Von der Sekante zur Tangente

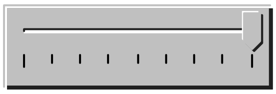
Beispiel

Das im Diagramm dargestellte t-y-Diagramm zeigt modellhaft die Bewegung eines Körpers.
Gesucht ist die ***Momentangeschwindigkeit*** in einem Intervall $[t_1 \,;\, t_2]$.

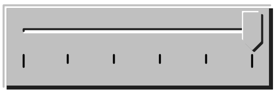
Mit dem Schieberegler können verschiedene Intervalle gewählt werden. Die jeweils sich ergebende ***Durchschnittsgeschwindigkeit*** wird automatisch berechnet und kann abgelesen werden.

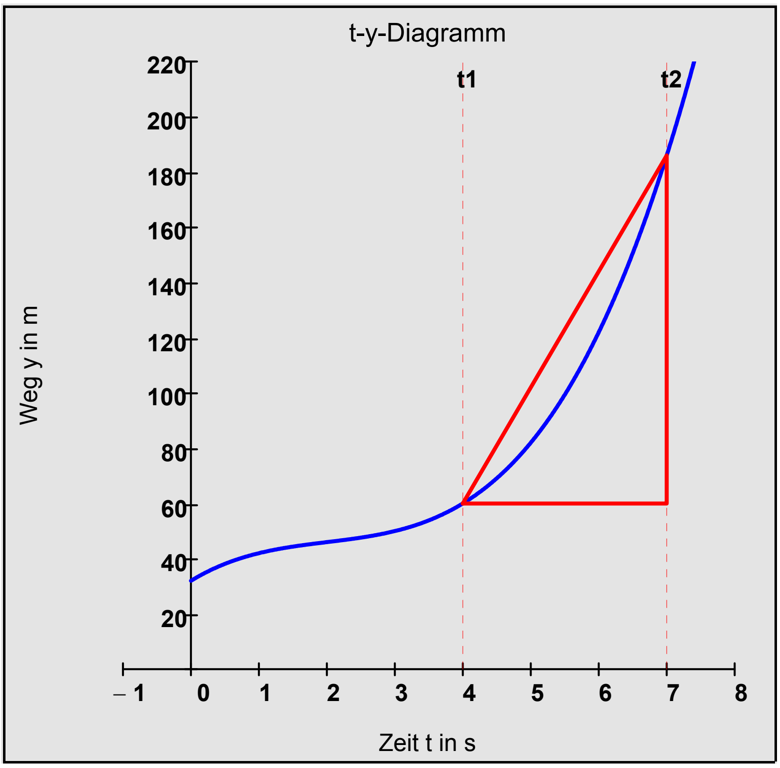
Das Ziel ist die Angabe der Momentangeschwindigkeit.
Mathematisch formuliert ist das die ***Änderungsrate***, also die ***Änderung des Funktionswerts***, wenn sich das Argument um **Δx** ändert.

Wählen Sie den Zeitpunkt t_1:



Wählen Sie den Zeitpunkt t_2:





Zeitpunkte und Funktionswerte:

$t_1 = 4\,s$ $\quad y(t_1) = 60\,m$

$t_2 = 7\,s$ $\quad y(t_2) = 186\,m$

$\Delta t = 3\,s$ $\quad \Delta y = 126\,m$

Brechnete mittlere Geschwindigkeit:

