

Binomialkoeffizienten, Pascal'sches Dreieck und Binomischer Lehrsatz



Theorie 1: Die Fakultät

Das Produkt $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (n-2) \cdot (n-1) \cdot n$ wird folgendermaßen abgekürzt:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (n-2) \cdot (n-1) \cdot n \text{ mit } n \in \mathbb{N}.$$

(Sprich **n-Fakultät**)

Festlegung: $0! = 1$; $1! = 1$;

Anwendung:

Die Anzahl der verschiedenen Anordnungen aller Elemente einer Menge in einer bestimmten Reihenfolge wird als **Permutation** bezeichnet.

Beispiel: $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$, also **(123)**, **(132)**, **(231)**, **(213)**, **(312)**, **(321)**

Theorie 2: Binomialkoeffizienten

Das Symbol $\binom{n}{k}$ (sprich **n über k**) heißt **Binomialkoeffizient**

und entspricht den $\begin{pmatrix} \text{Zeilen} \\ \text{Spalten} \end{pmatrix}$.

Beachten Sie, dass die Zählung mit der 0-ten Zeile bzw. 0-ten Spalte beginnt.

$$\binom{0}{0} = 1$$

$$\binom{1}{0} = 1$$

$$\binom{1}{1} = 1$$

$$\binom{2}{0} = 1$$

$$\binom{2}{1} = 2$$

$$\binom{2}{2} = 1$$

$$\binom{3}{0} = 1$$

$$\binom{3}{1} = 3$$

$$\binom{3}{2} = 3$$

$$\binom{3}{3} = 1$$

$$\binom{4}{0} = 1$$

$$\binom{4}{1} = 4$$

$$\binom{4}{2} = 6$$

$$\binom{4}{3} = 4$$

$$\binom{4}{4} = 1$$

$$\binom{5}{0} = 1$$

$$\binom{5}{1} = 5$$

$$\binom{5}{2} = 10$$

$$\binom{5}{3} = 10$$

$$\binom{5}{4} = 5$$

$$\binom{5}{5} = 1$$

Theorie 3: Berechnung der Binomialkoeffizienten

$$\binom{n}{k} = \frac{k \text{ Faktoren von } n \text{ abwärts}}{k \text{ Faktoren von } 1 \text{ aufwärts}} \quad \text{Beispiel: } \binom{7}{3} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot [n - (k-1)]}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot k}$$

Verwendet man das Fakultätszeichen, so gilt:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

Festlegung: $\binom{0}{0} = 1$; $\binom{n}{0} = 1$;

Graphische Darstellung von Zeichen (mit freundlicher Genehmigung von Byrge Birkeland)

 Fonts gesperrt

Abrufen der Binomialkoeffizienten bis zum Grade: **N1 := 8**

 Programmierung

Ausgabe als Matrix

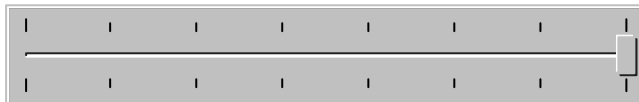
$$\text{Pasc}(N1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & 0 & 6 & 0 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 5 & 0 & 10 & 0 & 10 & 0 & 5 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 6 & 0 & 15 & 0 & 20 & 0 & 15 & 0 & 6 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 7 & 0 & 21 & 0 & 35 & 0 & 35 & 0 & 21 & 0 & 7 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 8 & 0 & 28 & 0 & 56 & 0 & 70 & 0 & 56 & 0 & 28 & 0 & 8 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Theorie 4: Binomischer Satz und Pascal'sches Dreieck

$$(a + b)^n = \binom{n}{0} \cdot a^n + \binom{n}{1} \cdot a^{n-1} \cdot b + \binom{n}{2} \cdot a^{n-2} \cdot b^2 + \dots + \binom{n}{n-1} \cdot a \cdot b^{n-1} + \binom{n}{n} \cdot b^n$$

für alle $n \in \mathbb{N}$.

Binomialkoeffizienten bis zum Grade n:



$n = 7$

 Programmierung

$$(a + b)^n = a^7 + 7 \cdot a^6 \cdot b + 21 \cdot a^5 \cdot b^2 + 35 \cdot a^4 \cdot b^3 + 35 \cdot a^3 \cdot b^4 + 21 \cdot a^2 \cdot b^5 + 7 \cdot a \cdot b^6 + b^7$$

Pascalsches Dreieck

																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																	</
--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	----