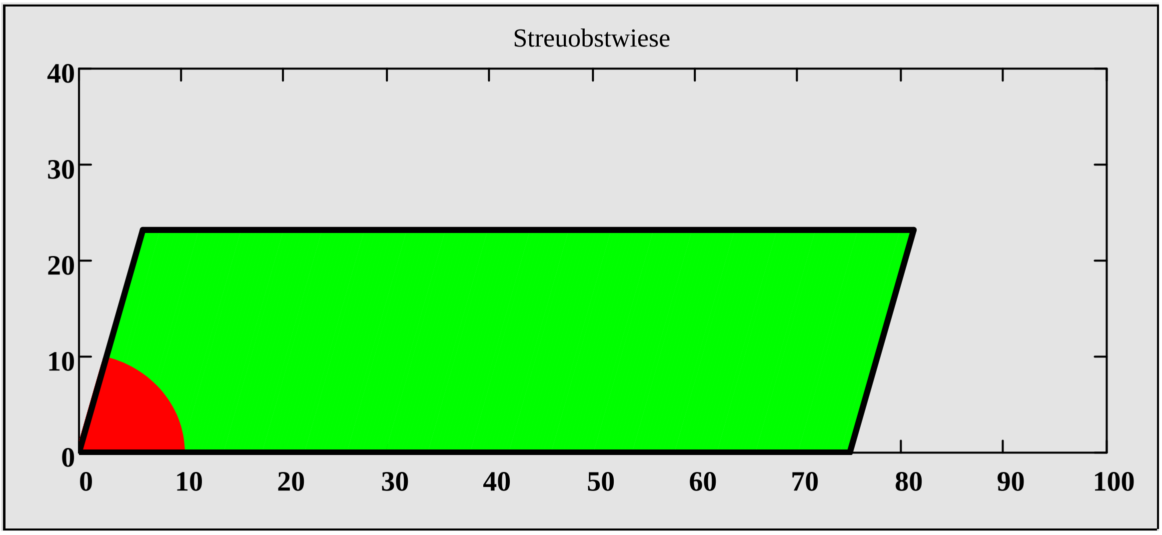
Eine Streuobstwiese hat die Form eines Parallelogramms mit den Maßen $\mathbf{a} := 75 \cdot \mathbf{m}$, $\mathbf{b} := 24 \cdot \mathbf{m}$ und $\boldsymbol{\alpha} := 112°$.

a) Zeichnen Sie die Wiese in einem geeigneten Maßstab und berechnen Sie ihren Flächeninhalt.

b) Der Bauer möchte diese Wiese gegen ein mindestens gleich großes rechteckiges Grundstück eintauschen, bei dem eine Seite 50 m lang ist. Wie lang muss die andere Seite wenigstens sein?

Gegeben: $\alpha := 75 \cdot \mathrm{Grad}$ $\quad \mathbf{a} := 75 \cdot \mathbf{m}$ $\quad \mathbf{b} := 24 \cdot \mathbf{m}$

Teilaufgabe a)



Die Fläche des Parallelogramms entspricht einer Rechtecksfläche mit den beiden Seiten:

$A_P := a \cdot b$ $\qquad A_P = 1800 \cdot m^2$

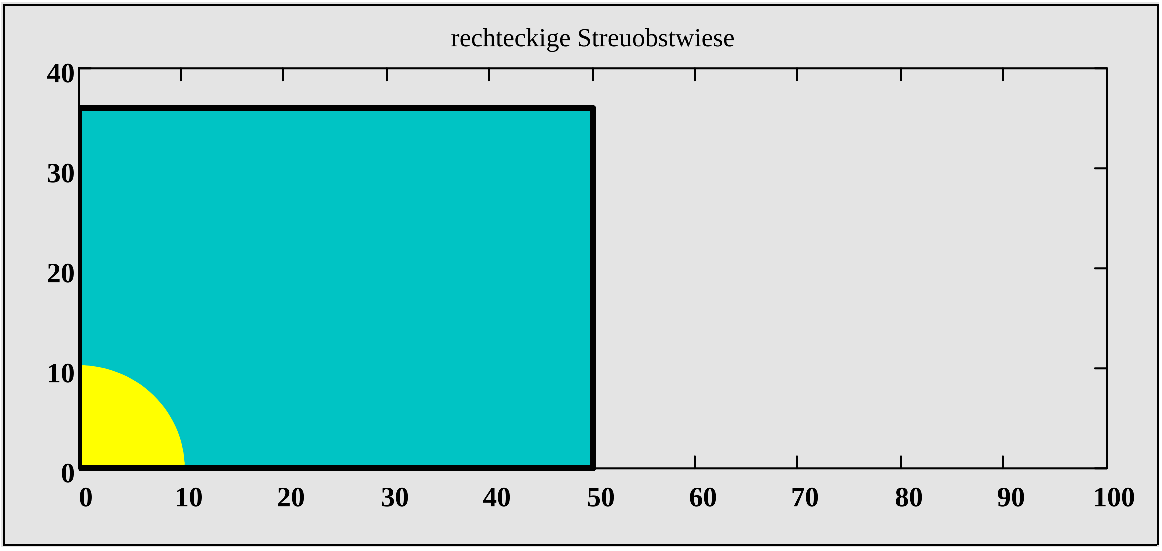
Teilaufgabe b)

Rechtecksseite: $a_R := 50 \cdot m$

Rechtecksfläche: $A_R := A_P$ $\qquad A_R = 1800\,m^2$

zweite Kante des Rechtecks: $b_R := \dfrac{A_R}{a_R}$ $\qquad b_R = 36\,m$

Winkel des Rechtecks: $\alpha_R := 90°$



Aufgabe 8

Luft besteht etwa zu 21 % aus Sauerstoff (O_2) und etwa zu 78 % aus Stickstoff (N_2), der Rest sind weitere Bestandteile wie Argon, Kohlenstoffdioxid, Wasserstoff und Wasserdampf.
Wieviel Liter (Zeichen ***L***) Sauerstoff und wieviel Liter Stickstoff befinden sich in einem Klassenzimmer, das 12,0 m lang, 8,0 m breit und 2,8 m hoch ist.

Gegeben: $\mathbf{l := 12.0 \cdot m}$ $\mathbf{b := 8.0 \cdot m}$ $\mathbf{h := 2.8 \cdot m}$

Volumen des Klassenzimmers: $\mathbf{V := l \cdot b \cdot h}$ $\mathbf{V = 268.8 \cdot m^3}$

Anteil Sauerstoff: $\mathbf{A_{O2} := 0.21 \cdot V}$ $\mathbf{A_{O2} = 56.448 \cdot m^3}$ $\mathbf{A_{O2} = 56448\,L}$

Anteil Stickstoff: $\mathbf{A_{N2} := 0.78 \cdot V}$ $\mathbf{A_{N2} = 209.664 \cdot m^3}$ $\mathbf{A_{N2} = 209664\,L}$

Aufgabe 9

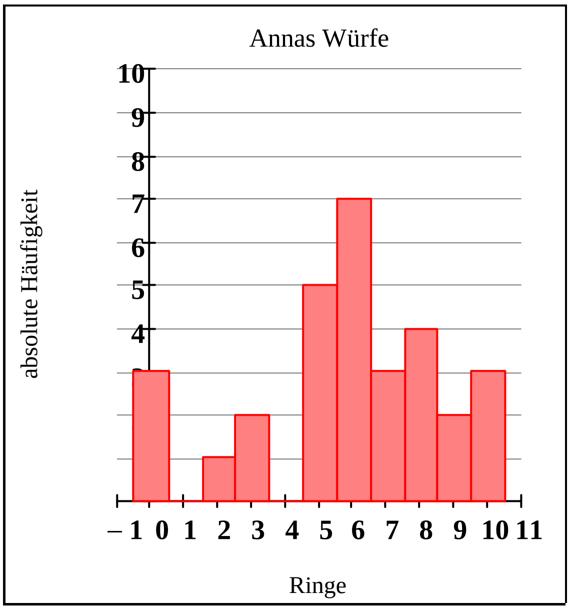
Anna und Berthold, die beiden Geschwister, werfen mit Wurfpfeilen auf eine Dartscheibe. Anna hat dreißigmal geworfen, Berthold fünfzigmal.
In der Tabelle ist aufgelistet, wie häufig beide die einzelnen Ringe geworfen haben.

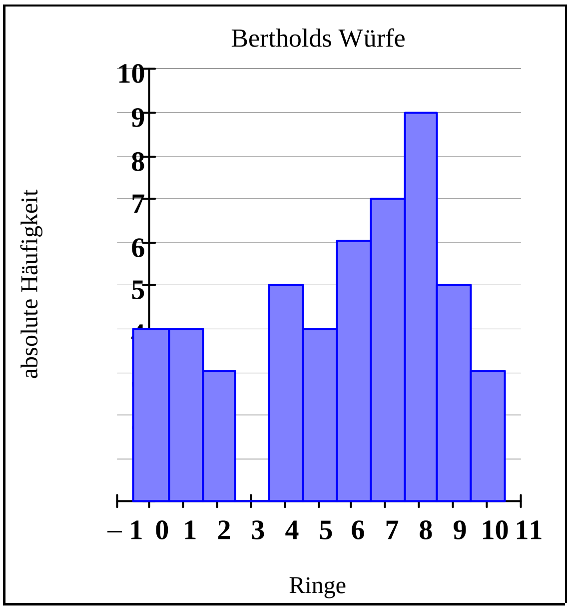
a) Stellen Sie die Würfe von Anna und Berthold in je einem Balkendiagramm dar.
b) Stellen Sie die relativen Häufigkeiten für Anna und Berthold in einer Tabelle zusammen.
c) Wer hatte häufiger einen Fehlwurf? Wer hat häufiger acht bzw. zehn Ringe?
d) Berechnen Sie für Anna und Berthold den durchschnittlichen Wert pro Wurf.

Tabelle =

"Ringe"	"Anna"	"Berthold"
0	3	4
1	0	4
2	1	3
3	2	0
4	0	5
5	5	4
6	7	6
7	3	7
8	4	9
9	2	5
10	3	3

Teilaufgabe a)





Teilaufgabe b)

rel_Häufigkeit =

"Ringe"	"Anna"	"Berthold"
0	0.1	0.08
1	0	0.08
2	0.033	0.06
3	0.067	0
4	0	0.1
5	0.167	0.08
6	0.233	0.12
7	0.1	0.14
8	0.133	0.18
9	0.067	0.1
10	0.1	0.06

Anna hatte häufiger einen Fehlwurf als Berthold.
Berthold hat häufiger acht Ringe.
Anna hat häufiger zehn Ringe.

Für die Durchschnittswerte wird die Anzahl der Treffer des jeweiligen Ringes mit der Nummer des Ringes multipliziert. Diese Werte werden aufaddiert und anschließend durch die Gesamtzahl der Würfe dividiert.
Das macht der ***Summenautomat*** in Mathcad automatisch.

Durchschnittswert für Annas Würfe:

$$\mathbf{d_A} := \sum_{i=0}^{10} \left[\left(A_i \cdot R_i \right) \cdot \frac{1}{30} \right] \qquad \mathbf{d_A} = 5.867 \qquad \text{gerundet:} \qquad \mathbf{d_A} = 5.9$$

Durchschnittswert für Bertholds Würfe:

$$\mathbf{d_B} := \sum_{i=0}^{10} \left[\left(B_i \cdot R_i \right) \cdot \frac{1}{50} \right] \qquad \mathbf{d_B} = 5.640 \qquad \text{gerundet:} \qquad \mathbf{d_B} = 5.6$$

Funktionale Abhängigkeiten
- Dreiecksfläche mit variablem Eckpunkt auf einer Geraden -

Aufgabe

Von einem Dreieck **ABC** sind zwei Eckpunkte **A(2 ; −2)** und **B(7 ; −2)** gegeben.

Der Punkt **C** liegt auf der Geraden g mit $\mathbf{y = -x + 4}$ an beliebiger Stelle x.

a) Zeichnen Sie den Graphen der Geraden **g** für $\mathbf{x \in [-2; 7]}$ in ein kartesisches Koordinatensystem sowie das Dreieck **ABC**, wenn für C gilt: **C(1; g(1))**.

b) Ermitteln Sie rechnerisch die Flächenfunktion des Dreiecks.

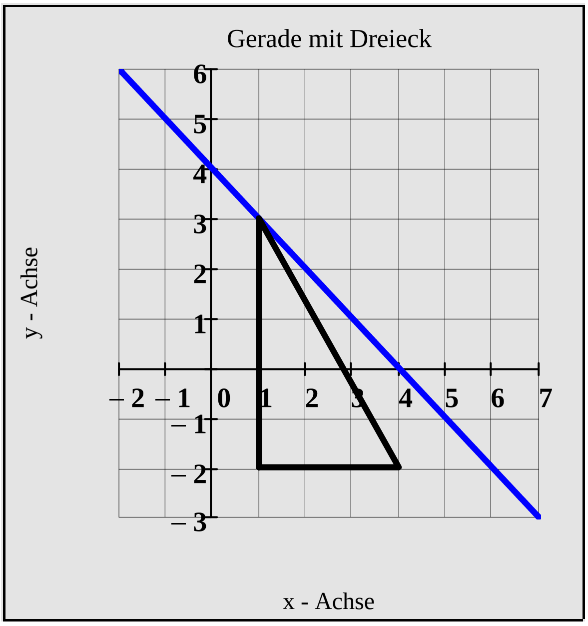
c) Stellen Sie den Graphen von A(x) in einem Koordinatensystem dar.

<u>Gegebene Größen:</u>

<u>Gerade g:</u> $\mathbf{g(x) := -x + 4}$

<u>Eckpunkte:</u> $\mathbf{A := (1 \quad -2)}$ $\mathbf{B := (4 \quad -2)}$ $\mathbf{C(x) := (x \quad g(x))}$

Teilaufgabe a)



Teilaufgabe b)

<u>Vektoren der Dreiecksseiten:</u>

$$\mathbf{AB} := \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_0 \\ b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{AC}(x) := \begin{pmatrix} x \\ g(x) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_0 \\ b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-1 \\ 6-x \end{pmatrix}$$

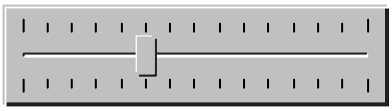
<u>Flächenfunktion:</u>

$$A_D(x) = \frac{1}{2} \cdot \left| \begin{pmatrix} AB_0 & AC(x)_0 \\ AB_1 & AC(x)_1 \end{pmatrix} \right| \rightarrow A_D(x) = 9 - \frac{3 \cdot x}{2}$$

Teilaufgabe c)

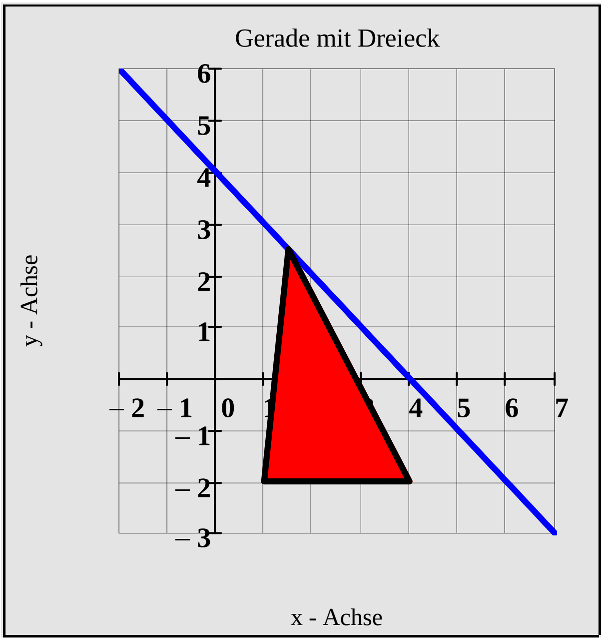
<u>Veränderung von x und somit Veränderung der Koordinaten von C:</u>

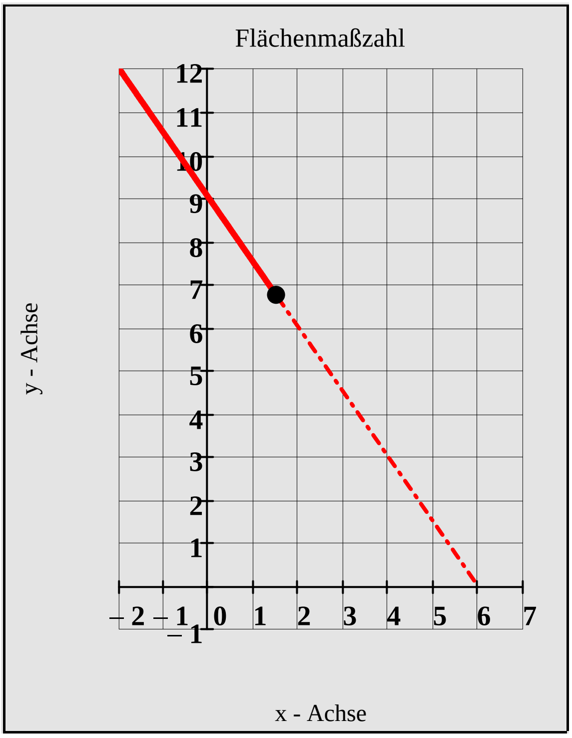
Bereich: x = -1 12



<u>Graphische Darstellung:</u>

<u>Eckpunkte:</u> $\mathbf{A} = (1 \quad -2)$ $\mathbf{B} = (4 \quad -2)$ $\mathbf{C}(x) = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{5}{2} \end{pmatrix}$





x-Koordinaten von C: $\mathbf{x} = 1.5$

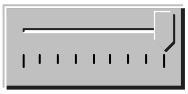
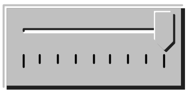
Flächenmaßzahl: $A_D(x) = \frac{27}{4}$

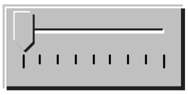
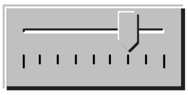
Lineare Funktionen
- Arbeitsblatt zu den linearen Funktionen -

Aufgabe 1

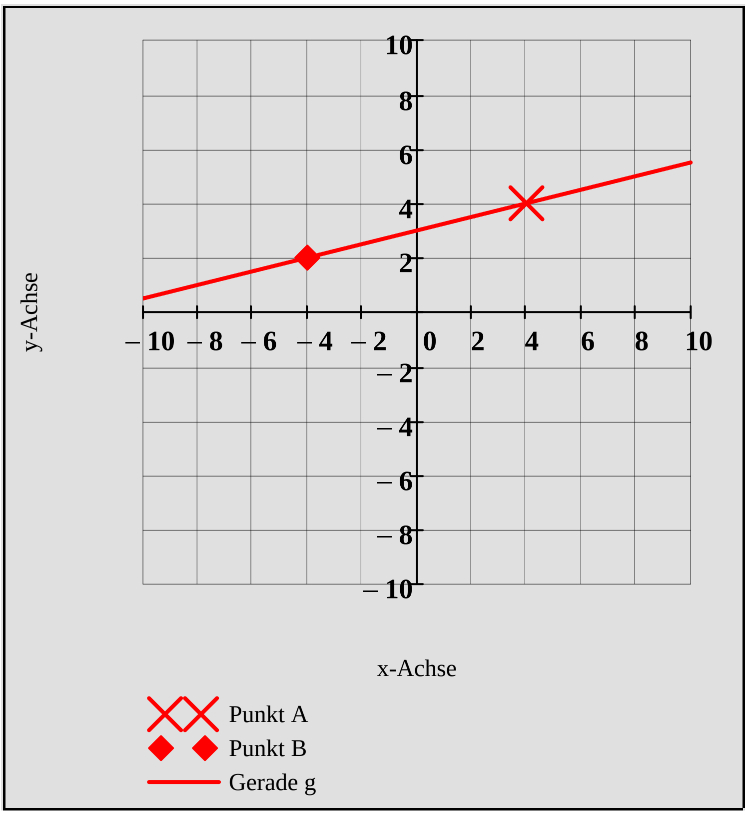
Gegeben sind die beiden Punkte $\mathbf{A(a_1 / a_2)}$ und $\mathbf{B(b_1 / b_2)}$ mit $\mathbf{a_1 \neq b_1}$.

Die Koordinatenwerte von A und B können mit Hilfe der Schieberegler eingestellt werden. Zeichnen Sie die Gerade g durch A und B und ermitteln Sie den zugehörigen Funktionsterm rechnerisch.

