Die Kepler'schen Gesetze

Theorie: Das dritte Kepler'sche Gesetz
Die Quadrate der Umlaufszeiten zweier Planeten A und B verhalten sich wie die dritten Potenzen der großen Halbachsen

Aufgabe

Gegeben ist das ***dritte Keplersche Gesetz*** $\frac{T_A^{\,2}}{T_B^{\,2}} = \frac{a_A^{\,3}}{a_B^{\,3}}$ bzw. $\frac{T^2}{a^3} = C_S$,

wobei C_S die ***Keplerkonstante des Sonnensystems*** ist.

Gegeben sind die Messwerte für die Umlaufzeiten T und die Entfernungen a (Bahnradien der großen Halbachsen der Ellipsenumlaufbahnen um die Sonne) der Planeten **Merkur**, **Venus**, **Erde**, **Mars**, **Jupiter**, **Saturn**, **Uranus** und **Neptun**.

a) Bestätigen Sie das Gesetz mithilfe der Messwerte und bestimmen Sie die Kepler konstante.

b) Aus dem gegebenen Gesetz ergibt sich folgender funktionaler Zusammenhang:

$$T(a) = \sqrt{C_S\, a^3} = c \cdot a^{1.5} \quad \text{mit } c = \sqrt{C_S}.$$

Stellen Sie die Messwerte und den theoretischen Verlauf in einem linearen Koordinaten-system dar.

c) Stellen Sie die Messwerte und den theoretischen Verlauf in einem doppelt logarithmischen Koordinatensystem dar. Begründen Sie den linearen Verlauf.

d) Bestimmen Sie aus dem Verlauf des Graphen T(a) im doppelt logarithmischen Koordinaten-system die Konstanten c und C.
Bestätigen Sie auch den Zahlenwert **1.5** für den Exponenten.

Messwerte: Planet | r in km | T in Tagen

$MW :=$

"Merkur"	57910000	87.969
"Venus"	108200000	224.701
"Erde"	149600000	365.256
"Mars"	227940000	686.98
"Jupiter"	778330000	4332.71
"Saturn"	1426980000	10759.5
"Uranus"	2870990000	30685
"Neptun"	4497070000	60190

Zuweisen der Messwerte:

Bahnradius in m: $a_P := MW^{\langle 2\rangle} \cdot 10^3$

Umlaufszeit in s: $T_P := MW^{\langle 3\rangle} \cdot 86400$

Umrechnung Tag in Sekunde:

$24 \cdot 3600 = 86400$

Teilaufgabe a)

Keplerkonstante: $$c_S := \frac{T_P^{\,2}}{a_P^{\,3}} \qquad c_S = \begin{pmatrix} 29.746 \\ 29.755 \\ 29.746 \\ 29.748 \\ 29.72 \\ 29.741 \\ 29.702 \\ 29.736 \end{pmatrix} \cdot 10^{-20} \quad \text{in} \quad \frac{s^2}{m^3}$$

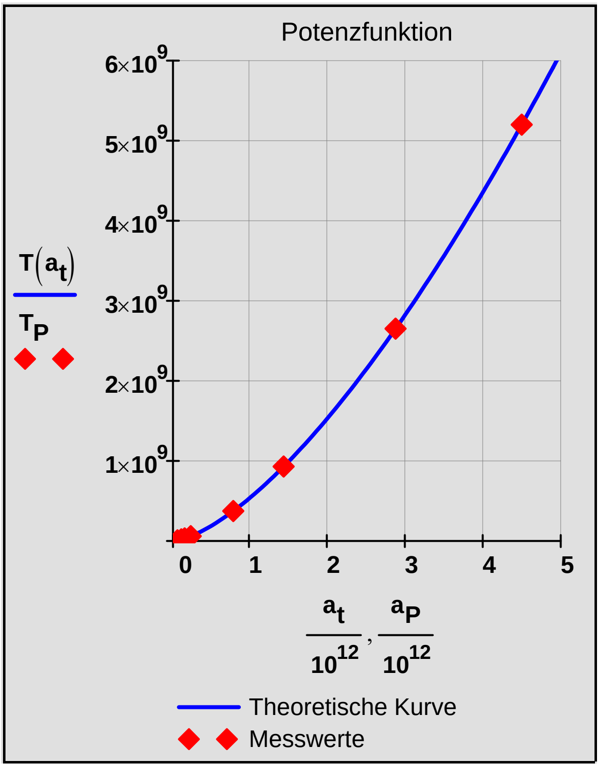
Mittelwert: $$c_{Sm} := \text{mittelwert}(c_S) \qquad c_{Sm} = 29.737 \cdot 10^{-20} \quad \text{in} \quad \frac{s^2}{m^3}$$

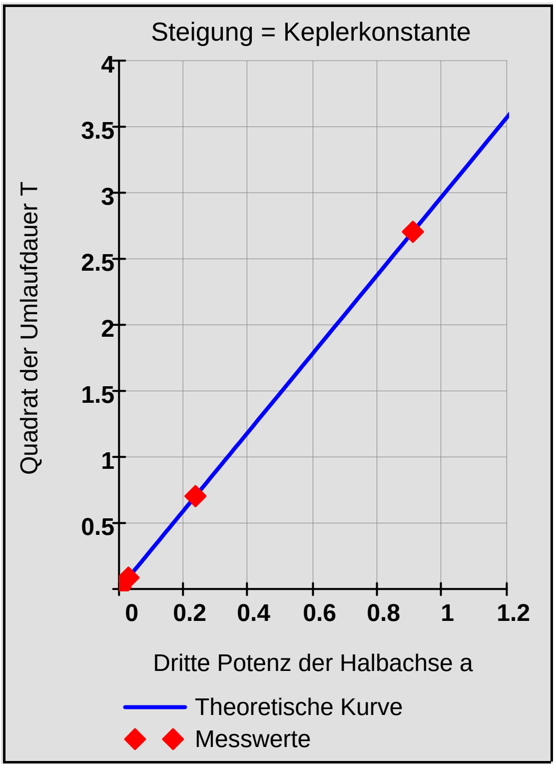
Teilaufgabe b)