$$v_m = \frac{\Delta y}{\Delta t}$$

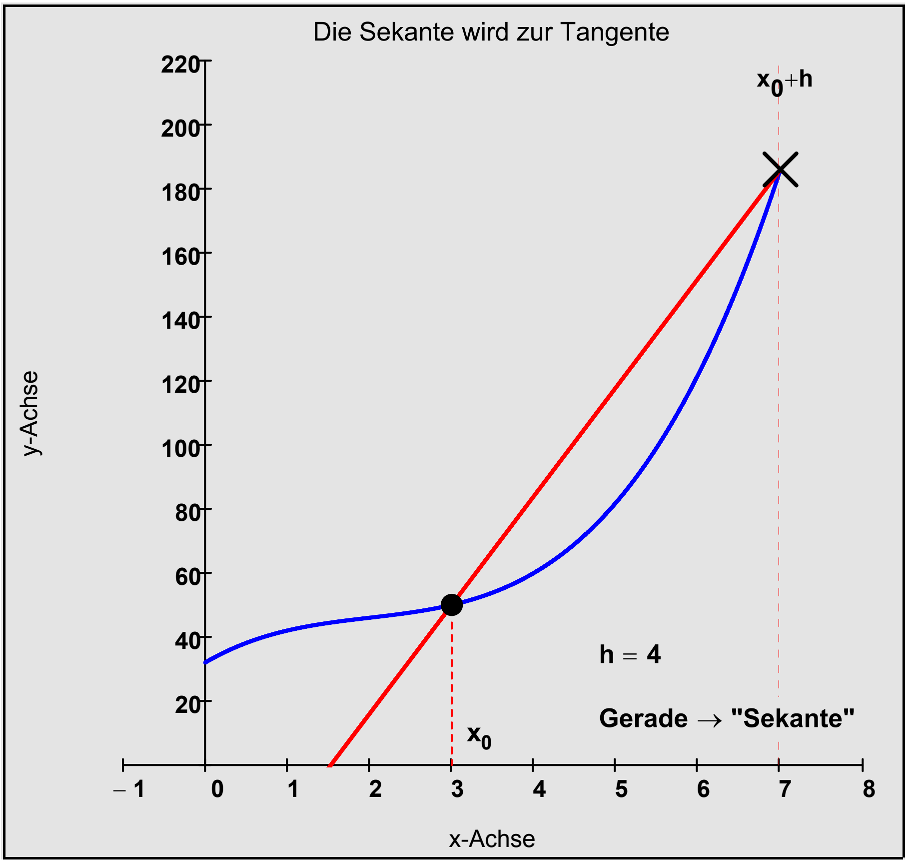
$$v_m = 42\,\frac{m}{s}$$

Für die Berechnung der Momentangeschwindigkeit, die so genannte ***lokale Änderungsrate*** an der Stelle t_0, wird das Intervall Δt immer kleiner gemacht.

Aufgabe

Gegeben ist eine Funktion f mit $f(x) := x^3 - 6 \cdot x^2 + 15 \cdot x + 32$ und $x \in IR$.
Mit dem Schieberegler wird die Veränderung der Sekante untersucht.

Wahl des oberen Sekantenpunktes:



Linker Punkt:

$x_0 = 3$

Rechter Punkt:

$x_0 + h = 7$

Steigung:

$m = 34$

Die Untersuchung zeigt:

Die ***Intervallsekante*** geht in die ***Tangente,*** die ***Steigung der Sekante*** geht in die ***Steigung der Tangente*** über.

Theorie

Steigung der Sekante: $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$

Weiter gilt: $y_0 = f(x_0)$ $\quad$ $y_1 = f(x_1)$

Einsetzen: $m = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$

Wählen Sie $x_1 = x_0 + h$ beliebig.

Bezeichnung: ***Differenzenquotient an der Stelle*** x_0

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Bemerkung:
Für $h \rightarrow 0$ entspricht die mittlere Änderungsrate der lokalen Änderungsrate an der Stelle x_0.
Allerdings ist dann die Berechnung des Differenzenquotienten nicht mehr möglich.

Bezeichnung: ***Differentialquotient an der Stelle*** x_0

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{f(x_1) - f(x_0)}{\Delta x} \right) = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \right) = f'(x_0)$$

$f'(x_0)$ heißt ***Ableitung der Funktion f an der Stelle*** x_0.

Bemerkung:
Bei freier Wahl der Stelle x_0 ergibt sich:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(x + h) - f(x)}{h} \right) = \frac{d}{dx} f(x) = f'(x)$$

Bezeichnung: ***Differentialquotient an beliebiger Stelle x.***

Dabei heißt $\frac{d}{dx}$ ***Differentialoperator*** und $\frac{d}{dx} f(x) = f'(x)$ ***Ableitungsfunktion***.