Punkt A: $\mathbf{a_1} :=$  $\mathbf{a_2} :=$  $\mathbf{A} := (\mathbf{a_1} \quad \mathbf{a_2})$

Punkt B: $\mathbf{b_1} :=$  $\mathbf{b_2} :=$  $\mathbf{B} := (\mathbf{b_1} \quad \mathbf{b_2})$

☑ Punkt A anzeigen ☑ Punkt B anzeigen ☑ Gerade g anzeigen



Punkt A:

$\mathbf{A} \rightarrow (\mathbf{4} \quad \mathbf{4})$

Punkt B:

$\mathbf{B} \rightarrow (\mathbf{-4} \quad \mathbf{2})$

Gerade g:

$$\mathbf{g(x)} = \frac{\mathbf{x}}{\mathbf{4}} + \mathbf{3}$$

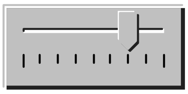
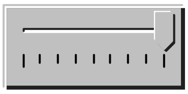
▶ Algebraische Lösung: Gerade durch zwei Punkte A und B

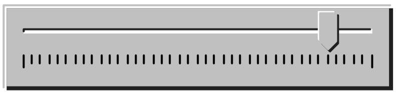
Aufgabe 2

Gegeben sind der Punkt **$A(a_1 / a_2)$** und die Steigung m.

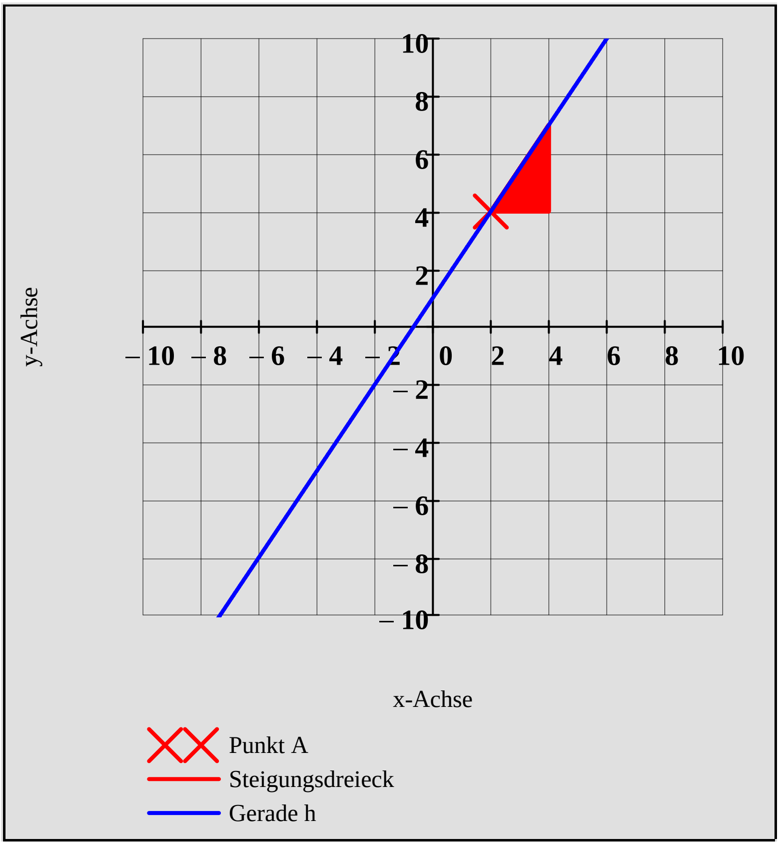
Die Koordinatenwerte a_1 und a_2 sowie der Steigungsfaktor m können mit Hilfe der Schieberegler eingestellt werden.

Zeichnen Sie die Gerade h durch A mit der Steigung m und ermitteln Sie den zugehörigen Funktionsterm rechnerisch.

Punkt A: $\mathbf{a_1} :=$  $\mathbf{a_2} :=$  $\mathbf{A} := (\mathbf{a_1} \quad \mathbf{a_2})$

Steigung: $\mathbf{m0} :=$  Verfeinerung: $\mathbf{m} := \dfrac{\mathbf{m0}}{\mathbf{10}}$

☑ Punkt A anzeigen ☑ Gerade h anzeigen



Punkt A:

$\mathbf{A} \rightarrow (\mathbf{2} \quad \mathbf{4})$

$\mathbf{Steigung} = \mathbf{1.5}$

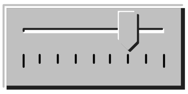
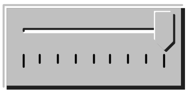
Gerade h:

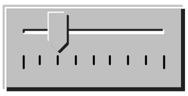
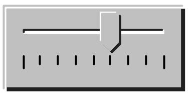
$\mathbf{h(x)} = \dfrac{\mathbf{3 \cdot x}}{\mathbf{2}} + \mathbf{1}$

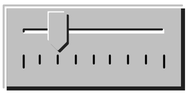
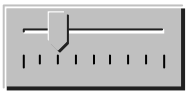
▶ Algebraische Lösung: Gerade mit Steigung m durch Punkt A

Aufgabe 3

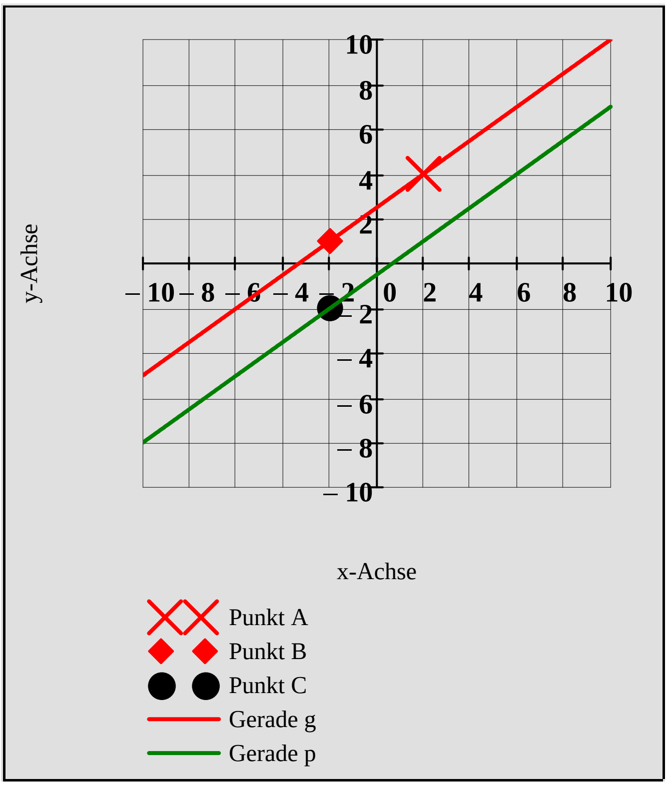
Gegeben ist die Gerade **g** durch $\mathbf{A(a_1 / a_2)}$ und $\mathbf{B(b_1 / b_2)}$ mit $\mathbf{a_1 \neq b_1}$ sowie der Punkt $\mathbf{C(c_1 / c_2)}$ mit $\mathbf{C \notin g}$. Die Koordinatenwerte von A, B und C können mit Hilfe der Schieberegler eingestellt werden.
Zeichnen Sie die echt parallele Gerade p zu g durch $\mathbf{C(c_1 / c_2)}$ und ermitteln Sie den zugehörigen Funktionsterm rechnerisch.

Punkt A: $\mathbf{a_1} :=$  $\mathbf{a_2} :=$  $\mathbf{A} := \begin{pmatrix} \mathbf{a_1} & \mathbf{a_2} \end{pmatrix}$

Punkt B: $\mathbf{b_1} :=$  $\mathbf{b_2} :=$  $\mathbf{B} := \begin{pmatrix} \mathbf{b_1} & \mathbf{b_2} \end{pmatrix}$

Punkt C: $\mathbf{c_1} :=$  $\mathbf{c_2} :=$  $\mathbf{C} := \begin{pmatrix} \mathbf{c_1} & \mathbf{c_2} \end{pmatrix}$

☑ Punkt A anzeigen ☑ Punkt B anzeigen ☑ Gerade g anzeigen
☑ Punkt C anzeigen ☑ Gerade p anzeigen



Punkt A:

$\mathbf{A} \rightarrow (2 \quad 4)$

Punkt B:

$\mathbf{B} \rightarrow (-2 \quad 1)$

Gerade g:

$$\mathbf{g(x)} = \frac{3 \cdot x}{4} + \frac{5}{2}$$

Punkt C:

$\mathbf{C} \rightarrow (-2 \quad -2)$

Gerade p:

$$\mathbf{p(x)} = \frac{3 \cdot x}{4} - \frac{1}{2}$$

Steigungen:

$$\mathbf{m_g} = \frac{3}{4} \qquad \mathbf{m_p} = \frac{3}{4}$$

▶ Algebraische Lösung: Parallele p zu g durch C

Aufgabe 4

Gegeben ist die Gerade g durch $\mathbf{A}(\mathbf{a_1} / \mathbf{a_2})$ und $\mathbf{B}(\mathbf{b_1} / \mathbf{b_2})$ mit $\mathbf{a_1} \neq \mathbf{b_1}$ sowie der Punkt $\mathbf{C}(\mathbf{c_1} / \mathbf{c_2})$ mit $\mathbf{C} \notin \mathbf{g}$. Die Koordinatenwerte von A, B und C können mit Hilfe der Schieberegler eingestellt werden.
Zeichnen Sie die Gerade n senkrecht zu g durch C und ermitteln Sie den zugehörigen Funktionsterm rechnerisch.

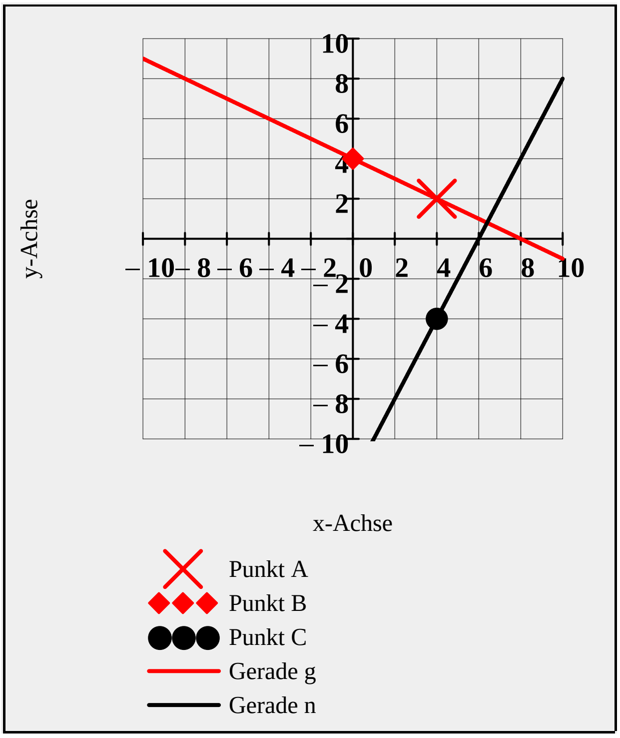
Punkt A: $a_1 :=$ $a_2 :=$ $A := \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \end{pmatrix}$

Punkt B: $b_1 :=$ $b_2 :=$ $B := \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \end{pmatrix}$

Punkt C: $c_1 :=$ $c_2 :=$ $C := \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \end{pmatrix}$

☑ Punkt A anzeigen ☑ Punkt B anzeigen ☑ Gerade g anzeigen

☑ Punkt C anzeigen ☑ Gerade n anzeigen



Punkt A:

$A \rightarrow (4 \quad 2)$

Punkt B:

$B \rightarrow (0 \quad 4)$

Gerade g:

$g(x) = 4 - \frac{x}{2}$

Punkt C:

$C \rightarrow (4 \quad -4)$

Gerade n:

$n(x) = 2 \cdot x - 12$

Steigungen:

$m_g = -\frac{1}{2}$ $m_n = 2$

▶ Algebraische Lösung: Senkrechte zu g durch C

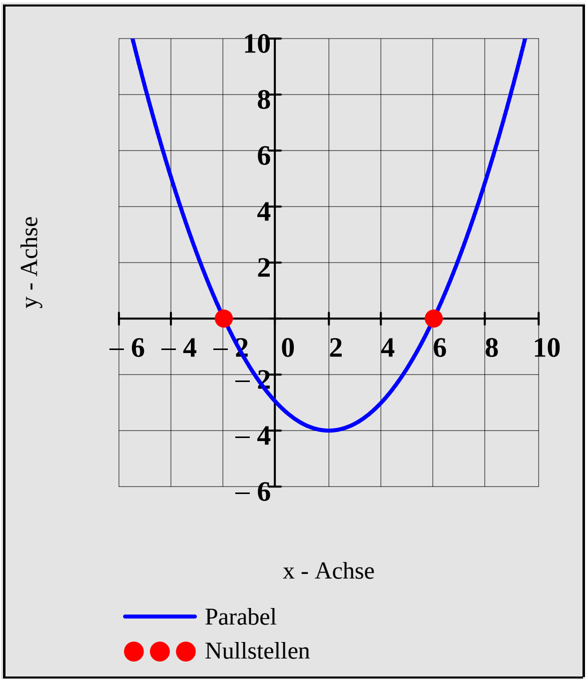
Quadratische Funktionen
- Lage und Anzahl von Nullstellen -

Beispiele

Gegeben ist der Funktionsterm $\mathbf{f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c}$.
Stellen Sie Anzahl, Lage und Art der Nullstellen von f(x) fest.

Auswahl verschiedener typischer Beispiele:

Ausgabe der Parameter: $\mathbf{a = \frac{1}{4}}$ $\mathbf{b = -1}$ $\mathbf{c = -3}$



Funktionsterm:

$$\mathbf{f(x) = \frac{x^2}{4} - x - 3}$$

Öffnung der Parabel:

Öffnung = "nach oben geöffnet"

$$\mathbf{NSt = \begin{pmatrix} \text{"x-Werte"} & \text{"y-Werte"} \\ -2 & 0 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}}$$

Theoretische Überlegungen zur Existenz von Nullstellen

1. Bedingung

Allgemeiner Funktionsterm: $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$

Bedingung für die Nullstellen: $f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$

2. Lösungsformel

Allgemeine Gleichung: $a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$

Ausklammern: $a \cdot \left(x^2 + \frac{b}{a} \cdot x + \frac{c}{a}\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a \cdot \left(x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2 \cdot a} \cdot x + \frac{c}{a}\right) = 0$

Quadratische Ergänzung: $a \left[x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2 \cdot a} \cdot x + \left(\frac{b}{2 \cdot a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2 \cdot a}\right)^2 + \frac{c}{a}\right] = 0$

Umformung: $a \left[x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2 \cdot a} \cdot x + \left(\frac{b}{2 \cdot a}\right)^2\right] + a \cdot \left[-\left(\frac{b}{2 \cdot a}\right)^2 + \frac{c}{a}\right] = 0$

Binomische Formel: $a \cdot \left(x + \frac{b}{2 \cdot a}\right)^2 - a \cdot \left(\frac{b}{2 \cdot a}\right)^2 + c = 0$

Umformung: $\left(x + \frac{b}{2 \cdot a}\right)^2 = \frac{b^2}{4 \cdot a^2} - \frac{c}{a}$

Wurzel ziehen: $\left(x_1 + \frac{b}{2 \cdot a}\right) = \sqrt{\frac{b^2}{4 \cdot a^2} - \frac{c}{a}}$

oder $\left(x_2 + \frac{b}{2 \cdot a}\right) = -\sqrt{\frac{b^2}{4 \cdot a^2} - \frac{c}{a}}$

Wurzelterme vereinfachen: $\left(x_1 + \frac{b}{2 \cdot a}\right) = \sqrt{\frac{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}{4 \cdot a^2}}$

oder $\left(x_2 + \frac{b}{2 \cdot a}\right) = -\sqrt{\frac{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}{4 \cdot a^2}}$

Nach x auflösen und teilweises radizieren:

$$\mathbf{x_1 = \frac{-b}{2\cdot a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a}} \qquad \text{oder} \qquad \mathbf{x_2 = \frac{-b}{2\cdot a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a}}$$

Bruchterme zusammenfassen:

$$\mathbf{x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a}} \qquad \text{oder} \qquad \mathbf{x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a}}$$

3. Anzahl der Nullstellen

Da der Term unter der Wurzel, die sogenannte ***Diskriminante*,** positiv, gleich Null oder negativ sein kann, ergeben sich zwei, eine oder keine Nullstellen.

Diskriminante: $\mathbf{D = b^2 - 4\cdot a\cdot c}$

$\mathbf{D > 0}$ Parabel hat zwei einfache Nullstellen, Graph schneidet zweimal die x-Achse.

$\mathbf{D = 0}$ Parabel hat eine zweifache Nullstelle, Graph berührt die x-Achse

$\mathbf{D < 0}$ Parabel hat keine Nullstelle, der Graph liegt für $a > 0$ oberhalb der x-Achse, der Graph liegt für $a < 0$ unterhalb der x-Achse.

Parabeln mit Parameter

Aufgabe 1

Gegeben ist der Funktionsterm einer Parabelschar $\mathbf{f(x) = \frac{1}{6} \cdot \left(2 \cdot x^2 + 4 \cdot x - 10 \cdot a\right)}$.

a) Bestimmen Sie mit Hilfe der Diskriminante Anzahl, Lage und Art der Nullstellen der jeweiligen Scharkurve.
b) Überprüfen Sie Ihre Berechnungen mit dem Schieberegler.

Teilaufgabe a)

Nullstellenbedingung: $\mathbf{f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2 \cdot x^2 + 4 \cdot x - 10 \cdot a = 0}$

Auflösen: $\mathbf{x_N(a) := 2 \cdot x^2 + 4 \cdot x - 10 \cdot a = 0 \text{ auflösen}, x \rightarrow \begin{pmatrix} \sqrt{5 \cdot a + 1} - 1 \\ -\sqrt{5 \cdot a + 1} - 1 \end{pmatrix}}$

Zuordnen der Nullstellen: $\mathbf{x_{N1}(a) := x_N(a)_1 \qquad x_{N2}(a) := x_N(a)_0}$

Konkrete Terme: $\mathbf{x_{N1}(a) = -\sqrt{5 \cdot a + 1} - 1 \qquad x_{N2}(a) = \sqrt{5 \cdot a + 1} - 1}$

Diskriminante: $\mathbf{D(a) := 5 \cdot a + 1}$

Fallunterscheidung:

1. Fall: $\mathbf{D(a) = 0 \rightarrow 5 \cdot a + 1 = 0 \text{ auflösen}, a \rightarrow -\frac{1}{5}}$

Für $\mathbf{a = -\frac{1}{5}}$ besitzt die Parabel **eine zweifache Nullstelle**: $\mathbf{N_{12}(\ -1 / 0\ )}$

2. Fall: $\mathbf{D(a) > 0 \rightarrow 5 \cdot a + 1 > 0 \text{ auflösen}, a \rightarrow -\frac{1}{5} < a}$

Für $\mathbf{-\frac{1}{5} < a}$ besitzt die Parabel **zwei einfache Nullstellen**:

$\mathbf{N_1(\ -\sqrt{5 \cdot a + 1} - 1 / 0\ )}$ und $\mathbf{N_2(\ \sqrt{5 \cdot a + 1} - 1 / 0\ )}$

3. Fall: $\mathbf{D(a) < 0 \rightarrow 5 \cdot a + 1 < 0 \text{ auflösen}, a \rightarrow a < -\frac{1}{5}}$

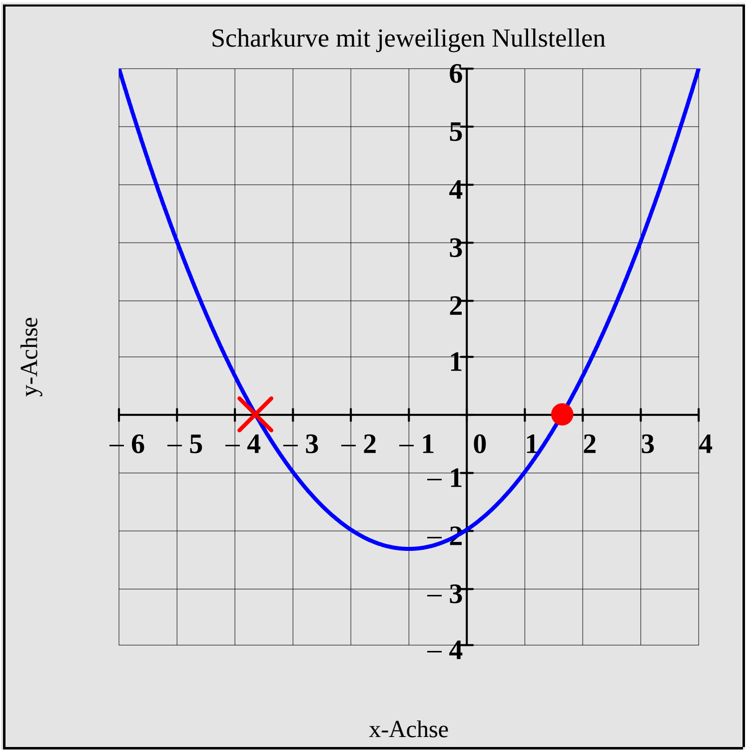
Für $\mathbf{a < -\frac{1}{5}}$ besitzt die Parabel **keine Nullstelle**:

Teilaufgabe b)

3-03-02_par_a.avi

Parabelschar: $\mathbf{f(x,a) := \frac{1}{6}\cdot\left(2\cdot x^2 + 4\cdot x - 10\cdot a\right)}$

Wähle den konkreten Parameterwert:



Parameterwert : $\mathbf{a = 1.2}$

Konkreter Funktionsterm:

$$\mathbf{f(x,a) = \frac{x^2}{3} + \frac{2\cdot x}{3} - 2}$$

Nullstellen:

Anzahl = "zwei einfache"

x -Werte:

$$\mathbf{x_N(a) = \begin{pmatrix} 1.65 \\ -3.65 \end{pmatrix}}$$

Aufgabe 2

Gegeben ist der Funktionsterm einer Parabelschar $f(x) = -\frac{1}{5}\cdot\left(x^2 + 2\cdot x - a\right)$.

a) Bestimmen Sie mit Hilfe der Diskriminante Anzahl, Lage und Art der Nullstellen der jeweiligen Scharkurve.
b) Überprüfen Sie Ihre Berechnungen mit dem Schieberegler.