Theoretische Potenzfunktion: $$T(a) := \sqrt{c_{Sm}} \cdot a^{1.5}$$

Definitionsmenge: $$a_t := 5 \cdot 10^{10}, 1 \cdot 10^{11} .. 5 \cdot 10^{12}$$

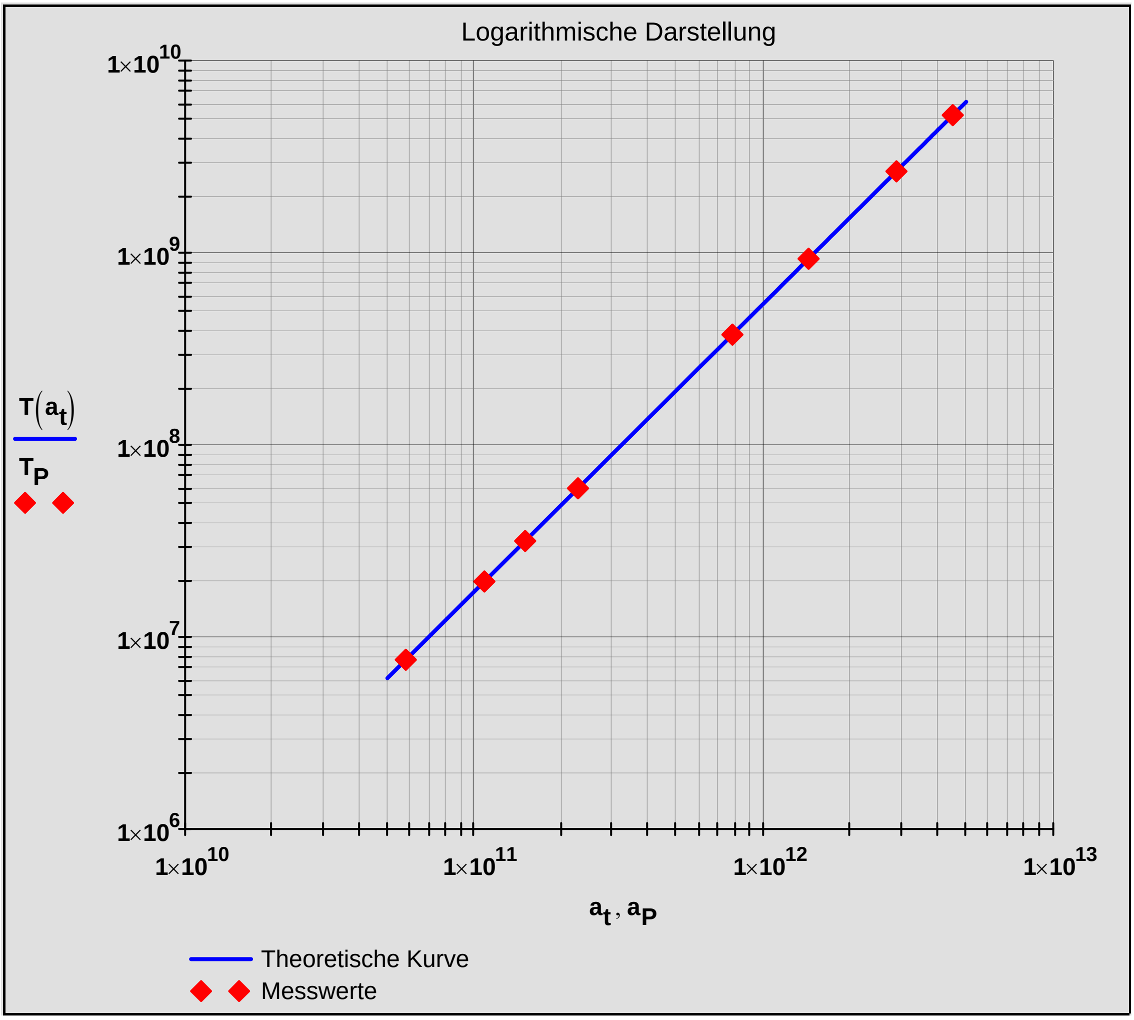
Graphische Darstellung:





Teilaufgabe c)

Graphische Darstellung:



Begründung für den linearen Verlauf:

Funktionsterm: $T = c \cdot a^k$

Logarithmieren: $\ln(T) = \ln\left(c \cdot a^k\right)$

Argument aufspalten: $\ln(T) = \ln(c) + \ln\left(a^k\right)$

$\ln(T) = \ln(c) + k \cdot \ln(a)$

Substitution: $\ln(T) = y$ $\quad \ln(a) = x$

Geradengleichung: $y = \ln(c) + k \cdot x$

Teilaufgabe d)

Auswertung:

Steigung der Geraden: $k := \text{neigung}\left(\ln\left(a_P\right), \ln\left(T_P\right)\right)$ $k = 1.5$

Achsenabschnitt: $d := \text{achsenabschn}\left(\ln\left(a_P\right), \ln\left(T_P\right)\right)$ $d = -21.326$

Konstante: $d = \ln(c)$ $c := e^d$ $c = 5.471 \times 10^{-10}$

Keplerkonstante: $C_S := c^2$

$C_S = 29.931 \cdot 10^{-20}$ in $\frac{s^2}{m^3}$