Teilaufgabe a)

Nullstellenbedingung: $f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + 2\cdot x - a = 0$

Auflösen: $x_N(a) := x^2 + 2\cdot x - a = 0 \text{ auflösen}, x \rightarrow \begin{pmatrix} \sqrt{a+1} - 1 \\ -\sqrt{a+1} - 1 \end{pmatrix}$

Zuordnen der Nullstellen: $x_{N1}(a) := x_N(a)_1 \qquad x_{N2}(a) := x_N(a)_0$

Konkrete Terme: $x_{N1}(a) = -\sqrt{a+1} - 1 \qquad x_{N2}(a) = \sqrt{a+1} - 1$

Diskriminante: $D(a) := a + 1$

Fallunterscheidung:

1. Fall: $D(a) = 0 \rightarrow a + 1 = 0 \text{ auflösen}, a \rightarrow -1$

Für $a = -1$ besitzt die Parabel **eine zweifache Nullstelle**: $N_{12}(\ -1\ /\ 0\ )$

2. Fall: $D(a) > 0 \rightarrow a + 1 > 0 \text{ auflösen}, a \rightarrow -1 < a$

Für $-1 < a$ besitzt die Parabel **zwei einfache Nullstellen**:

$N_1(\ -\sqrt{a+1} - 1\ /\ 0\ )$ und $N_2(\ \sqrt{a+1} - 1\ /\ 0\ )$

3. Fall: $D(a) < 0 \rightarrow a + 1 < 0 \text{ auflösen}, a \rightarrow a < -1$

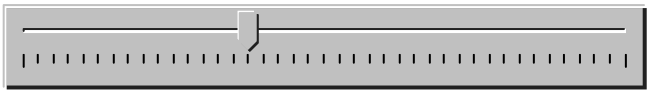
Für $-1 < a$ besitzt die Parabel **keine Nullstelle**:

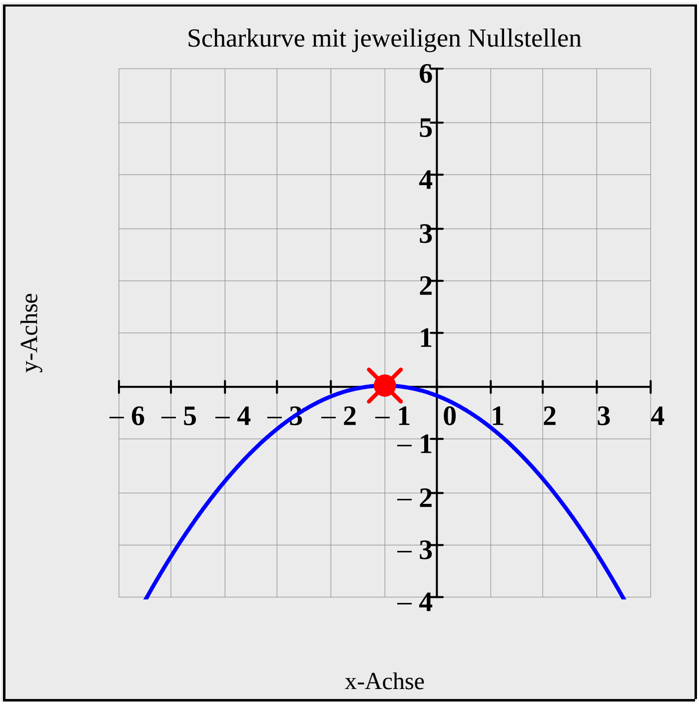
Teilaufgabe b)

3-03-02_par_b.avi

Parabelschar: $\mathbf{f(x,a) := -\frac{1}{5}\cdot\left(x^2 + 2\cdot x - a\right)}$

Wähle den konkreten Parameterwert:





<u>Parameterwert :</u> $\mathbf{a = -1}$

<u>Konkreter Funktionsterm:</u>

$$\mathbf{f(x,a) = -\frac{x^2}{5} - \frac{2\cdot x}{5} - \frac{1}{5}}$$

<u>Nullstellen:</u>

Anzahl = "eine zweifache"

x -Werte:

$$\mathbf{x_N(a) = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}}$$

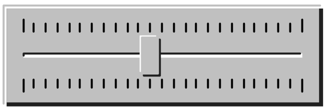
Quadratische Funktionen
- Bestimmung des Funktionsterms -

Aufgabe

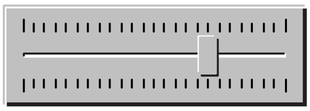
Gesucht werden die Koeffizienten einer quadratischen Funktion $\mathbf{f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c}$, deren Graph durch die drei Punkte **A(1 / 2)** , **B(3 / 5)** und **C(5 / 0)** verläuft.

1. Graphische Lösung:

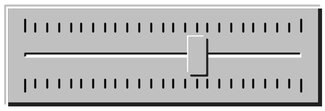
a = 6 6



b = 6 6

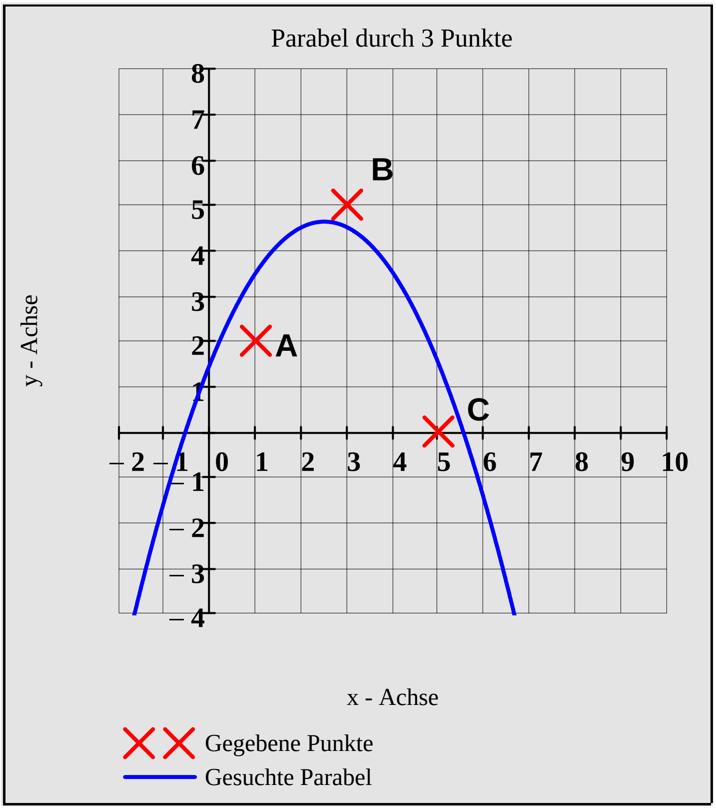


c = 6 6



Funktionsterm: $\mathbf{f(x) := a \cdot x^2 + b \cdot x + c}$

$\mathbf{a = -0.5}$ $\mathbf{b = \frac{5}{2}}$ $\mathbf{c = \frac{3}{2}}$



Funktionsterm:

$$\mathbf{f(x) = \frac{5 \cdot x}{2} - \frac{x^2}{2} + \frac{3}{2}}$$

Man sieht, dass es fast unmöglich ist, nur durch das Bedienen der Schieberegler die richtige Parabel zu finden. Es ist sinnvoll, die Koeffizienten rechnerisch zu bestimmen.

Lösung:
a = -1; b = 5,5; c = -2,5

2. Rechnerische Lösung mit Mathcad-Schlüsselwort *auflösen*:

Gleichungssystem:

$$abc := \begin{bmatrix} a\cdot\left(x_{P_0}\right)^2 + b\cdot x_{P_0} + c = y_{P_0} \\ a\cdot\left(x_{P_1}\right)^2 + b\cdot x_{P_1} + c = y_{P_1} \\ a\cdot\left(x_{P_2}\right)^2 + b\cdot x_{P_2} + c = y_{P_2} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a + b + c = 2 \\ 9\cdot a + 3\cdot b + c = 5 \\ 25\cdot a + 5\cdot b + c = 0 \end{pmatrix}$$

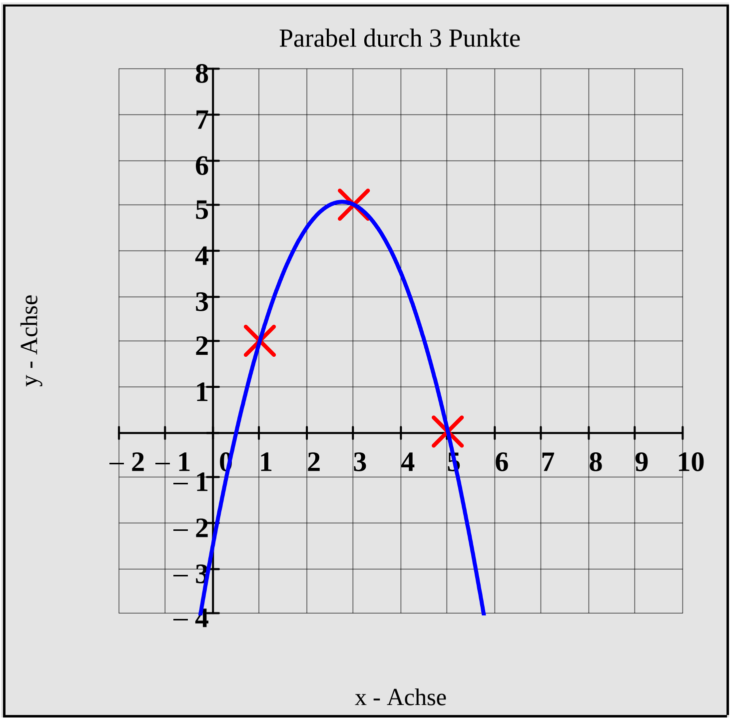
$$abc := abc \text{ auflösen}, a, b, c \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & \frac{11}{2} & -\frac{5}{2} \end{pmatrix}$$

Koeffizienten: $a = -1$ $b = \frac{11}{2}$ $c = -\frac{5}{2}$

Allgemeiner Funktionsterm: $f(x, a, b, c) := a\cdot x^2 + b\cdot x + c$

$$f(x, a, b, c) = \frac{11\cdot x}{2} - x^2 - \frac{5}{2}$$

Graphische Darstellung:



3. Rechnerische Lösung mit dem Gauß-Algorithmus:

Gesuchter Funktionsterm: $f(x,a,b,c) := a\cdot x^2 + b\cdot x + c$

Koordinaten der Punkte: $x_P := \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ $\quad y_P := \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$

Gleichungssystem als Matrix:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 9 & 3 & 1 & 5 \\ 25 & 5 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

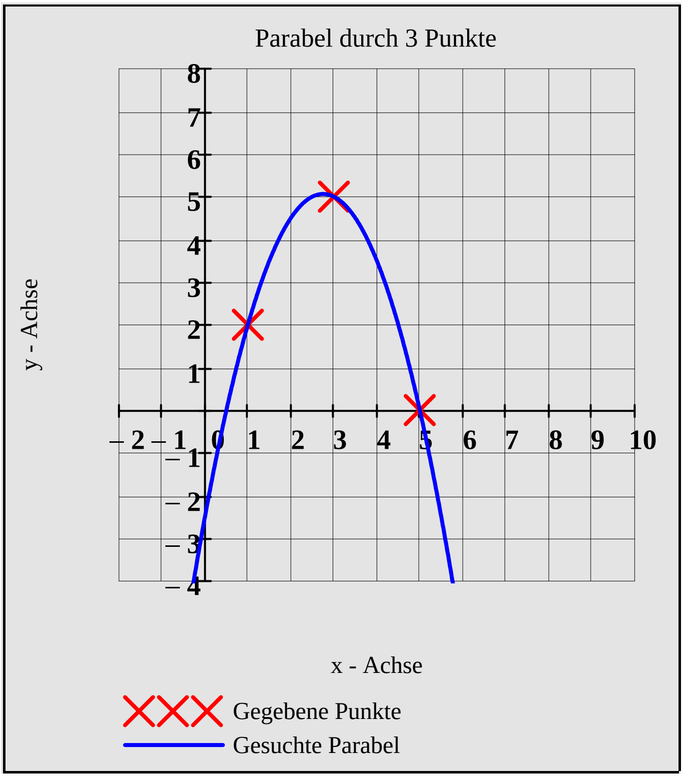
Dreiecksform nach Gauß-Algorithmus:

$$M_{Gauß} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{11}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{2} \end{pmatrix}$$

Koeffizienten: $a = -1$ $\quad b = \frac{11}{2}$ $\quad c = -\frac{5}{2}$

Funktionsterm: $f(x,a,b,c) = \frac{11\cdot x}{2} - x^2 - \frac{5}{2}$

Graphische Darstellung:



Quadratische Funktionen
- Arbeitsblatt zu Parabel mit Parameter -

Aufgabe 1

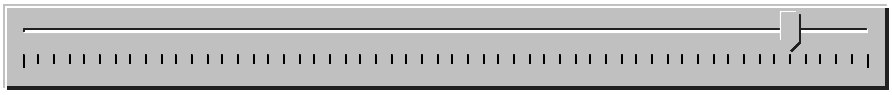
Gegeben ist die Parabelschar f(x,a) in Abhängigkeit vom Parameter $\mathbf{a} \in \mathbf{R}$:

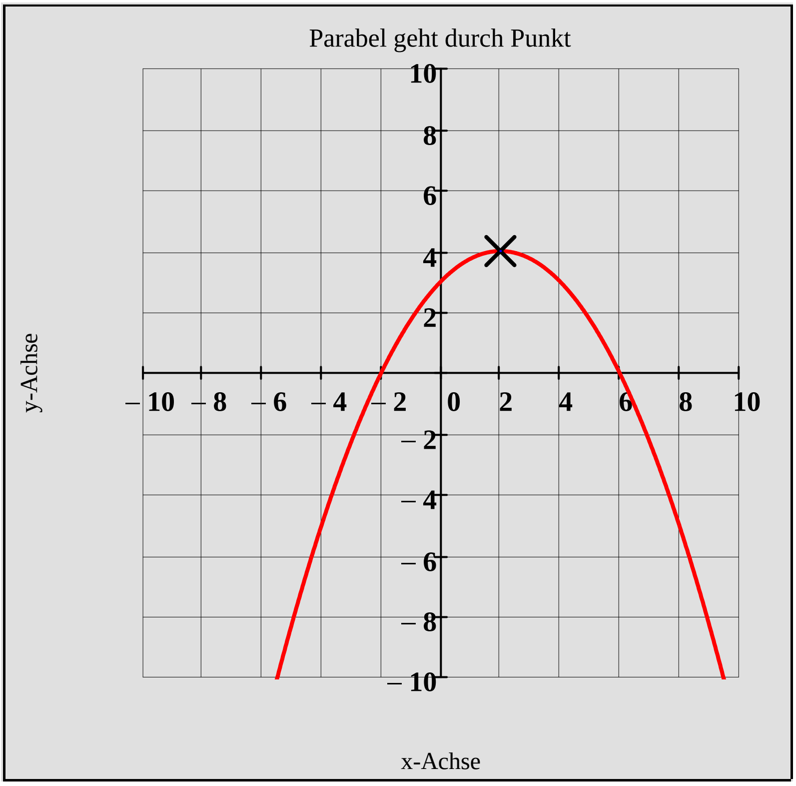
$$f(x,a) = -\frac{1}{4}\cdot x^2 + x + a$$

Bestimmen Sie graphisch durch Verschieben der Parabel den Parameter a, für den die Scharkurve durch den Punkt P(2/4) verläuft.
Überprüfen Sie den Wert durch Rechnung.

☑ Punkt P anzeigen

Wähle den Parameter
$-2 \le a \le 3$:





Gegeben ist der Punkt P:

$P \rightarrow (2 \quad 4)$

<u>Scharkurve:</u>

$$f_a(x) = x - \frac{x^2}{4} + 3$$

Konkreter Parameterwert:

$a = 3$

▶ Lösung: Parabel durch Punkt

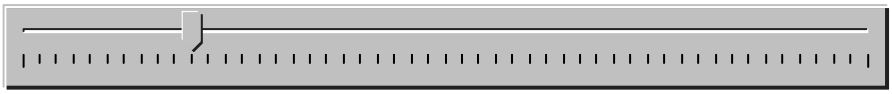
Aufgabe 2

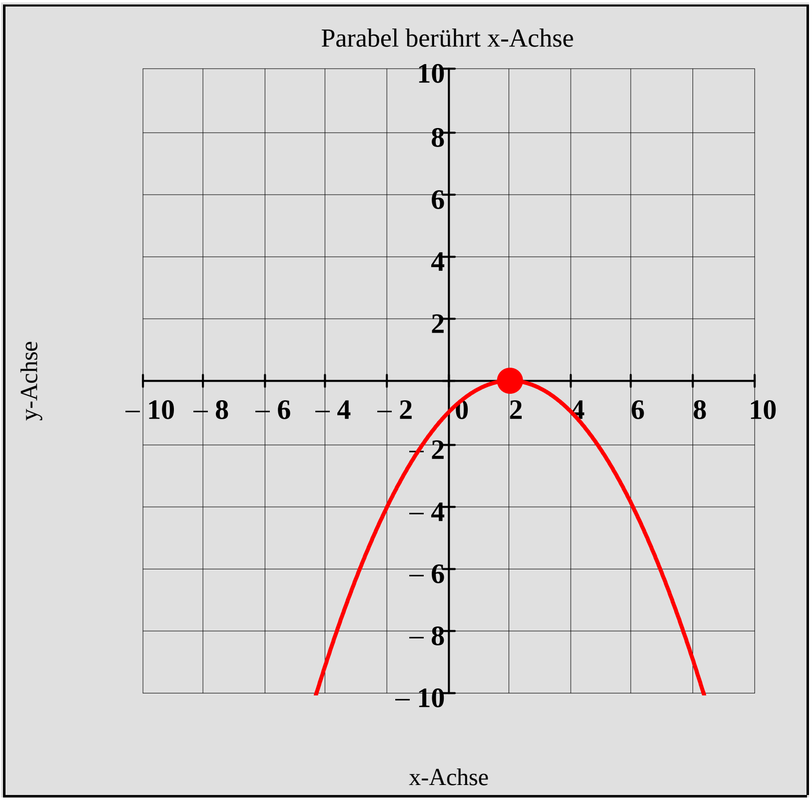
Gegeben ist die Parabelschar f(x,a) in Abhängigkeit vom Parameter a $\in$ R:

$$f(x,a) = -\frac{1}{4}\cdot x^2 + x + a$$

Bestimmen Sie graphisch durch Verschieben der Parabel den Parameter a, für den der Scheitel der Scharkurve auf der x-Achse liegt.
Überprüfen Sie den Wert durch Rechnung.

Wähle den Parameter
$-2 \le a \le 3$:





Scharkurve:

$$f_a(x) = x - \frac{x^2}{4} - 1$$

Konkreter Parameterwert:

$a = -1$

Scheitel $\rightarrow (2 \quad 0)$

Lösung: Scheitel auf x-Achse

Aufgabe 3

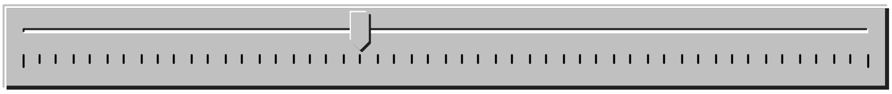
Gegeben ist die Parabelschar f(x,a) in Abhängigkeit vom Parameter a ∈ R:

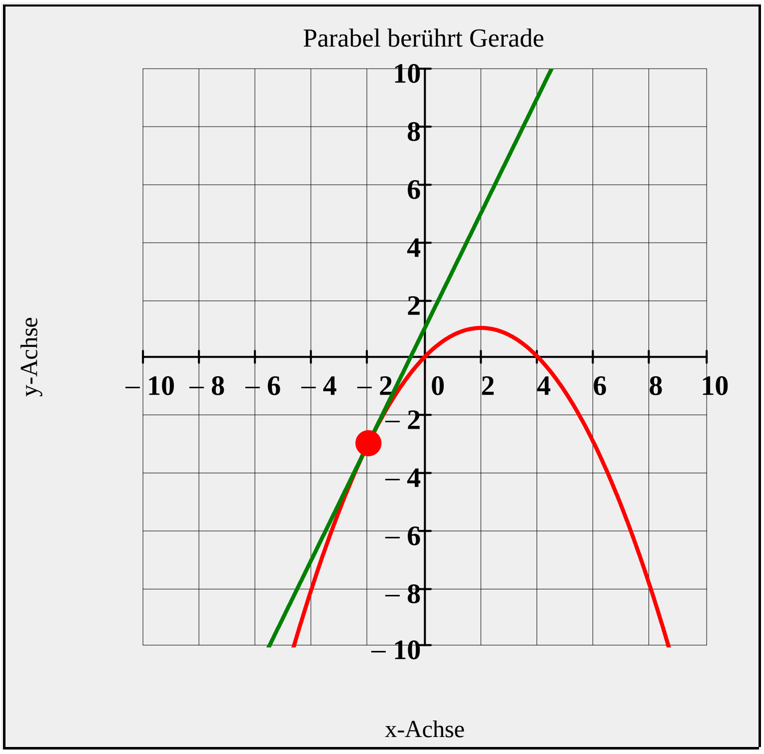
$$f(x,a) = -\frac{1}{4}\cdot x^2 + x + a$$

Bestimmen Sie graphisch durch Verschieben der Parabel den Parameter a, für den die Scharkurve die Gerade $g(x) = 2\cdot x + 1$ berührt.
Überprüfen Sie den Wert durch Rechnung.

☑ Graph von g anzeigen

Wähle den Parameter $-2 \le a \le 3$:





Gegeben ist die Gerade g:

$$g(x) = 2\cdot x + 1$$

Scharkurve:

$$f_a(x) = x - \frac{x^2}{4}$$

Konkreter Parameterwert:

$$a = 0$$

Berührpunkt:

$$BP \rightarrow (-2 \quad -3)$$

▶ Lösung: Parabel berührt Gerade

Aufgabe 4

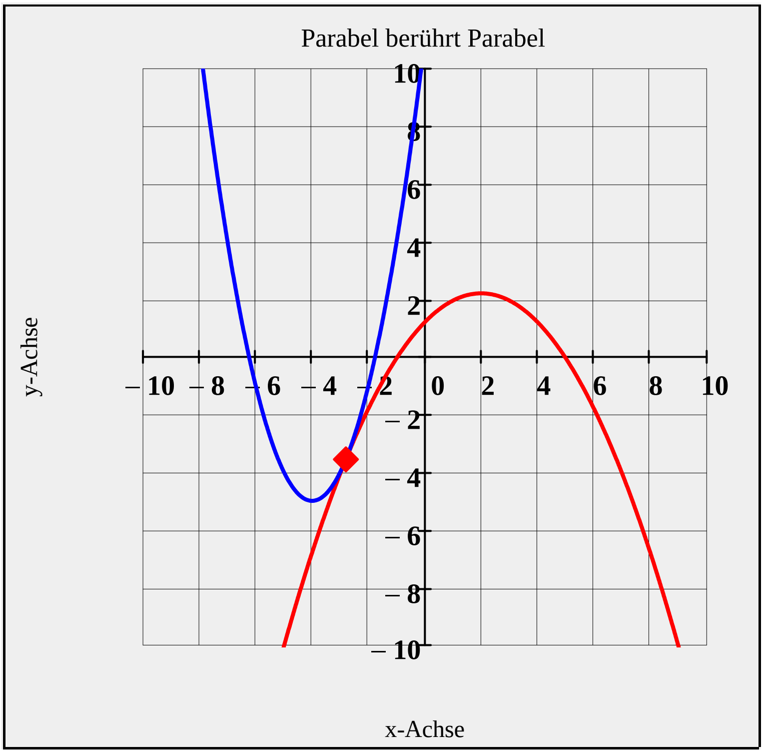
Gegeben ist die Parabelschar f(x,a) in Abhängigkeit vom Parameter a ∈ R:

$$\mathbf{f(x,a) = -\frac{1}{4} \cdot x^2 + x + a}$$

Bestimmen Sie graphisch durch Verschieben der Parabel den Parameter a, für den die Scharkurve die Parabel $\mathbf{p(x) = (x+4)^2 - 5}$ berührt.
Überprüfen Sie durch Rechnung.

☑ Graph von p anzeigen

Wähle den Parameter $\mathbf{-2 \le a \le 3}$:



Gegeben ist die Parabel p:

$$\mathbf{p(x) = (x+4)^2 - 5}$$

Scharkurve:

$$\mathbf{f_a(x) = x - \frac{x^2}{4} + \frac{6}{5}}$$

Konkreter Parameterwert:

$\mathbf{a = 1.2}$

Berührpunkt:

$\mathbf{BP = (-2.8 \quad -4.6)}$

▶ Lösung: Parabel berührt Parabel

Modellaufgaben
- Parabel als Abstandsfunktion, absolutes Maximum (Höhle) -

Aufgabe

Gegeben ist der Längsschnitt des Ganges einer Tropfsteinhöhle, der sich zu einem *Dom* erweitert. Der Graph der Funktion p mit $\mathbf{p}(\mathbf{x}) := \frac{-1}{8}\cdot\mathbf{x}^2 + \frac{3}{4}\cdot\mathbf{x} + \frac{23}{8}$ bildet modellhaft die Decke der Höhle, der Graph der Funktion f mit $\mathbf{f}(\mathbf{x}) := \frac{-1}{32}\cdot\mathbf{x}^2 + \frac{5}{16}\cdot\mathbf{x} + \frac{7}{32}$ bildet modellhaft den Boden des Ganges.

a) Bestimmen Sie die Funktion der *lichten Höhe*, das ist der Abstand der y-Werte.
b) Berechnen Sie die Stelle x_0, für die der Dom am höchsten ist und geben Sie auch die maximale Höhe an.
c) Stellen Sie den Tropfsteinhöhlendom und den Verlauf des Abstandes in zwei Koordinatensystemen nebeneinander dar.

Teilaufgabe a)

Abstandsfunktion: $\mathbf{d}(\mathbf{x}) := \mathbf{p}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \frac{7\cdot x}{16} - \frac{3\cdot x^2}{32} + \frac{85}{32}$

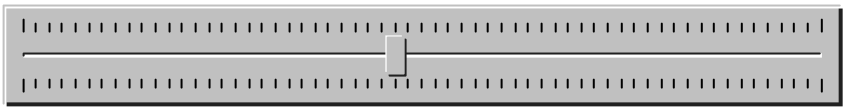
Teilaufgabe b)

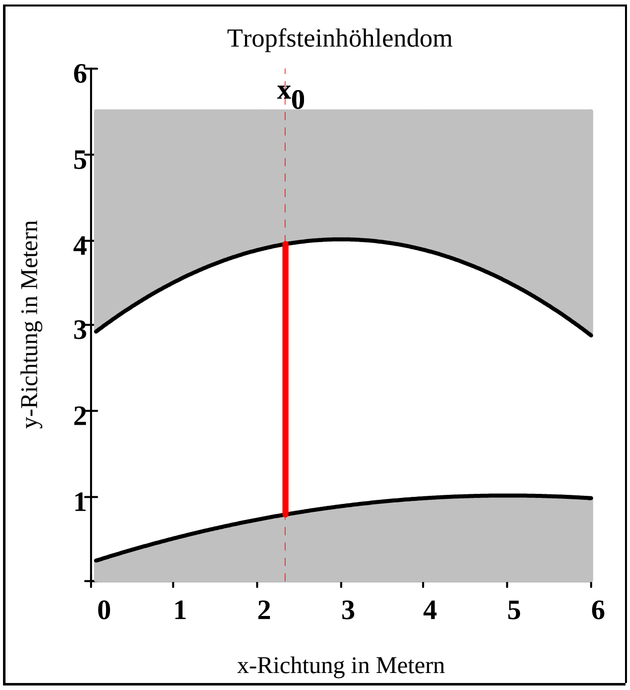
x-Wert des Scheitels: $x_S := \dfrac{-\frac{7}{16}}{2\cdot\left(-\frac{3}{32}\right)}$ $\qquad x_S = \frac{7}{3} = 2.333$

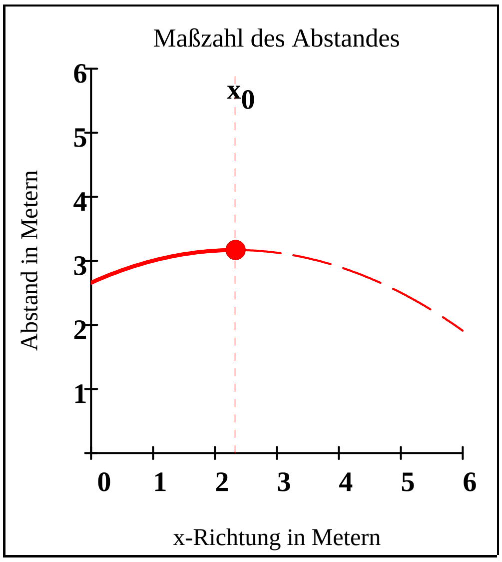
x-Wert des Scheitels: $x_S = \frac{7}{3}$ Funktionswert: $d(x_S) = \frac{19}{6}$

Teilaufgabe c)

Wähle den Punkt im Höhlengang:







$x_0 = 2.33$

Abstand $= 3.167\,m$

Trigonometrische Funktionen
- Bogenmaß, Winkelfunktionen am Einheitskreis -

1. Das Bogenmaß

Aufgabe 1

Gegeben ist ein ***Kreissektor*** zum Mittelpunktswinkel $\alpha \in \{20°; 30°; \ldots; 90°\}$.
Zu einem festen Winkel α werden verschiedene Radien $r_1 = 2$ cm, $r_2 = 3$ cm, $r_3 = 4$ cm und der zugehörige Bogen b_i betrachtet.

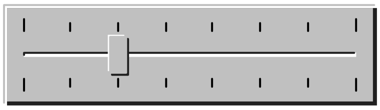
a) Berechnen Sie das Verhältnis des Bogens b_i zum jeweiligen Radius r_i.

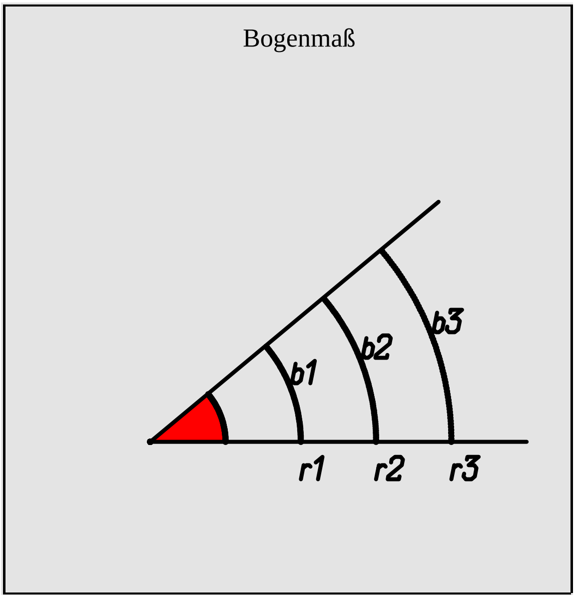
b) Zeigen Sie allgemein, dass das Verhältnis $\frac{b_i}{r_i}$ bei festem Mittelpunktswinkel α konstant ist.

Font information

Teilaufgabe a)

Veränderung des Mittelpunktswinkels:





Mittelpunktswinkel: $\alpha = 40 \cdot °$

Verhältnisse:

$$V = \begin{pmatrix} \text{"Radius"} & 2 & 3 & 4 \\ \text{"Bogen"} & 1.4 & 2.09 & 2.79 \\ \text{"Quotient b/r"} & 0.7 & 0.7 & 0.7 \end{pmatrix}$$

Ergebnis:

Der Quotient $\frac{b}{r}$ ist nur vom Mittelpunktswinkel α abhängig.

Teilaufgabe b)

Allgemein gilt für den Bogen b: $\mathbf{b = \frac{2 \cdot r \cdot \pi}{360 \cdot °} \cdot \alpha}$ $\qquad$ $\mathbf{b = \frac{\alpha}{180°} \cdot r \cdot \pi}$

Für den einzelnen Kreisbogen gilt: $\mathbf{b_1 = \frac{\alpha}{180°} \cdot r_1 \cdot \pi}$ $\quad$ $\mathbf{b_2 = \frac{\alpha}{180°} \cdot r_2 \cdot \pi}$ $\quad$ $\mathbf{b_3 = \frac{\alpha}{180°} \cdot r_3 \cdot \pi}$

Verhältnisse: $\mathbf{\frac{b_1}{r_1} = \frac{b_2}{r_2} = \frac{b_3}{r_3} = \ldots = \frac{\alpha}{180°} \cdot \pi}$

<u>Ergebnis:</u> Der Quotient $\mathbf{\frac{b}{r}}$ ist eine Größe, die nur vom Mittelpunktswinkel α abhängig ist.

<u>Definition</u>

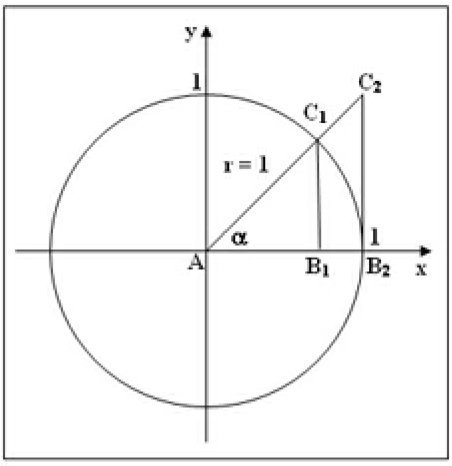
Der Quotient $\mathbf{\frac{b}{r} = arc(\alpha)}$ heißt Bogenmaß des Winkels α.

Das Bogenmaß ist eine Winkelangabe. Es gibt den Winkel als Verhältnis der Bogenlänge zum Radius an und ist von Bedeutung für die Darstellung von mathematischen Winkelfunktionen und in der Physik für die Beschreibung der Kreisbewegung.

<u>Festlegung:</u> $\mathbf{arc(\alpha) = \frac{\pi}{180°} \cdot \alpha}$ $\qquad$ $\mathbf{[\,arc\,(\alpha)\,] = 1\ R}$ $\qquad$ **(1 R = "1 Radiant")**

<u>Bemerkung:</u>
Die Schreibweise arc α wird nur selten verwendet. Stattdessen bezeichnet man in Winkelgraden gemessene Winkel mit kleinen griechischen Buchstaben und im Bogenmaß gemessene Winkel mit kleinen lateinischen Buchstaben.

<u>2. Winkelfunktionen am Einheitskreis</u>



Aufgabe 2

Gegeben sind die rechtwinkligen Dreiecke ΔAB_1C_1 und ΔAB_2C_2 im Einheitskreis.

a) Interpretieren Sie die Winkelfunktionen Sinus, Kosinus und Tangens.

b) Stellen Sie die Winkelfunktionen auch in den anderen Quadranten dar und bestimmen Sie das jeweilige Vorzeichen in den verschiedenen Quadranten.

Teilaufgabe a)

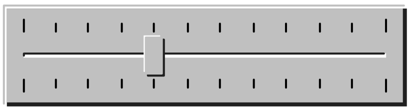
<u>Lösung:</u>

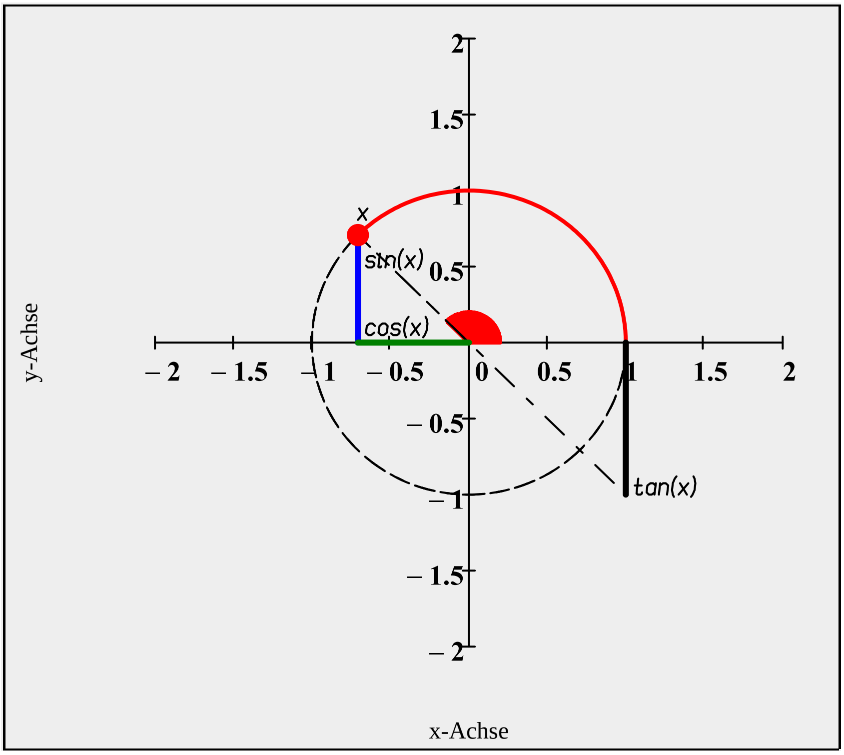
Sinus: $\sin(x) = \frac{\overline{B_1C_1}}{\overline{AC_1}} = \frac{\overline{B_1C_1}}{1} = \overline{B_1C_1}$

Kosinus: $\cos(x) = \frac{\overline{AB_1}}{\overline{AC_1}} = \frac{\overline{AB_1}}{1} = \overline{AB_1}$

Tangens: $\tan(x) = \frac{\overline{B_2C_2}}{\overline{AB_2}} = \frac{\overline{B_2C_2}}{1} = \overline{B_2C_2}$

Teilaufgabe b) Wähle den Standardwinkel:





<u>Gradmaß:</u> $x_1 = 135\ °$

<u>Bogenmaß:</u> $x_1 = \frac{3 \cdot \pi}{4}$

<u>Funktionen:</u>

$$\sin(x_1) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos(x_1) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan(x_1) = -1$$

Zusätzlich der ***Trigonometrische Pythagoras***:

$$\sin(x_1)^2 + \cos(x_1)^2 = 1$$

$$\text{Vorzeichentabelle} = \begin{pmatrix} \text{"2. Quadrant"} \\ \text{"sin(x) pos."} \\ \text{"cos(x) neg."} \\ \text{"tan(x) neg"} \end{pmatrix}$$

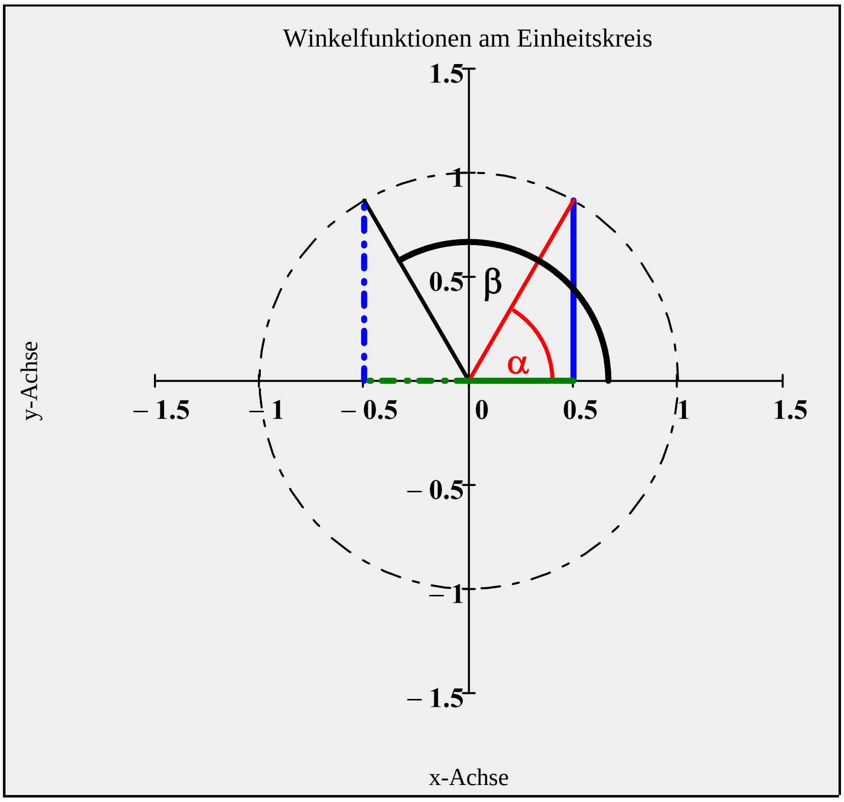
3. Zurückführen stumpfer Winkel in spitze Winkel

Aufgabe 3

Lässt man den Radius im Einheitskreis rotieren, ergeben sich in Abhängigkeit vom Quadranten und damit auch vom Vorzeichen periodische Werte für die einzelnen Winkelfunktionen. Das ist insbesondere beim Lösen von goniometrischen Gleichungen von Bedeutung. Drücken Sie den stumpfen Winkel im zweiten, dritten und vierten Quadranten durch den spitzen Winkel im ersten Quadranten aus.

Wähle den spitzen Winkel x_1 :

Wähle den stumpfen Winkel x_2: ◉ 2. Quadrant ○ 3. Quadrant ○ 4. Quadrant



Spitzer Winkel:

$$x_1 = \frac{\pi}{3}$$

$$\sin(x_1) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos(x_1) = \frac{1}{2}$$

Stumpfer Winkel:

$$x_2 = \frac{2 \cdot \pi}{3}$$

$$\sin(x_2) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos(x_2) = -\frac{1}{2}$$

4. Zusammenstellung der Formeln

Aufgabe 4
Stellen Sie alle Eigenschaften und Formeln übersichtlich zusammen.

Trigonometrischer Pythagoras: $\sin(x)^2 + \cos(x)^2 = 1$

Vorzeichen in den Quadranten:

$$\text{Vorzeichen} = \begin{pmatrix} \text{"Funktion"} & \text{" I "} & \text{" II "} & \text{" III "} & \text{" IV "} \\ \sin(x) & \text{positiv} & \text{positiv} & \text{negativ} & \text{negativ} \\ \cos(x) & \text{positiv} & \text{negativ} & \text{negativ} & \text{positiv} \\ \tan(x) & \text{positiv} & \text{negativ} & \text{positiv} & \text{negativ} \end{pmatrix}$$

Periodizität:

$\sin(x) = \sin(x + k\cdot 2\cdot\pi)$ $\quad$ $\cos(x) = \cos(x + k\cdot 2\cdot\pi)$ $\quad$ $\tan(x) = \tan(x + k\cdot\pi)$

Zurückführen auf spitze Winkel:

2. Quadrant: $\frac{\pi}{2} < x < \pi$

$\sin(\pi - x) = \sin(x)$ $\quad$ $\cos(\pi - x) = -\cos(x)$ $\quad$ $\tan(\pi - x) = -\tan(x)$

3. Quadrant: $\pi < x < \frac{3}{2}\cdot\pi$

$\sin(\pi + x) = -\sin(x)$ $\quad$ $\cos(\pi + x) = -\cos(x)$ $\quad$ $\tan(\pi + x) = \tan(x)$

4. Quadrant: $\frac{3}{2}\cdot\pi < x < 2\cdot\pi$

$\sin(2\cdot\pi - x) = -\sin(x)$ $\quad$ $\cos(2\cdot\pi - x) = \cos(x)$ $\quad$ $\tan(2\cdot\pi - x) = -\tan(x)$

Funktionswerte negativer Winkel:

$\sin(-x) = -\sin(x)$ $\quad$ $\cos(-x) = \cos(x)$ $\quad$ $\tan(-x) = -\tan(x)$

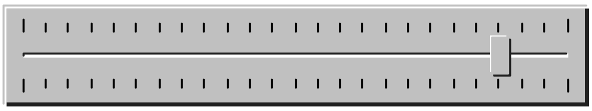
Trigonometrische Funktionen
- Sinusfunktion -

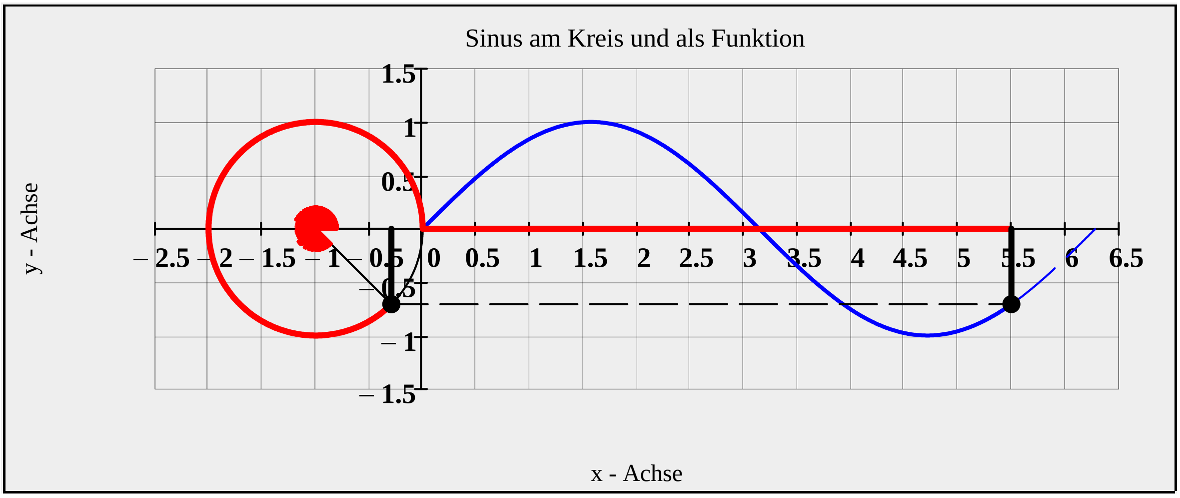
1. Entstehung des Funktionsgraphen von f(x) = sin(x)

Aufgabe 1
Gegeben ist der Einheitskreis, dessen Bogen am Punkt (**0** / 0) *aufgeschnitten* und in die x-Richtung abgewickelt wird. Beobachten Sie, wie durch die Veränderung des Winkels mit dem Schieberegler der Funktionsgraph entsteht.

Funktion: $\mathbf{f(x) := \sin(x)}$

Wähle den Winkel:





Gradmaß:	Bogenmaß:	Sinuswert:
$x_1 = 315\cdot°$	$x_1 = \frac{7\cdot\pi}{4}$	$\sin(x_1) = -0.707$

2. Eigenschaften der Sinusfunktion

Aufgabe 2
Wird der Einheitskreis mehrfach durchlaufen, entsteht eine periodische Funktion mit der Periodenlänge $\mathbf{p = 2 \cdot \pi}$.
Das heißt: $f(x) = f(x + 2\cdot\pi)$ bzw. $f(x) = f(x - 2\cdot\pi)$
Bestimmen Sie in Abhängigkeit von einer festgelegten Definitionsmenge sämtliche Nullstellen.

Wähle: $x_1 := 1$ $\quad x_2 := x_1 + 2\cdot\pi$ $\quad x_3 := x_1 - 2\cdot\pi$

Vergleiche: $f(x_1) = 0.841$ $\quad f(x_2) = 0.841$ $\quad f(x_3) = 0.841$

Die Definitionsmenge wird entsprechend festgelegt, z.B.:

Definitionsmenge: $D = [\, x_{min} ; x_{max} \,]$

Nullstellen: $\sin(x) = 0 \quad \Leftrightarrow$

Standardwerte in $[\, 0 ; 2\pi \,]$ $\quad x_{N11} := 0$ $\quad x_{N12} := \pi$

Allgemeine Lösung: $k := -1, -0 .. 2$ und $k \in Z$ beliebig

Vielfache von π:

$x_{N1}(k) := x_{N11} + k\cdot 2\cdot\pi$ $\qquad x_{N2}(k) := x_{N12} + k\cdot 2\cdot\pi$

Konkrete Nullstellen:

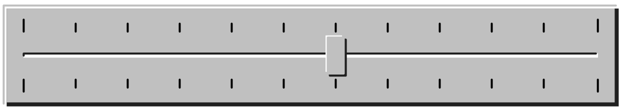
$x_{N1}(k) =$	$x_{N2}(k) =$
-6.283	-3.142
0	3.142
6.283	9.425
12.566	15.708

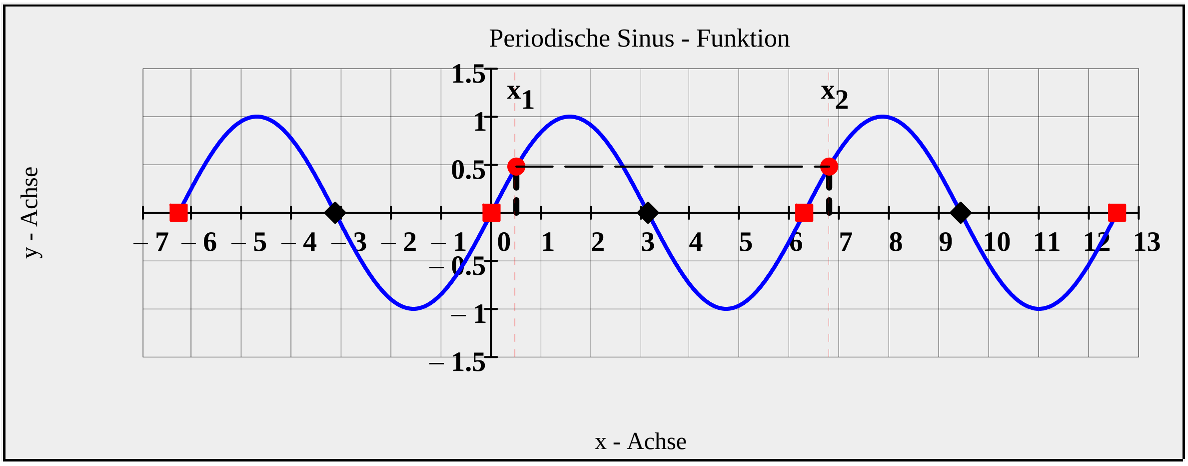
3. Graph der periodischen Sinusfunktion

Aufgabe 3
Stellen Sie sämtliche Nullstellen innerhalb der Definitionsmenge und die Periodenlänge in Abhängigkeit von verschiedenen Ausgangswerten $\mathbf{x_1}$ dar.

Wähle die Definitionsmenge: $\quad x_{min} := -2\cdot\pi \qquad x_{max} := 4\cdot\pi$

Wähle einen Kurvenpunkt $\mathbf{x_1}$:





Periodenlänge: $\quad \mathbf{p = 2\cdot\pi}$

Kurvenpunkt 1: $\quad \mathbf{x_1 = 0.5} \qquad \mathbf{f(x_1) = 0.479}$

Kurvenpunkt 2: $\quad \mathbf{x_2 = 2\cdot\pi + \frac{1}{2}} \qquad \mathbf{f(x_2) = 0.479}$

Trigonometrische Funktionen
- Die allgemeine Sinusfunktion 1 -

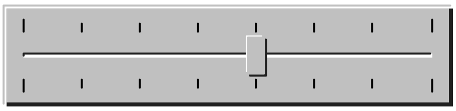
Die allgemeine Sinusfunktion ist, neben ihrer Bedeutung als Funktionenklasse in der Mathematik, für physikalische Anwendungen (Beschreibung von periodischen Vorgängen, Lösung von Differentialgleichungen, Fourier-Synthese, usw.) sehr wichtig.
Gegeben ist der Funktionsterm $\mathbf{f(x) = a \cdot \sin(b \cdot x + c) + d}$ einer allgemeinen Sinusfunktion.

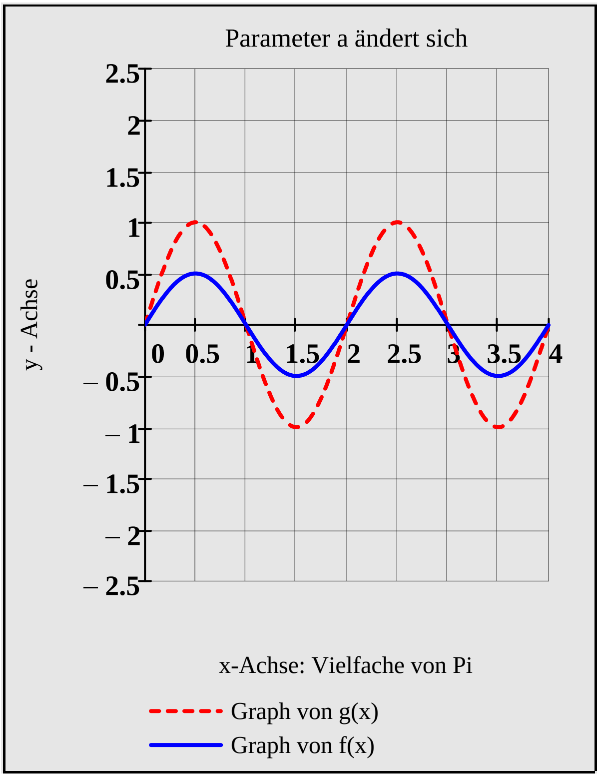
Im Folgenden soll der Einfluss der Parameter a, b $\in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ sowie c, d $\in \mathbb{R}$ untersucht werden.

Aufgabe 1

Gegeben sind die Funktionsterme $\mathbf{f(x) = a \cdot \sin(x)}$ und $\mathbf{g(x) = \sin(x)}$.
Untersuchen Sie mit Hilfe des Schiebereglers den Einfluss des Parameters a auf den Graphen G_f von f im Vergleich zum Graphen G_g der Funktion g.

Wähle den Parameter: $\mathbf{-2 \le a \le 2}$





Parameter:

$$\mathbf{a = \frac{1}{2}}$$

Konkreter Funktionsterm:

$$\mathbf{f(x) = \frac{\sin(x)}{2}}$$

$$\mathbf{Amplitude = \frac{1}{2}}$$

Vergleichsfunktion:

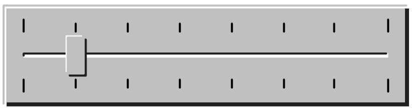
$$\mathbf{g(x) = \sin(x)}$$

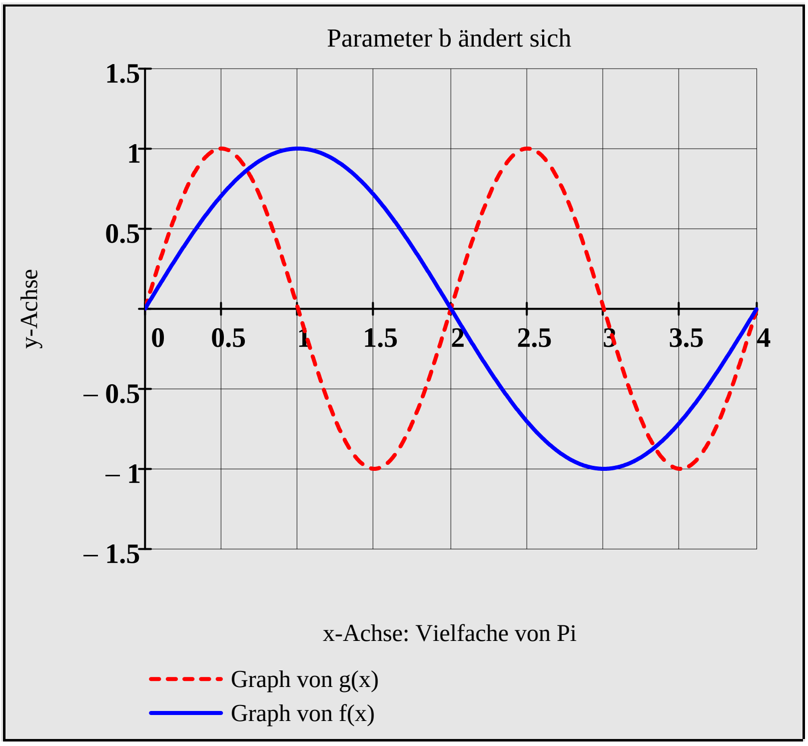
Ergebnis:
Der Parameter a bewirkt eine Stauchung für $-1 < a < 1$ bzw. Streckung für $a < -1 \vee a > 1$ der Auslenkung (Elongation) in y-Richtung. Periode, Nullstellen und Symmetrieeigenschaften entsprechen der Sinusfunktion **g(x) = sin(x)**.
Bezeichnung:
Die maximale Auslenkung aus der Mittellage wird mit ***Amplitude*** bezeichnet.

Aufgabe 2

Gegeben sind die Funktionsterme $\mathbf{f(x) = sin(b \cdot x)}$ und $\mathbf{g(x) = sin(x)}$.
Untersuchen Sie mit Hilfe des Schiebereglers den Einfluss des Parameters b auf den Graphen G_f von f im Vergleich zum Graphen G_g der Funktion g.

Wähle den Parameter: $\frac{1}{4} \le \mathbf{b} \le 4$





Parameter:

$$\mathbf{b} = \frac{1}{2}$$

Periodenlänge:

$$p_b = 4 \cdot \pi$$

Konkreter Funktionsterm:

$$\mathbf{f(x)} = \mathbf{sin}\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$\mathbf{Frequenz} = \frac{1}{2}$$

Vergleichsfunktion:

$$\mathbf{g(x)} = \mathbf{sin(x)}$$

Ergebnis:
Der Parameter b bewirkt eine Stauchung für $b < -1 \vee b > 1$ bzw. eine Streckung für $-1 < b < 1$ der Schwingungen in x-Richtung.
Die Periode, Nullstellen und Symmetrieeigenschaften entsprechen der substituierten Sinusfunktion $\mathbf{f(t) = sin(t)}$.

Periodenlänge: $p_b = \frac{2 \cdot \pi}{b}$

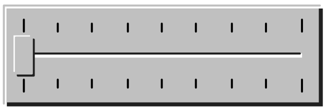
Nullstellen: $t = k \cdot \pi \quad \Leftrightarrow \quad b \cdot x = k \cdot \pi \quad \Leftrightarrow \quad x_0 = \frac{k \cdot \pi}{b} \quad \text{mit } k \in Z$

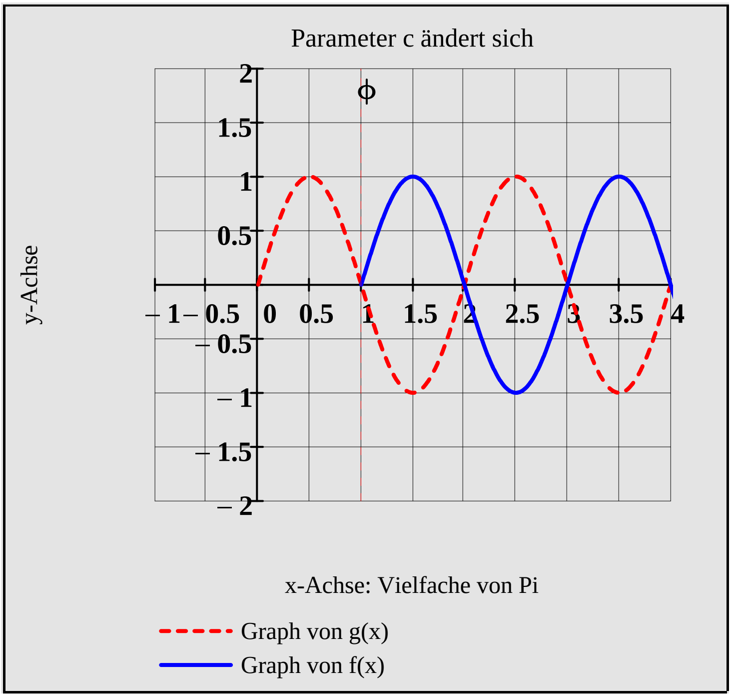
Bezeichnung:
Die Anzahl der Schwingungen bezogen auf die Periodenlänge $2 \cdot \pi$ der Standardsinusfunktion wird mit ***Frequenz*** bezeichnet.

Aufgabe 3

Gegeben sind die Funktionsterme $\mathbf{f(x) = sin(x + c)}$ und $\mathbf{g(x) = sin(x)}$.
Untersuchen Sie mit Hilfe des Schiebereglers den Einfluss des Parameters c auf den Graphen G_f von f im Vergleich zum Graphen G_g der Funktion g.

Wähle den Parameter: $-\pi \le c \le \pi$





Parameter c:

Parameter $= -\pi$

Konkreter Funktionsterm:

$\mathbf{f(c, x) = -sin(x)}$

Verschiebung → "nach rechts"

Phase $= -\pi$

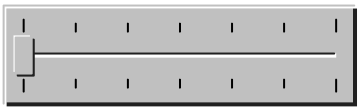
Vergleichsfunktion:

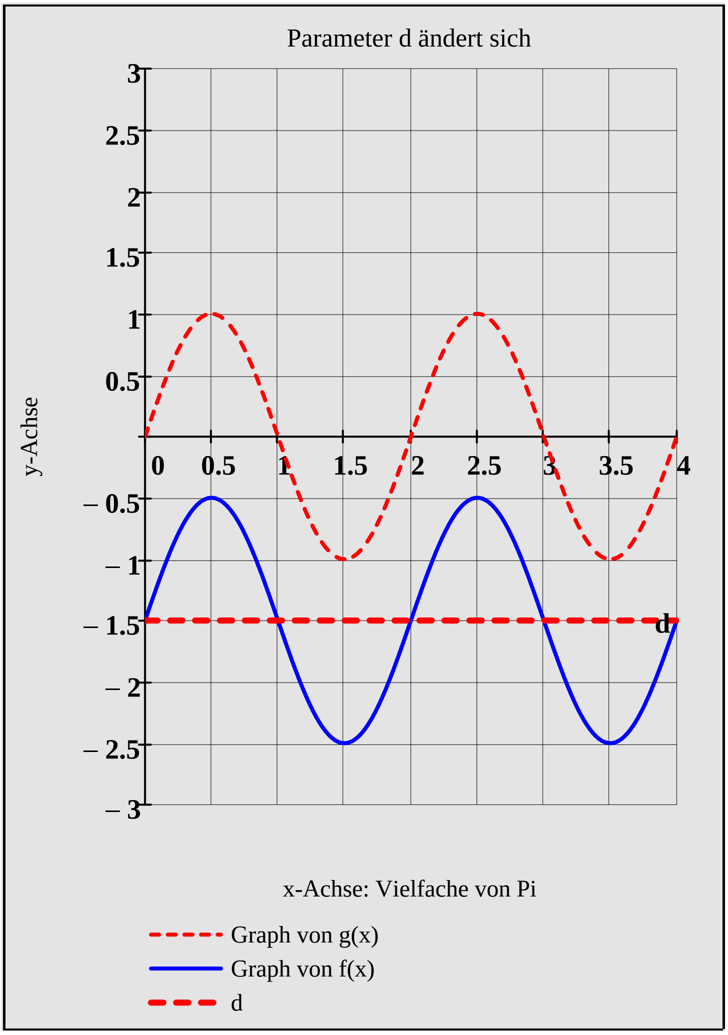
$\mathbf{g(x) = sin(x)}$

Ergebnis:
Der Parameter c bewirkt eine Verschiebung der Standardfunktion sin(x) für c > 0 nach links bzw. für c < 0 nach rechts.

Aufgabe 4
Gegeben sind die Funktionsterme $\mathbf{f(x) = sin(x) + d}$ und $\mathbf{g(x) = sin(x)}$.
Untersuchen Sie mit Hilfe des Schiebereglers den Einfluss des Parameters d auf den Graphen G_f von f im Vergleich zum Graphen G_g der Funktion g.

Wähle den Parameter: $\mathbf{-1.5 \le d \le 1.5}$





Parameter:

$$\mathbf{d = -\frac{3}{2}}$$

Konkreter Funktionsterm:

$$\mathbf{f(x) = sin(x) - \frac{3}{2}}$$

Verschiebung → "nach unten"

Vergleichsfunktion:

$$\mathbf{g(x) = sin(x)}$$

Ergebnis:
Der Parameter d bewirkt eine Verschiebung des Funktionsgraphen für d > 0 nach oben bzw. für d < 0 nach unten. Man sagt, der Funktionsgraph ***schwingt*** um die Gerade y = d.

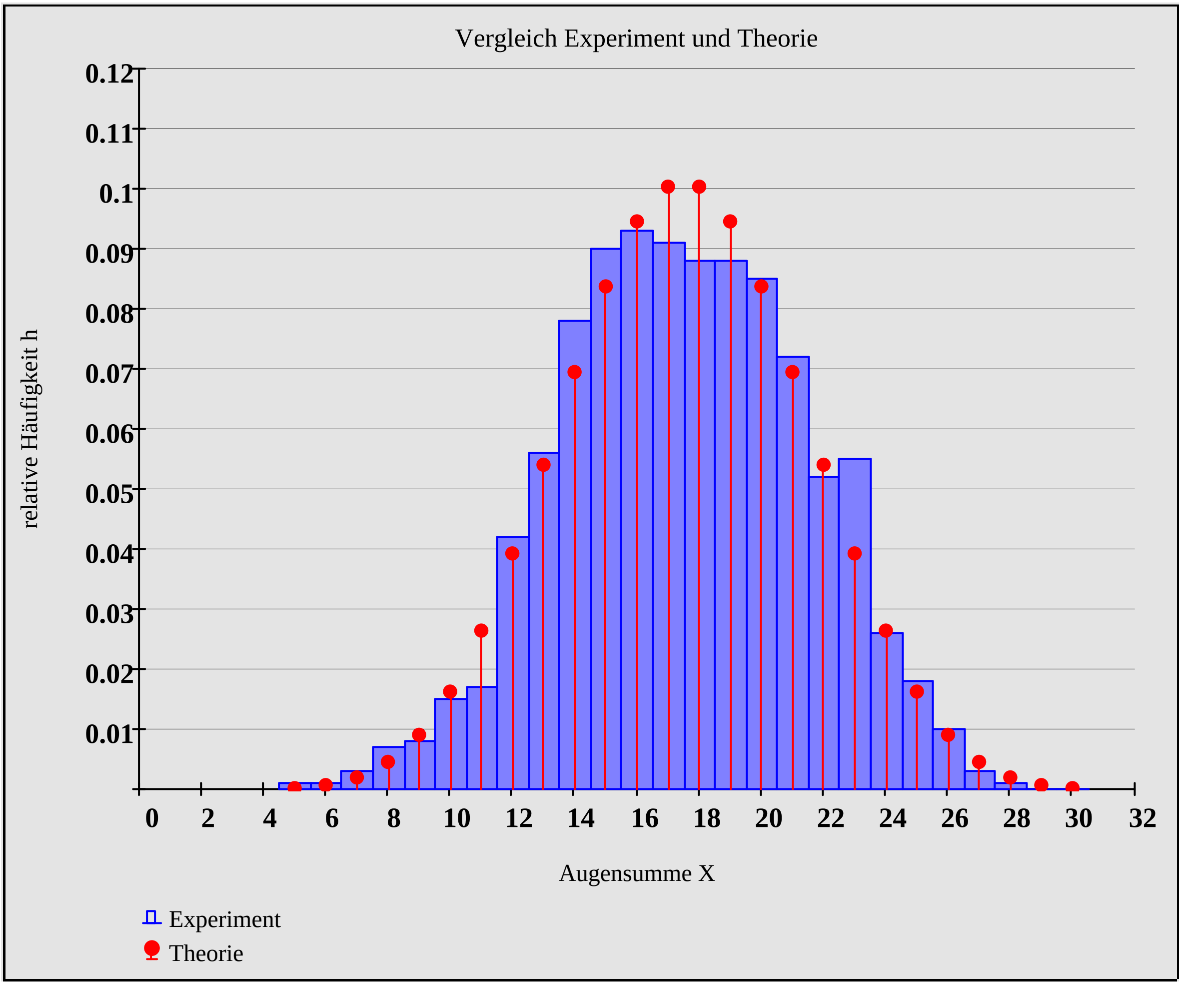
Fünffacher Würfelwurf
- Relative Häufigkeit, Gesetz der großen Zahlen -

Aufgabe
Fünf unterscheidbare Würfel werden n mal geworfen, betrachtet wird die Zufallsgröße **X** = **Augensumme**. Mit einem Zufallszahlengenerator kann man die Zahlen von 5 bis 30 erzeugen. Erstellen Sie ein X-h-Diagramm, in dem die experimentelle und theoretische Häufigkeit dargestellt wird.

Starten Sie das Experiment mit der Tastenkombination <Strg - F9>.

Anzahl der Würfe: **n := 1000**   (n lässt sich ändern)

Graphische Darstellung:



Komplette Wertetabelle:

Theorie =

"Augensumme"	"Möglichkeiten"	"Wahrscheinlichkeit"
5	1	0.0001286008
6	5	0.0006430041
7	15	0.0019290123
8	35	0.0045010288
9	70	0.0090020576
10	126	0.0162037037
11	205	0.0263631687
12	305	0.039223251
13	420	0.0540123457
14	540	0.0694444444
15	651	0.0837191358
16	735	0.0945216049
17	780	0.100308642
18	780	0.100308642
19	735	...

Mehrstufige Zufallsexperimente
- Dreimaliges Ziehen mit zwei Merkmalen -

Aufgabe

In einem Gefäß befinden sich Kugeln mit den zwei Merkmalen S_1 und S_2 . Die Anzahl der Kugeln mit den Merkmalen sei Z_1 und Z_2. Es wird dreimal ohne bzw. mit Zurücklegen gezogen.
Stellen Sie den Ergebnisraum in Form eines Baumdiagrammes dar und geben Sie jeweils die Wahrscheinlichkeit an.

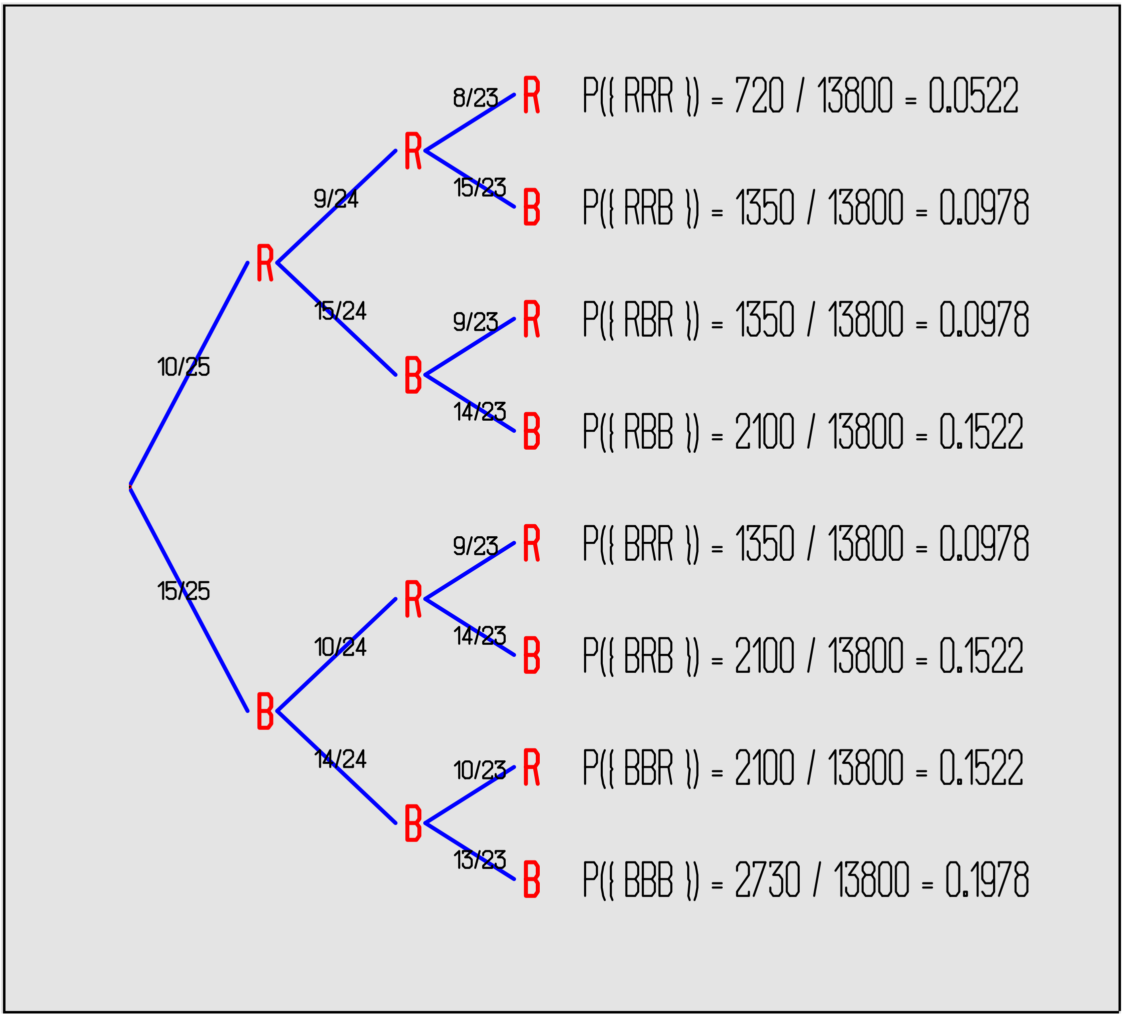
Wähle: ○ Ziehen mit Zurücklegen ◉ Ziehen ohne Zurücklegen

Bezeichnungen der einzelnen Merkmale (veränderbar): S_1 := "R" S_2 := "B"

Anzahl der einzelnen Merkmale (veränderbar): $Z_1 := 10$ $Z_2 := 15$

Darstellung

Baumdiagramm:



Vierfeldertafel
als Multiplikationstafel für Wahrscheinlichkeiten
- Programmierte Berechnungen -

Theorie

Zur Erfassung und Auswertung von Daten trägt man diese in eine ***Urliste*** ein.
Mit Hilfe einer Strichliste ermittelt man die absoluten Häufigkeiten und kann dann die relativen Häufigkeiten berechnen.
Die Zerlegung der Gesamtmenge nach den Eigenschaften bildet die Grundlage der ***Vierfeldertafel***. Sind die Ereignisse A und B unabhängig voneinander, dann ist die Vierfeldertafel eine ***Multiplikationstafel*** für die Wahrscheinlichkeiten.
Sind die Ereignisse abhängig voneinander, kann diese Tafel nicht benutzt werden.

Aufgabe 1

Eine Klasse hat untersucht, ob die Klassenkameraden am Schulort wohnen oder von auswärts kommen. 30 % der Schülerinnen und Schüler kommen aus dem Umland.
In der Klasse sind 60 % Jungen und 10 % sind Mädchen, die nicht am Ort wohnen.
Ergänzen Sie die fehlenden Wahrscheinlichkeiten in der Vierfeldertafel und geben Sie den Anteil der Mädchen an, die am Schulort wohnen.

Berechnung der relativen Häufigkeiten:

Ereignis A: ***Umland*** $h_A := 0.3$

Ereignis B: ***Junge*** $h_B := 0.6$

Gegenereignis von B: ***Mädchen = kein Junge*** $h_{nB} := 0.4$

Durchschnittsereignis A ∩ nB: ***Mädchen aus dem Umland*** $h_{A \cap nB} := 0.1$

Tragen Sie die beliebig gegebenen Größen ein:

Ereignis A: $P_A := 0.3$ **Gegenereignis A:** $P_{nA} := 0.7$

Ereignis B: $P_B := 0.6$ **Gegenereignis B:** $P_{nB} := 0.4$

Durchschnittsereignisse:

$P_{A \cap B} :=$ $P_{nA \cap B} :=$ $P_{A \cap nB} := 0.1$ $P_{nA \cap nB} :=$

Kontrolle der definierten Wahrscheinlichkeiten:

$$\textbf{Behelfstafel} = \begin{pmatrix} \text{"-----------"} & \text{"B"} & \text{"nB"} & \text{"Summe"} \\ \text{"A"} & \text{"x"} & \text{"x"} & \text{"x"} \\ \text{"nA"} & \text{"x"} & \text{"x"} & \text{"x"} \\ \text{"Summe"} & \text{"x"} & \text{"x"} & 1 \end{pmatrix}$$

Ausgabe der Vierfeldertafel mit definierten Wahrscheinlichkeiten:

$$\textbf{Tafel} = \begin{pmatrix} \text{"-----------"} & \text{"B"} & \text{"nB"} & \text{"Summe"} \\ \text{"A"} & \text{"x"} & 0.1 & 0.3 \\ \text{"nA"} & \text{"x"} & \text{"x"} & 0.7 \\ \text{"Summe"} & 0.6 & 0.4 & 1 \end{pmatrix}$$

Ausgabe der Vierfeldertafel mit vervollständigten Wahrscheinlichkeiten:

$$\textbf{Ergebnis} = \begin{pmatrix} \text{"-----------"} & \text{"B"} & \text{"nB"} & \text{"Summe"} \\ \text{"A"} & 0.2 & 0.1 & 0.3 \\ \text{"nA"} & 0.4 & 0.3 & 0.7 \\ \text{"Summe"} & 0.6 & 0.4 & 1 \end{pmatrix}$$

Auslesen aus der Vierfeldertafel:

Jungen aus dem Umland: $P_{A \cap B} := \text{Lösung1}_0 \qquad P_{A \cap B} = 0.200$

Mädchen aus dem Umland: $P_{A \cap nB} := \text{Lösung1}_1 \qquad P_{A \cap nB} = 0.100$

Jungen aus der Stadt: $P_{nA \cap B} := \text{Lösung1}_3 \qquad P_{nA \cap B} = 0.400$

Mädchen aus der Stadt: $P_{A \cap nB} := \text{Lösung1}_4 \qquad P_{A \cap nB} = 0.300$

Aufgabe 2

Eine Zoohandlung möchte die Werbekampagne direkt auf die Zielgruppe abstimmen.
In einer Umfrage wird also das Lieblingshaustier bei Mädchen bzw. Jungen ermittelt.
Es wurden 30 Kinder befragt, davon sind 12 Mädchen und 18 Jungen.
Vier Mädchen bzw. fünf Jungen gaben an, Katzen zu mögen.
Ist die Katze als Haustier bei den Jungen beliebter oder bei den Mädchen?

Berechnung der relativen Häufigkeiten:

Ereignis A: ***Mädchen*** $h_A := \frac{12}{30} = \frac{2}{5}$

Gegenereignis von A: ***Junge = kein Mädchen*** $h_{nB} := \frac{18}{30} = \frac{3}{5}$

Ereignis B: ***Katze***

Ereignis A ∩ B: ***Mädchen mögen Katzen*** $h_{A\cap B} := \frac{4}{12}$ $h_{A\cap B} = 0.333$

Ereignis nA ∩ B: ***Jungen mögen Katzen*** $h_{nA\cap B} := \frac{5}{18}$ $h_{nA\cap B} = 0.278$

Ergebnis: Im Verhältnis zur Gesamtzahl mögen mehr Mädchen Katzen als Jungen.
Interpretation: Die Ereignisse sind voneinander abhängig $\longrightarrow$ keine Multiplikationstafel

Tragen Sie die beliebig gegebenen Größen ein:

Ereignis A: $P2_A := \frac{2}{5}$ **Gegenereignis A:** $P2_{nA} := \frac{3}{5}$

Ereignis B: $P2_B := \blacksquare$ **Gegenereignis B:** $P2_{nB} := \blacksquare$

Durchschnittsereignisse:

$P2_{A\cap B} := \frac{4}{12}$ $P2_{nA\cap B} := \frac{5}{18}$ $P2_{A\cap nB} := \blacksquare$ $P2_{nA\cap nB} := \blacksquare$

Diese Behelfstafel wird auch bei fehlerhafter Eingabe ausgegeben.

$$\text{Behelfstafel} = \begin{pmatrix} \text{"-----------"} & \text{"B"} & \text{"nB"} & \text{"Summe"} \\ \text{"A"} & \text{"x"} & \text{"x"} & \text{"x"} \\ \text{"nA"} & \text{"x"} & \text{"x"} & \text{"x"} \\ \text{"Summe"} & \text{"x"} & \text{"x"} & 1 \end{pmatrix}$$

Ergebnis existiert nicht, also erfolgt eine Fehlermeldung.

Ausgabe der Vierfeldertafel nicht möglich: $\text{Tafel} = \text{"falsche Eingabe"}$

Grundkonstruktionen
- Spiegelung an einer Geraden -

Definition

Die Geradenspiegelung (Achsenspiegelung) ist eine Abbildung innerhalb der Zeichenebene. Die Spiegelung an einer Geraden a ordnet jedem Punkt P der Zeichenebene einen Bildpunkt P' zu, der dadurch bestimmt ist, dass die Verbindungsstrecke [PP'] von der Achse a rechtwinklig halbiert wird.

Probieren Sie es mit Geonext:

3-13-05_spieg_gerade_0.gxt

Aufgabe

Vom ΔABC sind die Eckpunkte A, B und C gegeben. ΔABC wird an der Achse a gespiegelt, man erhält ΔA'B'C'.
Die Steigung und der y-Abschnitt der Spiegelachse a sind veränderbar.
Bestimmen Sie die Koordinaten der gespiegelten Punkte A', B', und C' durch Konstruktion.

Probieren Sie es mit Geonext:

3-13-05_spieg_gerade_1.gxt

Konstruktionsbeschreibung:

1. Fälle das Lot von Punkt **A** auf die Spiegelachse **a. M** sei der Lotfußpunkt auf **a**.
2. Schlage einen Kreis $\mathbf{K_1}$ um M mit Radius $\mathbf{r} = \overline{\mathbf{MA}}$.
3. Der Schnittpunkt der Verbindungsgeraden durch **A** und **M** mit dem Kreis $\mathbf{K_1}$ ist der Bild-
   punkt **A'**.
4. Wiederholen Sie die Schritte 1, 2 und 3 jeweils für den Punkt **B** und für den Punkt **C**.

Gegebene Größen:

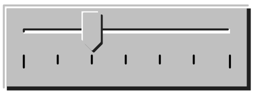
Eckpunkte des Dreiecks: $\mathbf{A} := (\mathbf{4} \quad \mathbf{-2})$ $\mathbf{B} := (\mathbf{8} \quad \mathbf{-2})$ $\mathbf{C} := (\mathbf{6} \quad \mathbf{2})$

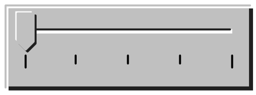
Probieren Sie es mit Geonext:

3-13-05_spieg_gerade_2.gxt

1. Spiegelung an einer Geraden mit der Steigung m und dem Achsenabschnitt t.

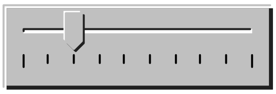
Auswahl aktivieren: Schiefe Spiegelachse

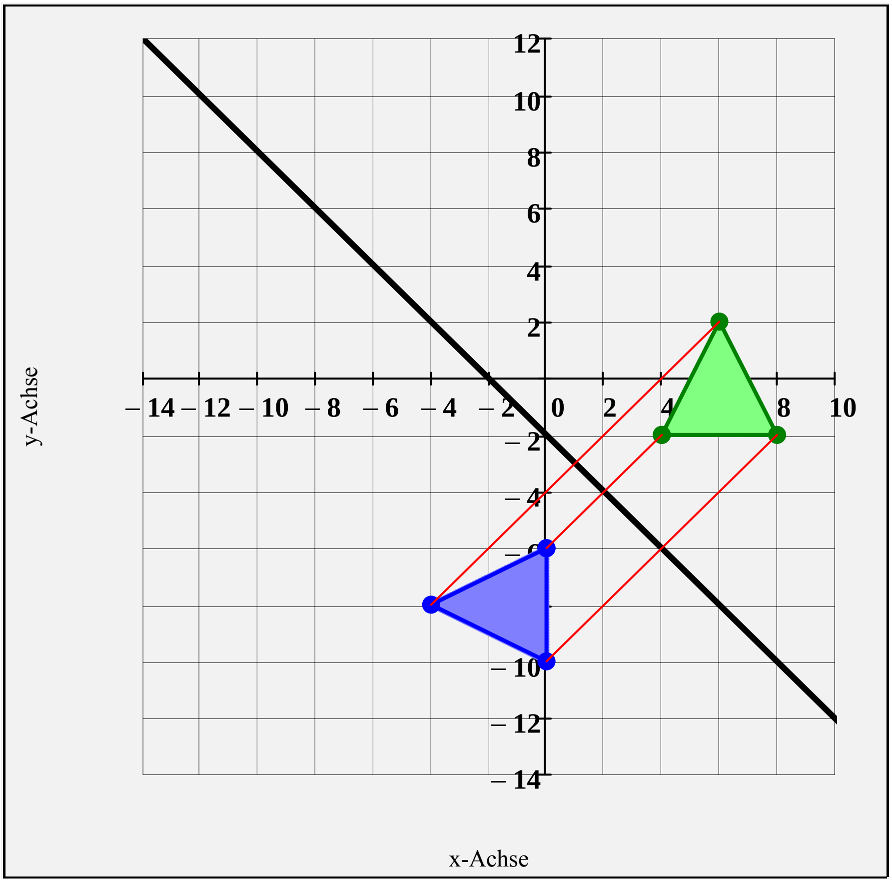
Steigung m: 

Achsenabschnitt t: 

2. Spiegelung an einer Geraden, die parallel zur y-Achse verläuft:

Auswahl aktivieren: Senkrechte Spiegelachse

Veränderung der Lage: 



Dreieck ABC:

A = (**4** **−2**)

B = (**8** **−2**)

C = (**6** **2**)

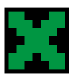
Dreieck A'B'C':

A' = (**0** **−6**)

B' = (**0** **−10**)

C' = (**−4** **−8**)

Als Zugabe: Probieren Sie mit Geonext vier Spiegelungen nacheinander:



Spiegelung_4_geraden.gxt

Ebene Geometrie
- Der Satz des Pythagoras, Generierung pythagoreischer Zahlen -

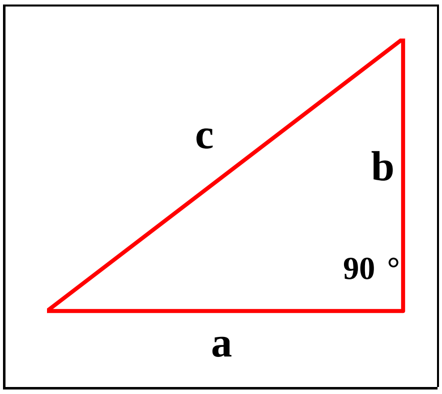
1. Der Satz des Pythagoras

In einem ebenen rechtwinkligen Dreieck gilt: Die Summe der Flächeninhalte der Kathetenquadrate ist gleich dem Flächeninhalt des Hypotenusenquadrats:

$$\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2 = \mathbf{c}^2$$

Pythagoras von Samos
(* 570 v. Chr., + nach 510 v. Chr.)
griechischer Philosoph

Mit freundlicher Genehmigung von:
http://turnbull.mcs.st-and.ac.uk/history/PictDisplay/Pythagoras.html



Beweis

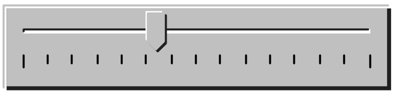
Anwendung des Kathetensatzes für jede Kathete:

1. Kathete: $\mathbf{a}^2 = \mathbf{p} \cdot \mathbf{c}$;

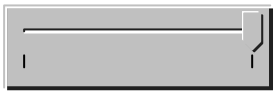
2. Kathete: $\mathbf{b}^2 = \mathbf{q} \cdot \mathbf{c}$;

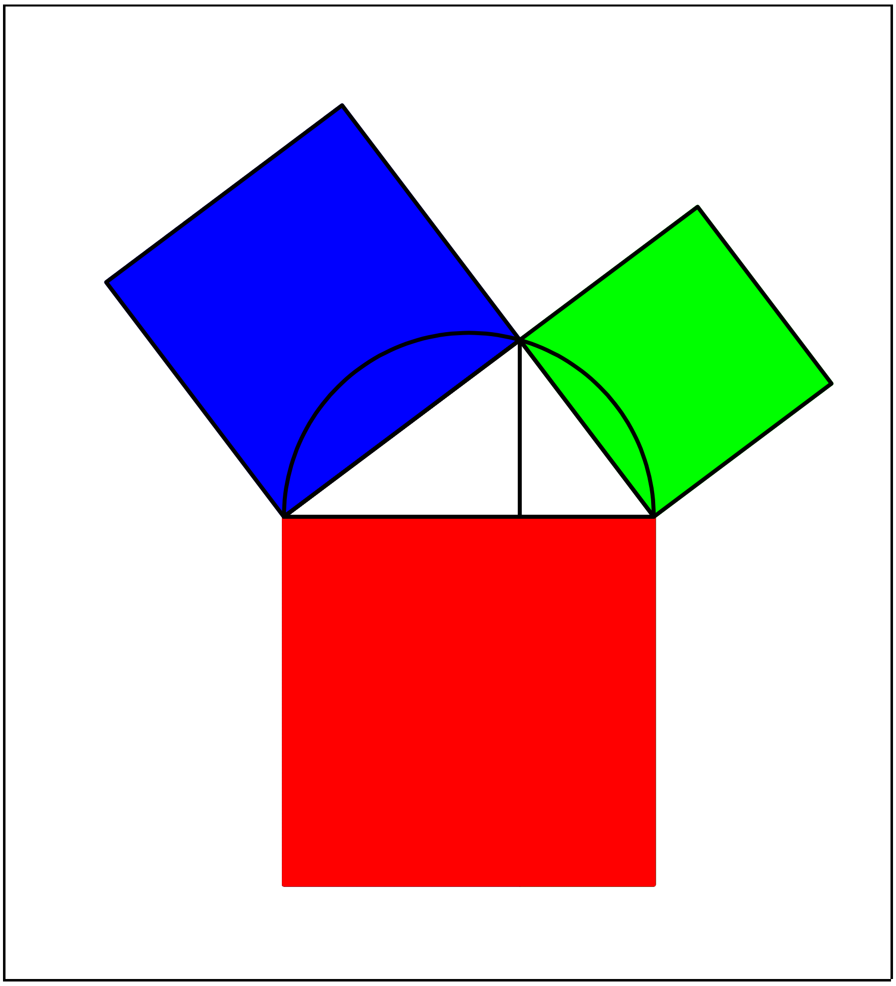
Summe: $\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2 = \mathbf{p} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{q} \cdot \mathbf{c} = (\mathbf{p} + \mathbf{q}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{c} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{c}^2$

Wähle den Winkel des Umkreispunktes:



Hypotenusenabschnitt:





Längen der Katheten: $|BC| = 12.036$ $|AC| = 15.973$

Länge der Hypotenuse: $|AB| = 20$

Flächen : $(|BC|)^2 + (|AC|)^2 = 400$ $(|AB|)^2 = 400$

2. Pythagoreische Zahlentripel

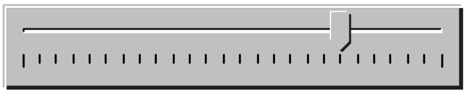
Ein pythagoreisches Zahlentripel ist eine Gruppe von drei ganzen Zahlen, für die

die Gleichung $\mathbf{a^2 + b^2 = c^2}$ gilt. Es gibt unendlich viele solcher Tripel.

So kann man sie z. B. finden:

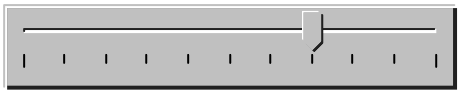
$\mathbf{a = 2 \cdot p \cdot q\,;\ b = p^2 - q^2\,;\ c = p^2 + q^2}$ oder $\mathbf{a = p^2 - q^2\,;\ b = 2 \cdot p \cdot q\,;\ c = p^2 + q^2}$

Wähle die Anzahl n der pythagoreischen Zahlen:



n = **19**

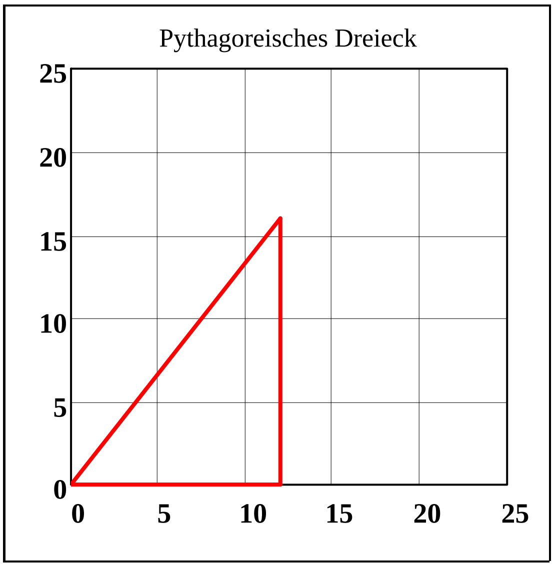
Wähle das pythagoreische Zahlentripel:



k = **7**

Zahlen =

"1. Kathete"	"2. Kathete"	"Hypotenuse"
4	3	5
12	5	13
8	6	10
15	8	17
12	9	15
16	12	20



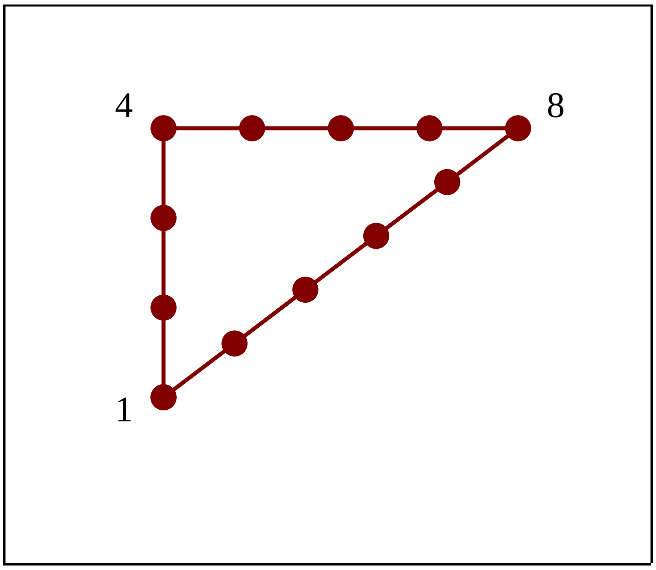
Zahlen aus Zeile = **6**

Zahlentripel =

"a"	"b"	"c"
16	12	20

Anwendungen

Schon im alten Ägypten verwendeten die *Seilspanner* beim Bau der Pyramiden den Satz des Pythagoras. Mit Hilfe von *Zwölfknotenschnüren* erzielten sie genaue rechte Winkel: Ein langes Seil wird durch Knoten in 12 gleich lange Stücke geteilt und durch Pflöcke im Verhältnis 5:3:4 (Pythagoreisches Tripel) zu einem Dreieck aufgespannt. Dieses besitzt immer einen rechten Winkel.



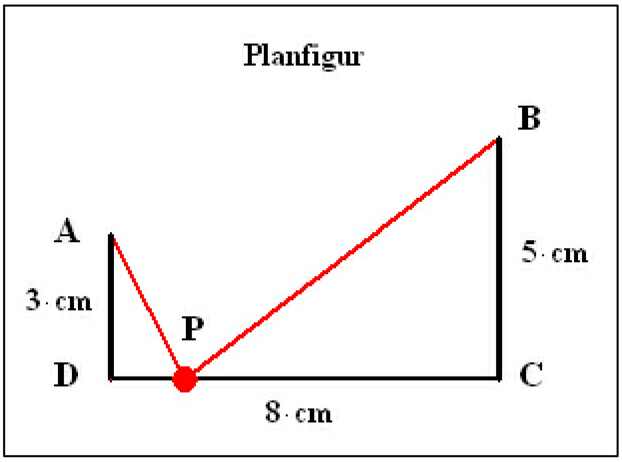
Wird das Seil am ersten, vierten und achten Knoten festgehalten, entsteht am 4. Knoten ein rechter Winkel.

Ebene Geometrie
- Anwendungen zum Satz des Pythagoras -

Aufgabe 1

1. In der Figur unten gilt: $\overline{AD} = 3 \cdot cm$, $\overline{BC} = 5 \cdot cm$, $\overline{CD} = 8 \cdot cm$.
   Der Punkt P liegt auf CD. AD und BC stehen senkrecht auf CD.
   a) Zeichnen Sie die Figur in Originalgröße.
   b) Finden Sie durch Verschieben des Schiebereglers den minimalen Wert für
   $d = \overline{AP} + \overline{BP}$.
   Begründen Sie die Lage des Punktes P mit Worten. Beachten Sie dabei das erscheinende gestrichelte Hilfsdreieck.)
   c) Berechnen Sie d_{min} .

<u>Lösung:</u>



Die Verbindungsstrecke AP ist Hypotenuse des rechtwinkligen Dreiecks APD:

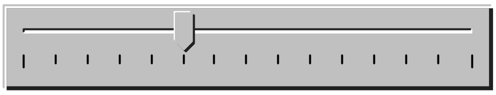
1. Teilstrecke: $\overline{AP} = \sqrt{p^2 + 9}$

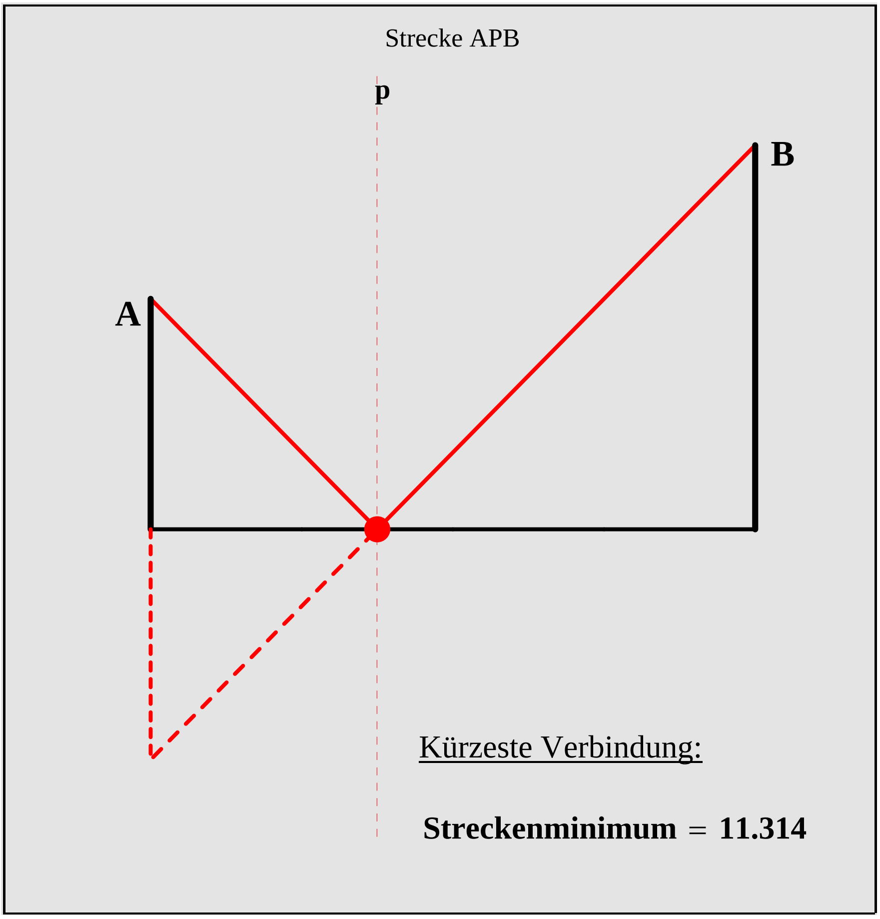
Die Verbindungsstrecke BP ist Hypotenuse des rechtwinkligen Dreiecks BPC:

2. Teilstrecke: $\overline{BP} = \sqrt{(8 - p)^2 + 25}$

Gesamte Länge: $d_{APB} = \overline{AP} + \overline{BP}$

Wählen Sie den Punkt P auf der Strecke CD:





Punkt P:

p = 3

Streckenlänge:

$\mathbf{d_{APB} = 11.314}$

Lösung über Differentialrechnung

Aufgabe 2
Die Punkte A bis H sind die Ecken einer Schachtel. Die Kanten haben die Längen

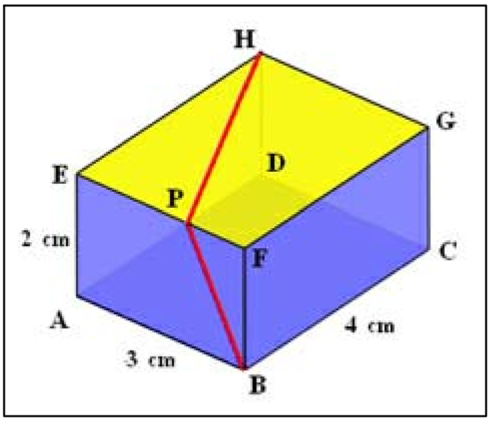
$\overline{AB} = 3 \cdot cm$; $\overline{BC} = 4 \cdot cm$ und $\overline{AE} = 2 \cdot cm$.

Der Punkt P liegt auf der Kante EF und kann verschoben werden.

a) Finden Sie durch Verschieben des Schiebereglers den minimalen Wert für
$d = \overline{HP} + \overline{PB}$.

b) Klappen Sie den Deckel der rechten Schachtel auf und begründen Sie die Lage des Punktes P mit Worten. (Zwischenergebnis: $p = 2$)

c) Berechnen Sie d_{min} auf drei Stellen nach dem Komma und überprüfen Sie im Diagramm.



Lösung:

Die Verbindungsstrecke HP ist Hypotenuse des rechtwinkligen Dreiecks HPE:

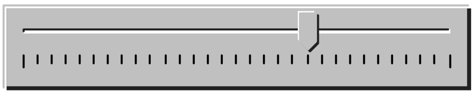
1. Teilstrecke: $\overline{HP} = \sqrt{\left(\overline{EH}\right)^2 + \left(\overline{EP}\right)^2} = \sqrt{16 + p^2}$

Die Verbindungsstrecke HP ist Hypotenuse des rechtwinkligen Dreiecks HPE:

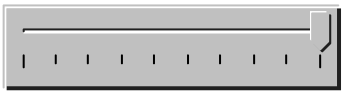
2. Teilstrecke: $\overline{PB} = \sqrt{\left(\overline{FB}\right)^2 + \left(\overline{PF}\right)^2} = \sqrt{4 + (3 - p)^2}$

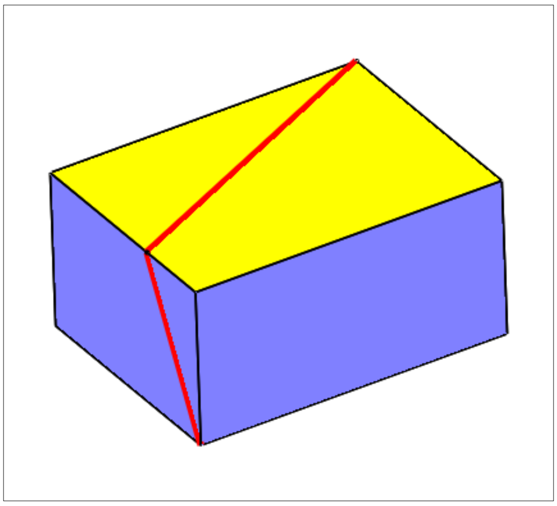
Gesamte Länge: $d_{HPB} = \overline{HP} + \overline{PB}$

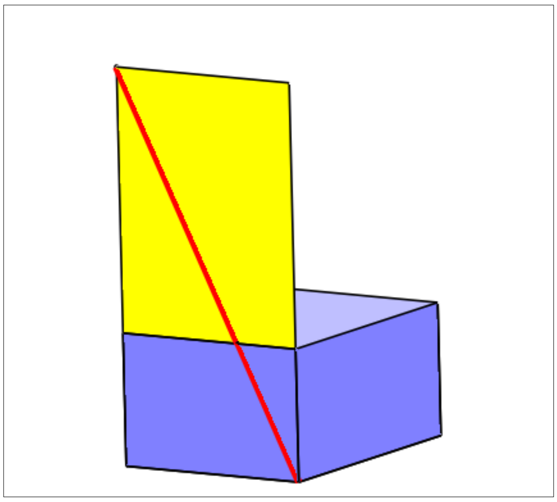
Verschiebung des Punktes P:



Anhebung des Deckels:







Punkt P: $\mathbf{P} \rightarrow (\mathbf{2} \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{2})$

für $\mathbf{p} = \mathbf{2}$ gilt: $\mathbf{Länge\_HPB} = \mathbf{6.708}$

▶ Lösung mithilfe der Differentialrechnung

Räumliche Figuren
- Rotierendes Dreieck - Gerader Kreiskegel -

Aufgabe 1

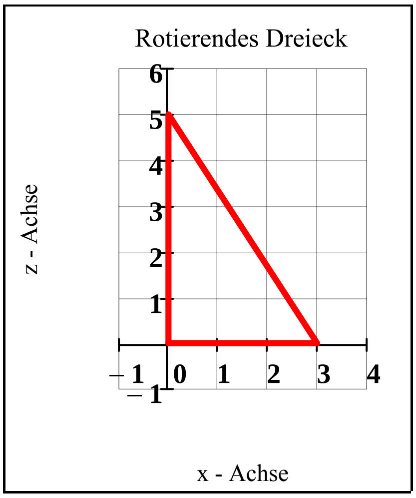
Gegeben ist ein rechtwinkliges Dreieck ABC mit $\overline{AB} = g$, $\overline{AC} = h$, $\angle BAC = 90°$.
Das ΔABC rotiert um AC als Achse, wodurch ein Kegel ensteht. Stellen Sie das rotierende Dreieck mit dem Kegel graphisch dar.

Gegebene Größen in cm:

Dreiecksgrundseite: $g := 3$ Dreieckshöhe: $h := 5$

Grundkreisradius: $R_K := g$ Kegelhöhe: $H_K := h$

Grundlagen:



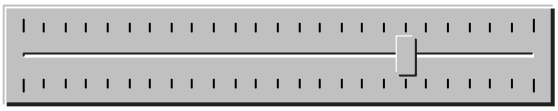
Seitenlinie: $S_K = \sqrt{H_K^2 + R_K^2}$

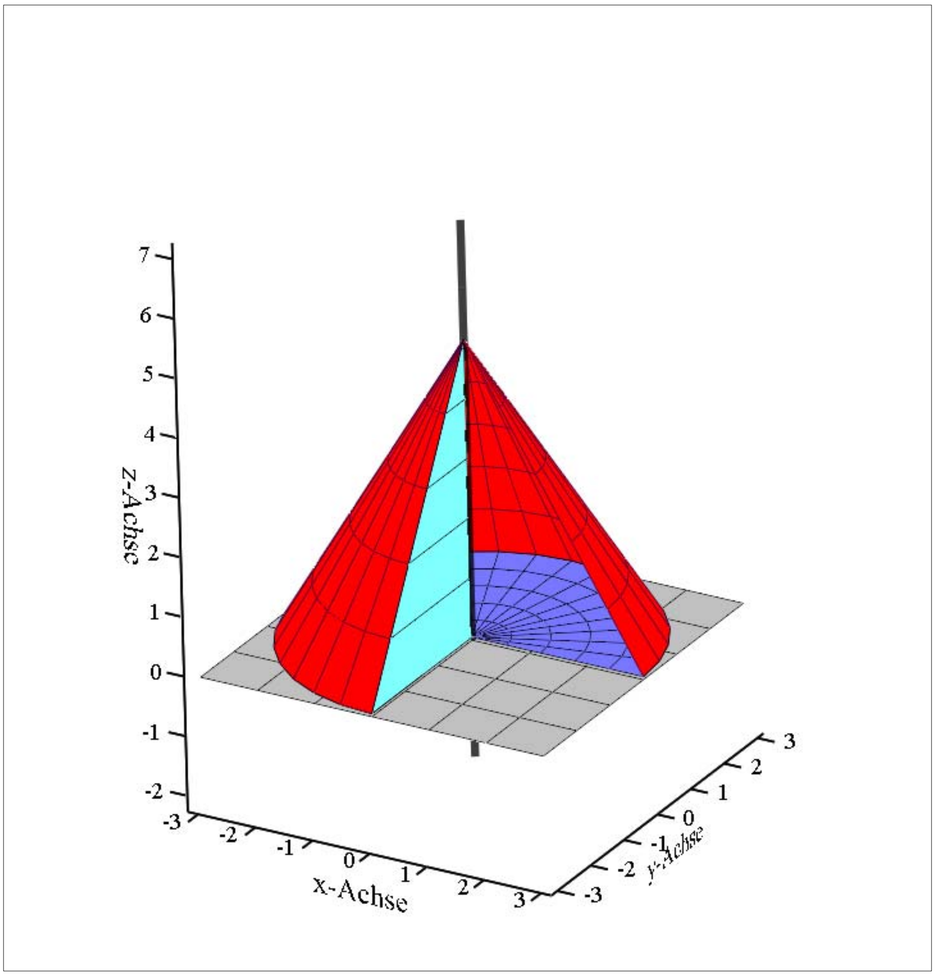
Volumen: $V = \frac{1}{3} \cdot R_K^2 \cdot \pi \cdot H_K$

Mantelfläche: $M = R_K \cdot \pi \cdot S_K$

Oberfläche: $O = R_K \cdot \pi \cdot S_K + R_K^2 \cdot \pi = R_K \cdot \pi \cdot (S_K + R_K)$

Zentrumswinkel: $\alpha_K = 360 \cdot ° \cdot \frac{R_K}{S_K}$

Rotationswinkel α in Grad: 0 .... 360° 



Rotationswinkel:

α = **270** °

Aufgabe 2

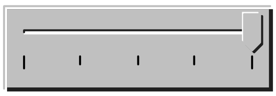
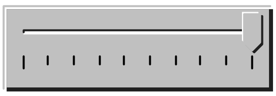
Ein geraden Kreiskegel hat einen Grundkreisradius R_K und eine Höhe H_K.

a) Berechnen Sie Volumen, Mantelfläche, Oberfläche und Zentrumswinkel des Kegels für die mit dem Schieberegler gewählten Werte.

b) Stellen Sie die Oberfläche des Kegels in einem kartesischen Koordinatensystem dar.

Teilaufgabe a)

R_K einstellen: H_K einstellen:

Gegeben:  $\mathbf{R_K = 5\ cm}$  $\mathbf{H_K = 10\ cm}$

Volumen: $V_k := \frac{1}{3} \cdot R_K^{\ 2} \cdot \pi \cdot H_K$ $\qquad V_k = 261.8 \cdot cm^3$

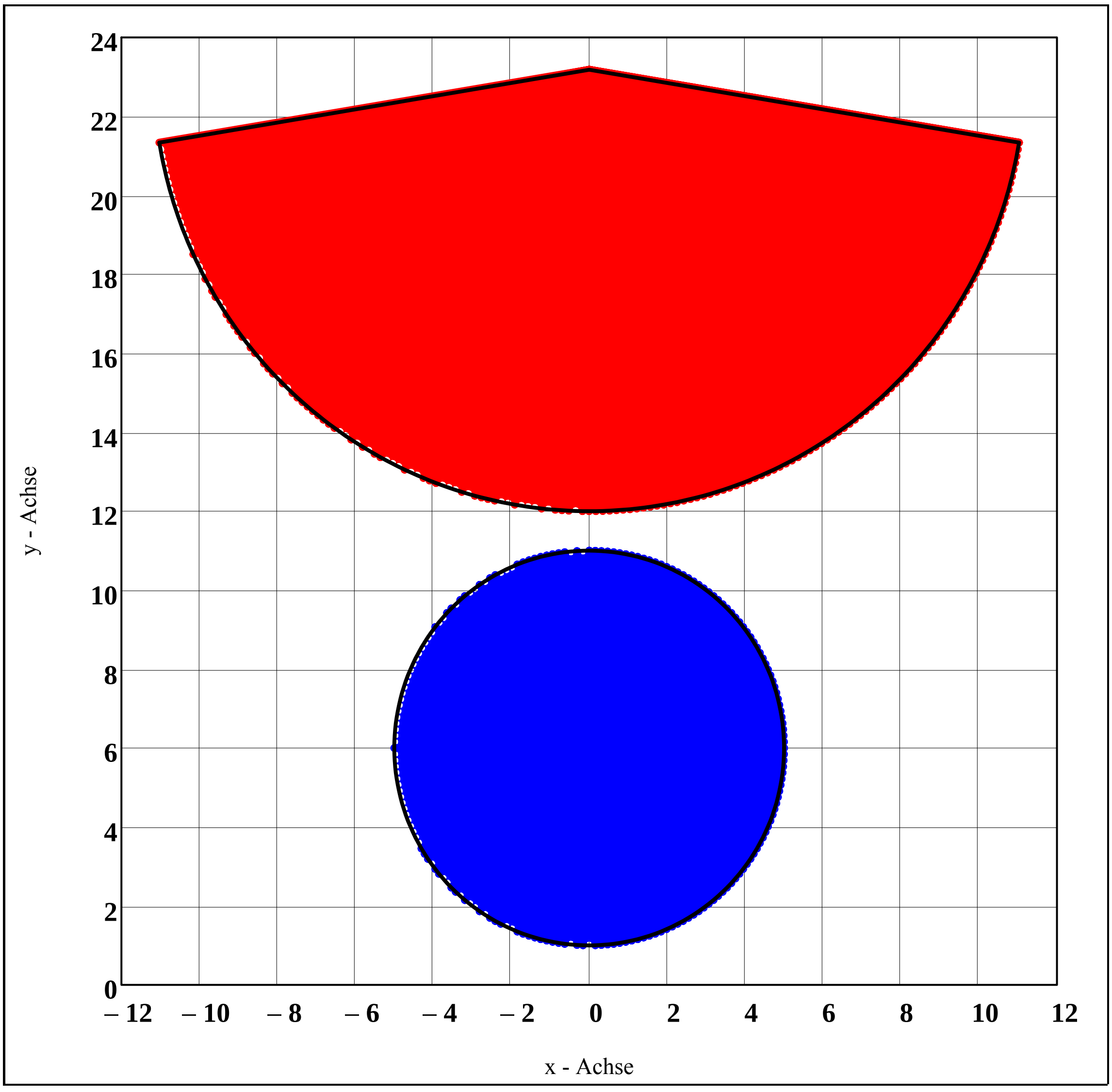
Seitenlinie: $S_K := \sqrt{H_K^{\ 2} + R_K^{\ 2}}$ $\qquad S_K = 11.2 \cdot cm$

Mantelfläche: $M_K := R_K \cdot \pi \cdot S_K$ $\qquad M_K = 175.6 \cdot cm^2$

Oberfläche: $O_K := R_K \cdot \pi \cdot (S_K + R_K)$ $\qquad O_K = 254.2 \cdot cm^2$

Zentrumswinkel: $\alpha_K := 360 \cdot ° \cdot \frac{R_K}{S_K}$ $\qquad \alpha_K = 161.0 \cdot °$

Teilaufgabe b)



Aufgabe 3

Ein geraden Kreiskegel hat einen Grundkreisradius von **8 cm** und ein Volumen von $\mathbf{V_K = 1000\ cm^3}$. Welchen Zentrumswinkel hat der abgerollte Mantel?

Gegeben: $R_K := 8 \cdot cm$ $\quad V_K := 1000\ cm^3$

Volumen: $V_k = \frac{1}{3} \cdot R_K^{\,2} \cdot \pi \cdot H_K$

Höhe: $H_K := \dfrac{3 \cdot V_K}{R_K^{\,2} \cdot \pi}$ $\quad H_K = 14.9 \cdot cm$

Seitenlinie: $S_K := \sqrt{H_K^{\,2} + R_K^{\,2}}$ $\quad S_K = 16.9 \cdot cm$

Zentrumswinkel: $\alpha_K := 360\ ° \cdot \dfrac{R_K}{S_K}$ $\quad \alpha_K = 170.1 \cdot °$

Aufgabe 4

Ein geraden Kreiskegel hat eine Oberfläche von $\mathbf{O_K = 250\ cm^2}$ und eine Mantelfläche von $\mathbf{M_K = 180\ cm^2}$. Berechnen Sie das Volumen des Kegels.

Gegeben: $O_K := 250 \cdot cm^2$ $\quad M_K := 180 \cdot cm^2$

Bodenfläche: $B_K = O_K - M_K$ $\quad B_K = R_K^{\,2} \cdot \pi$

Grundkreisradius: $R_K := \sqrt{\dfrac{O_K - M_K}{\pi}}$ $\quad R_K = 4.7 \cdot cm$

Mantelfläche: $M = R_K \cdot \pi \cdot S_K$

Seitenlinie: $S_K := \dfrac{M_K}{R_K \cdot \pi}$ $\quad S_K = 12.1 \cdot cm$

Seitenlinie: $S_K = \sqrt{H_K^{\,2} + R_K^{\,2}}$

Höhe: $H_K := \sqrt{S_K^{\,2} - R_K^{\,2}}$ $\quad H_K = 11.2 \cdot cm$

Volumen: $V_K := \frac{1}{3} \cdot R_K^{\,2} \cdot \pi \cdot H_K$ $\quad V_K = 260.9 \cdot cm^3$

Funktionale Abhängigkeiten im Raum
- Zylinder und Kegel -

Aufgabe

Ein gerader Kreiskegel hat einen Grundkreisradius R = 4cm und eine Höhe von h_0 = 5 cm. Dem Kegel wird ein Zylinder mit dem Radius r so einbeschrieben, dass der Deckelrand des Zylinders immer die Mantellinie des Kegels berührt.

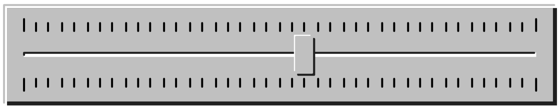
a) Zeichnen Sie den Kegel mit einbeschriebenem Zylinder.

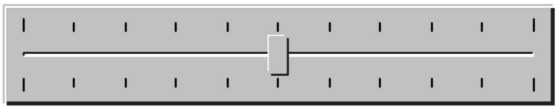
b) Berechnen Sie das Volumen V_Z , den Inhalt der Mantelfläche M_Z und den Inhalt der Oberfläche O_Z des Zylinders und stellen Sie die berechneten Größen in Abhängigkeit vom Zylinderradius graphisch dar.

Teilaufgabe a)

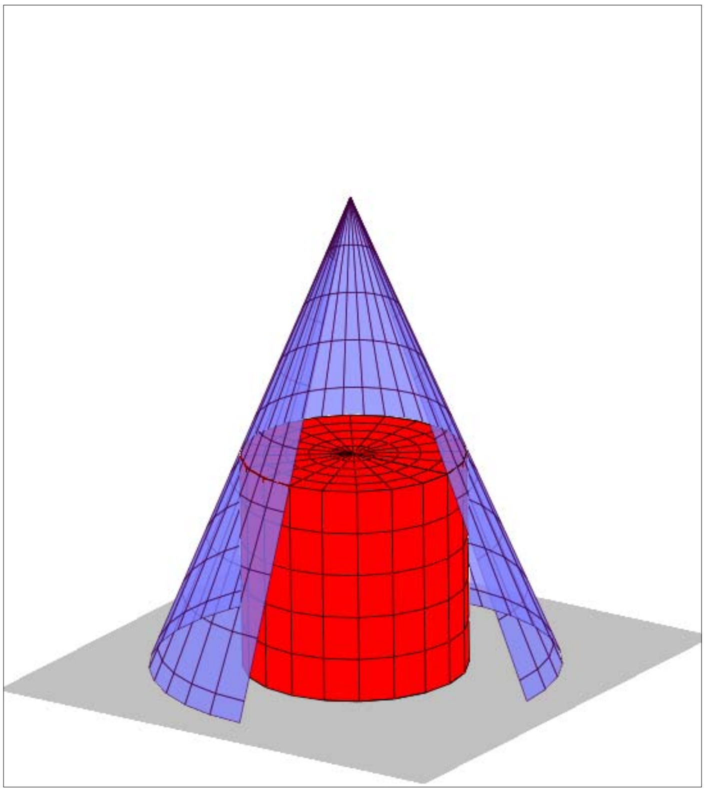
Gegebene Größen in cm: Kegelhöhe: $\mathbf{h_0 := 9.6}$ Grundkreisradius: $\mathbf{R := 4}$

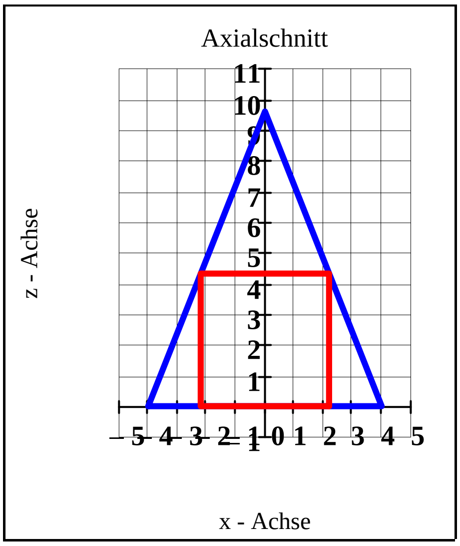
Veränderung Zylinderradius: r = 0 .... 4cm Veränderung Fenstergröße: Grad = 0° 18





Graphische Darstellung:





Zylinderradius: $R_Z = 2.2 \cdot cm$

Zylinderhöhe: $h_Z = 4.3 \cdot cm$

Zylindervolumen: $V_Z = 65.7 \cdot cm^3$

Zylindermantelfläche: $M_Z = 59.7 \cdot cm^2$

Zylinderoberfläche: $O_Z = 90.1 \cdot cm^2$

Teilaufgabe b)

Bezeichnungen:
h_0 = Kegelhöhe, R = Radius vom Grundkreis des Kegels, h = Zylinderhöhe,
r = Zylinderradius

Zylinderhöhe h:

$$\frac{h_0 - h}{r} = \frac{h_0}{R} \quad \Leftrightarrow \quad R \cdot (h_0 - h) = h_0 \cdot r \Leftrightarrow$$

$$R \cdot h_0 - R \cdot h = h_0 \cdot r \quad \Leftrightarrow \quad h = \frac{R \cdot h_0 - h_0 \cdot r}{R}$$

Zylindervolumen V_Z:

$$V_Z = r^2 \cdot \pi \cdot h \quad \Leftrightarrow \quad V_Z = r^2 \cdot \frac{R \cdot h_0 - h_0 \cdot r}{R}$$

$$\Leftrightarrow \quad V_Z(r) = r^2 \cdot \pi \cdot \frac{R \cdot h_0 - h_0 \cdot r}{R}$$

Zylindermantelfläche M_Z:

$$M_Z = 2 \cdot r \cdot \pi \cdot h \quad \Leftrightarrow \quad M_Z = 2 \cdot r \cdot \pi \cdot \frac{R \cdot h_0 - h_0 \cdot r}{R}$$

$$\Leftrightarrow \quad M_Z(r) = 2 \cdot r \cdot \pi \cdot \frac{R \cdot h_0 - h_0 \cdot r}{R}$$

Zylinderoberfläche O_Z:

$$M_Z = 2 \cdot r \cdot \pi \cdot h + 2 \cdot r^2 \cdot \pi \quad \Leftrightarrow \quad M_Z = 2 \cdot r \cdot \pi \cdot \frac{R \cdot h_0 - h_0 \cdot r}{R} + 2 \cdot r^2 \cdot \pi$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{O_Z(r) = 2 \cdot r \cdot \pi \cdot \frac{R \cdot h_0 - h_0 \cdot r}{R} + 2 \cdot r^2 \cdot \pi}$$

Graphische Darstellungen: