Die Formel von Cardano - Beispiele mit graphischer Lösung

made with mathcad

Theorie 3: Graphische Veranschaulichung der Fallunterscheidung

Gegeben ist eine kubische Gleichung in reduzierter Form: $x^3 + p \cdot x + q = 0$

mit $p, q \neq 0 \wedge p, q \in IR$.

Definieren Sie einen Funktionsterm, bestimmen Sie die Monotonieeigenschaften sowie die Lage der Extrempunkte.

Definition eines Funktionsterms: $f(x) = x^3 + p \cdot x + q$

1. Ableitung: $f'(x) = 3 \cdot x^2 + p$

Horizontale Tangenten: $f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3 \cdot x^2 + p = 0$

Lösungen und Funktionswerte:

$x_1 = -\sqrt{-\frac{p}{3}}$; $\qquad f(x_1) = q - \frac{2}{3} \cdot p \cdot \sqrt{-\frac{p}{3}}$

$x_2 = \sqrt{-\frac{p}{3}}$; $\qquad f(x_2) = q + \frac{2}{3} \cdot p \cdot \sqrt{-\frac{p}{3}}$

Fall 1: Für p > 0 gilt

Die Funktion f hat keine Extrema und nur eine reelle Nullstelle.

Fall 2: Für p < 0 gilt

Die Funktion f hat ein Maximum und ein Minimum.

$x_1 = -\sqrt{-\frac{p}{3}} \qquad f(x_1) = q - \frac{2}{3} \cdot p \cdot \sqrt{-\frac{p}{3}}$ Maximum

$x_2 = \sqrt{-\frac{p}{3}} \qquad f(x_2) = q + \frac{2}{3} \cdot p \cdot \sqrt{-\frac{p}{3}}$ Minimum

Je nach der Lage der Extrema können eine, zwei oder drei reelle Wurzeln auftreten.

Fall 2 a: Eine reelle Wurzel
Wenn beide Werte der Extrema positiv bzw. negativ sind, hat die gegebene Gleichung nur eine reelle Wurzel.

Bedingung:

$$f(x_1) \cdot f(x_2) > 0$$

$$\left(q - \frac{2}{3} \cdot p \cdot \sqrt{-\frac{p}{3}}\right) \cdot \left(q + \frac{2}{3} \cdot p \cdot \sqrt{-\frac{p}{3}}\right) > 0 \text{ vereinfachen } \rightarrow \frac{4 \cdot p^3}{27} + q^2 > 0$$

Fall 2 b: Drei reelle Wurzeln
Wenn die Werte des Maximums und des Minimums ungleiche Vorzeichen besitzen, hat die gegebene Gleichung drei reelle Lösungen.

Bedingung:

$$f(x_1) \cdot f(x_2) < 0$$

$$\left(q - \frac{2}{3} \cdot p \cdot \sqrt{-\frac{p}{3}}\right) \cdot \left(q + \frac{2}{3} \cdot p \cdot \sqrt{-\frac{p}{3}}\right) < 0 \text{ vereinfachen } \rightarrow \frac{4 \cdot p^3}{27} + q^2 < 0$$

Fall 2 c: Zwei reelle Wurzeln
Wenn nur einer der Werte des Maximums oder des Minimums Null ist, hat die gegebene Gleichung zwei reelle Lösungen.

Bedingung:

$$f(x_1) \cdot f(x_2) = 0$$

$$\left(q - \frac{2}{3} \cdot p \cdot \sqrt{-\frac{p}{3}}\right) \cdot \left(q + \frac{2}{3} \cdot p \cdot \sqrt{-\frac{p}{3}}\right) = 0 \text{ vereinfachen } \rightarrow \frac{4 \cdot p^3}{27} + q^2 = 0$$

Fall 3: Sonderfälle

$p \neq 0 \wedge q = 0$	$\Rightarrow$	$f(x) = x^3 + p \cdot x$	$p > 0$	genau eine Nullstelle
			$p < 0$	genau drei Nullstellen
$p = 0 \wedge q \neq 0$	$\Rightarrow$	$f(x) = x^3 + q$	genau eine einfache Nullstelle	
$p = 0 \wedge q = 0$	$\Rightarrow$	$f(x) = x^3$	genau eine dreifache Nullstelle	

Aufgabe 1

Gegeben ist eine kubische Gleichung $y^3 + b \cdot y^2 + c \cdot y + d = 0$
mit $b := 0$, $c := 2$ und $d := -2$.

a) Bringen Sie die Gleichung in die reduzierte Form $x^3 + p \cdot x + q = 0$.

b) Untersuchen Sie die Funktion $f(x) = x^3 + p \cdot x + q$ auf Extrema und geben Sie die Anzahl der Nullstellen an.

c) Bestimmen Sie die Nullstellen mit der Lösungsformel von Cardano und zeichnen Sie mithilfe der bisherigen Ergebnisse den Graphen der Funktion f.

Gegeben: $b = 0$ $c = 2$ $d = -2$

Gleichung: $y^3 + b \cdot y^2 + c \cdot y + d = 0 \rightarrow y^3 + 2 \cdot y - 2 = 0$

Teilaufgabe a)

Koeffizienten: $p := -\frac{b^2}{3} + c$ $p = 2$ $q := \frac{2 \cdot b^3}{27} - \frac{c \cdot b}{3} + d$ $q = -2$

Reduzierte Form: $x^3 + p \cdot x + q = 0 \rightarrow x^3 + 2 \cdot x - 2 = 0$

Teilaufgabe b)

Funktionsterm: $f(x) := x^3 + p \cdot x + q$ $f(x) = x^3 + 2 \cdot x - 2$

Ableitung: $f'(x) := \frac{d}{dx} f(x)$ $f'(x) = 3 \cdot x^2 + 2$

▶ Existenz der Extrema

Extrema: $f'(x) = 0 \rightarrow 3 \cdot x^2 + 2 = 0 \text{ auflösen}, x \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{6} \cdot i}{3} \\ -\frac{\sqrt{6} \cdot i}{3} \end{pmatrix}$

Folgerung: **Extrema → "keine"**

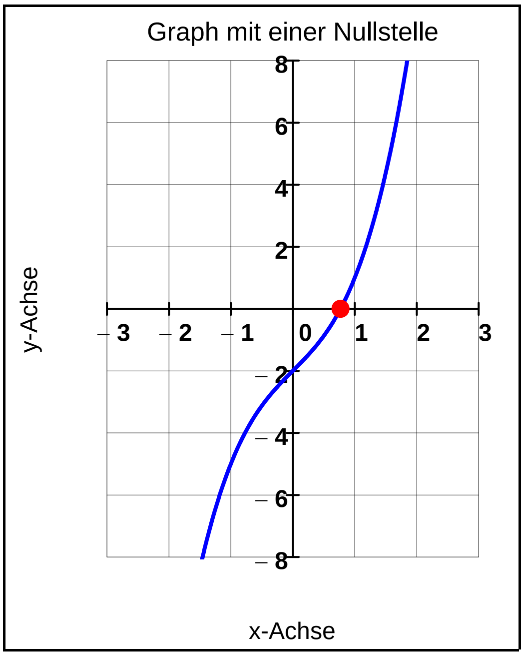
▶ Anzahl der Nullstellen

Nullstellen → "eine einfache"

Teilaufgabe c)

Diskriminante nach Cardano: $D := \left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2$ $\quad D = 1.296$

Lösungsformel für die Nullstelle: $x_1 := \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{D}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{D}}$ $\quad x_1 = 0.771$



Mathcad-Lösung:

$$x_{NS} := f(x) = 0 \rightarrow x^3 + 2\cdot x - 2 = 0 \rightarrow \frac{\left(\frac{\sqrt{105}}{9} + 1\right)^{\frac{2}{3}} - \frac{2}{3}}{\left(\frac{\sqrt{105}}{9} + 1\right)^{\frac{1}{3}}} \qquad x_{NS} = 0.771$$

Aufgabe 2

Gegeben ist eine kubische Gleichung $y^3 + b \cdot y^2 + c \cdot y + d = 0$
mit $b := -3$, $c := 1$ und $d := -2$.

a) Bringen Sie die Gleichung in die reduzierte Form $x^3 + p \cdot x + q = 0$.

b) Untersuchen Sie die Funktion $f(x) = x^3 + p \cdot x + q$ auf Extrema und geben Sie die Anzahl der Nullstellen an.

c) Bestimmen Sie die Nullstellen mit der Lösungsformel von Cardano und zeichnen Sie mithilfe der bisherigen Ergebnisse den Graphen der Funktion f.

Gegeben: $b = -3$ $c = 1$ $d = -2$

Gleichung: $y^3 + b \cdot y^2 + c \cdot y + d = 0 \rightarrow y^3 - 3 \cdot y^2 + y - 2 = 0$

Teilaufgabe a)

Koeffizienten: $p := -\frac{b^2}{3} + c$ $p = -2$ $q := \frac{2 \cdot b^3}{27} - \frac{c \cdot b}{3} + d$ $q = -3$

Reduzierte Form: $x^3 + p \cdot x + q = 0 \rightarrow x^3 - 2 \cdot x - 3 = 0$

Teilaufgabe b)

Funktionsterm: $f(x) := x^3 + p \cdot x + q$ $f(x) = x^3 - 2 \cdot x - 3$

Ableitung: $f'(x) := \frac{d}{dx} f(x)$ $f'(x) = 3 \cdot x^2 - 2$

Existenz der Extrema

Extrema: $x_E := f'(x) = 0 \rightarrow 3 \cdot x^2 - 2 = 0 \text{ auflösen}, x \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{6}}{3} \\ -\frac{\sqrt{6}}{3} \end{pmatrix}$

Folgerung: **Extrema → "zwei ohne Vorzeichenwechsel bei den Funktionswerten"**

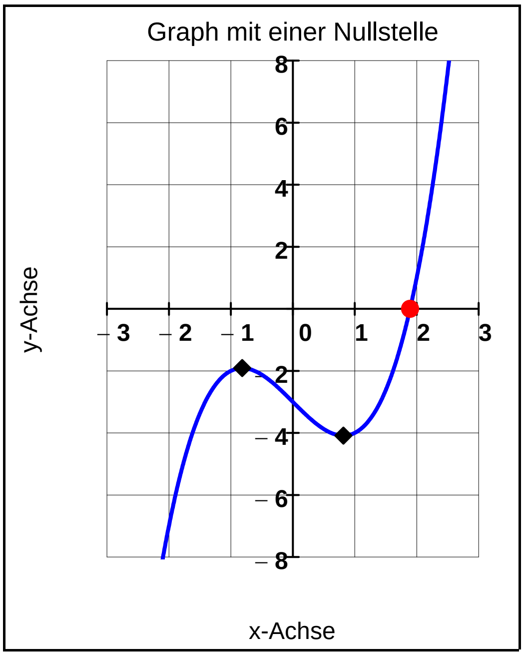
Anzahl der Nullstellen

Nullstellen → "eine einfache"

Teilaufgabe c)

Diskriminante nach Cardano: $D := \left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2$ $\qquad D = 1.954$

Lösungsformel für die Nullstelle: $x_1 := \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{D}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{D}}$ $\qquad x_1 = 1.893$



Nullstelle:

$x_1 = 1.893$

Hochpunkt:

$x_H = -0.816$ $\qquad y_H = -1.911$

Tiefpunkt:

$x_T = 0.816$ $\qquad y_T = -4.089$

<u>Mathcad-Lösung:</u>

$$x_{NS} := f(x) = 0 \rightarrow x^3 - 2\cdot x - 3 = 0 \rightarrow \frac{\left(\frac{\sqrt{633}}{6} + \frac{227}{54}\right)^{\frac{1}{3}} + \frac{2}{3}}{\left(\frac{\sqrt{633}}{18} + \frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{3}}}$$

$x_{NS} = 1.893$

Aufgabe 3

Gegeben ist eine kubische Gleichung $y^3 + b \cdot y^2 + c \cdot y + d = 0$ mit $b := 3$, $c := -1$ und $d := -1$.

a) Bringen Sie die Gleichung in die reduzierte Form $x^3 + p \cdot x + q = 0$.

b) Untersuchen Sie die Funktion $f(x) = x^3 + p \cdot x + q$ auf Extrema und geben Sie die Anzahl der Nullstellen an.

c) Bestimmen Sie die Nullstellen mit der Lösungsformel von Cardano und zeichnen Sie mithilfe der bisherigen Ergebnisse den Graphen der Funktion f.

Gegeben: $b = 3$ $c = -1$ $d = -1$

Gleichung: $y^3 + b \cdot y^2 + c \cdot y + d = 0 \rightarrow y^3 + 3 \cdot y^2 - y - 1 = 0$

Teilaufgabe a)

Koeffizienten: $p := -\frac{b^2}{3} + c$ $p = -4$ $q := \frac{2 \cdot b^3}{27} - \frac{c \cdot b}{3} + d$ $q = 2$

Reduzierte Form: $x^3 + p \cdot x + q = 0 \rightarrow x^3 - 4 \cdot x + 2 = 0$

Teilaufgabe b)

Funktionsterm: $f(x) := x^3 + p \cdot x + q$ $f(x) = x^3 - 4 \cdot x + 2$

Ableitung: $f'(x) := \frac{d}{dx} f(x)$ $f'(x) = 3 \cdot x^2 - 4$

Existenz der Extrema

Extrema: $x_E := f'(x) = 0 \rightarrow 3 \cdot x^2 - 4 = 0 \text{ auflösen}, x \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{2 \cdot \sqrt{3}}{3} \\ -\frac{2 \cdot \sqrt{3}}{3} \end{pmatrix}$

Folgerung: **Extrema → "zwei mit Vorzeichenwechsel bei den Funktionswerten"**

Anzahl der Nullstellen

Nullstellen → "drei einfache"

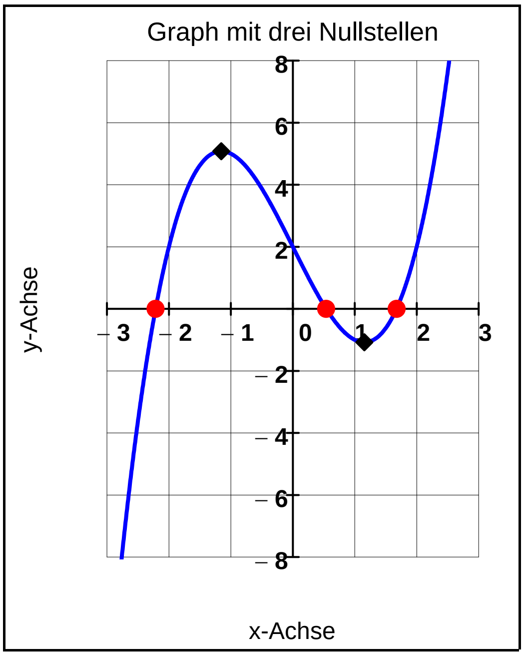
Teilaufgabe c)

Diskriminante nach Cardano: $D := \left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2$ $D = -1.37$

Lösungsformel für die Nullstelle: $x_1 := \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{D}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{D}}$ $x_1 = 1.675$

$$x_2 := \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}\cdot i}{2}\right)\cdot\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{D}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{D}}\cdot\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}\cdot i}{2}\right)$$ $x_2 = -2.214$

$$x_3 := \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}\cdot i}{2}\right)\cdot\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{D}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{D}}\cdot\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}\cdot i}{2}\right)$$ $x_3 = 0.539$



Nullstellen:

$x_1 = 1.675$

$x_2 = -2.214$

$x_3 = 0.539$

Hochpunkt:

$x_H = -1.155$ $y_H = 5.079$

Tiefpunkt:

$x_T = 1.155$ $y_T = -1.079$

Mathcad-Lösung:

Berechnung der Nullstellen

$$x_{NS} = \begin{pmatrix} 1.675 \\ 0.539 \\ -2.214 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4

Gegeben ist eine kubische Gleichung $y^3 + b \cdot y^2 + c \cdot y + d = 0$ mit $b := 2$, $c := 0$ und $d := 0$.

a) Bringen Sie die Gleichung in die reduzierte Form $x^3 + p \cdot x + q = 0$.

b) Untersuchen Sie die Funktion $f(x) = x^3 + p \cdot x + q$ auf Extrema und geben Sie die Anzahl der Nullstellen an.

c) Bestimmen Sie die Nullstellen mit der Lösungsformel von Cardano und zeichnen Sie mithilfe der bisherigen Ergebnisse den Graphen der Funktion f.

Gegeben: $b = 2$ $\quad c = 0$ $\quad d = 0$

Gleichung: $y^3 + b \cdot y^2 + c \cdot y + d = 0 \rightarrow y^3 + 2 \cdot y^2 = 0$

Teilaufgabe a)

Koeffizienten: $p := -\frac{b^2}{3} + c$ $\quad p = -\frac{4}{3}$ $\quad q := \frac{2 \cdot b^3}{27} - \frac{c \cdot b}{3} + d$ $\quad q = \frac{16}{27}$

Reduzierte Form: $x^3 + p \cdot x + q = 0 \rightarrow x^3 - \frac{4 \cdot x}{3} + \frac{16}{27} = 0$

Teilaufgabe b)

Funktionsterm: $f(x) := x^3 + p \cdot x + q$ $\quad f(x) = x^3 - \frac{4 \cdot x}{3} + \frac{16}{27}$

Ableitung: $f'(x) := \frac{d}{dx} f(x)$ $\quad f'(x) = 3 \cdot x^2 - \frac{4}{3}$

Existenz der Extrema

Extrema: $x_E := f'(x) = 0 \rightarrow 3 \cdot x^2 - \frac{4}{3} = 0$ auflösen, $x \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$

Folgerung: **Extrema → "zwei, wobei eines Nullstelle ist"**

Anzahl der Nullstellen

Nullstellen → "eine einfache und eine zweifache"

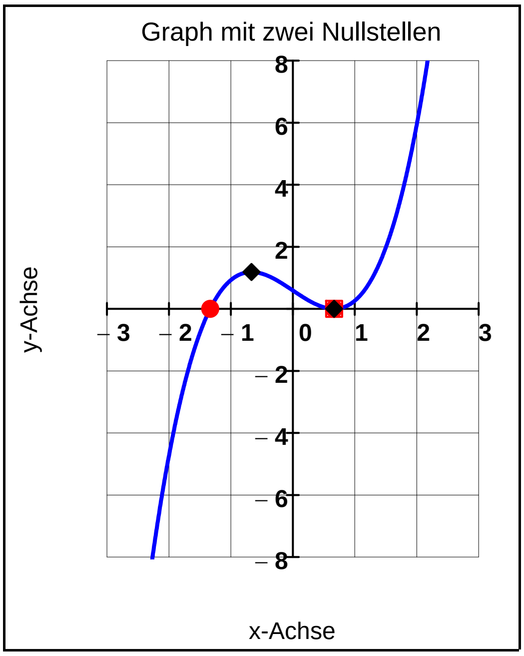
Teilaufgabe c)

Diskriminante nach Cardano: $D := \left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2$ $D = 0$

Lösungsformel für die Nullstelle: $x_1 := \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{D}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{D}}$ $x_1 = -1.333$

$$x_2 := \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3} \cdot i}{2}\right) \cdot \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{D}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{D}} \cdot \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3} \cdot i}{2}\right)$$ $x_2 = 0.667$

$$x_3 := \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3} \cdot i}{2}\right) \cdot \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{D}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{D}} \cdot \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3} \cdot i}{2}\right)$$ $x_3 = 0.667$



Nullstellen:

$x_1 = -1.333$

$x_2 = 0.667$

$x_3 = 0.667$

Hochpunkt:

$x_H = -0.667$ $x_T = 0.667$

Tiefpunkt:

$x_T = 0.667$ $y_T = 0$

Mathcad-Lösung:

Berechnung der Nullstellen

$$x_{NS} = \begin{pmatrix} 0.667 \\ 0.667 \\ -1.333 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 5

Gegeben ist die Funktion $f(x) = x^3 + p \cdot x + q$.

a) Untersuchen Sie den Sonderfall $p \neq 0 \wedge q = 0$ auf Extrema und geben Sie die Anzahl der Nullstellen an. Konkret: $p_1 := 1$, $q_1 := 0$.

b) Untersuchen Sie den Sonderfall $p = 0 \wedge q \neq 0$ auf Extrema und geben Sie die Anzahl der Nullstellen an.

c) Untersuchen Sie den Sonderfall $p = 0 \wedge q = 0$ auf Extrema und geben Sie die Anzahl der Nullstellen an.

Teilaufgabe a)

Gegeben: $p_1 := 1$ $\quad q_1 := 0$

Koeffizienten: $p := p_1$ $\quad p = 1$ $\quad q := q_1$ $\quad q = 0$

Reduzierte Form: $x^3 + p \cdot x + q = 0 \rightarrow x^3 + x = 0$

Funktionsterm: $f(x) := x^3 + p \cdot x + q$ $\quad f(x) = x^3 + x$

Ableitung: $f'(x) := \frac{d}{dx} f(x)$ $\quad f'(x) = 3 \cdot x^2 + 1$

Existenz der Extrema

Horizontale Tangenten : $x_E := f'(x) = 0 \rightarrow 3 \cdot x^2 + 1 = 0 \text{ auflösen}, x \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3} \cdot i}{3} \\ -\frac{\sqrt{3} \cdot i}{3} \end{pmatrix}$

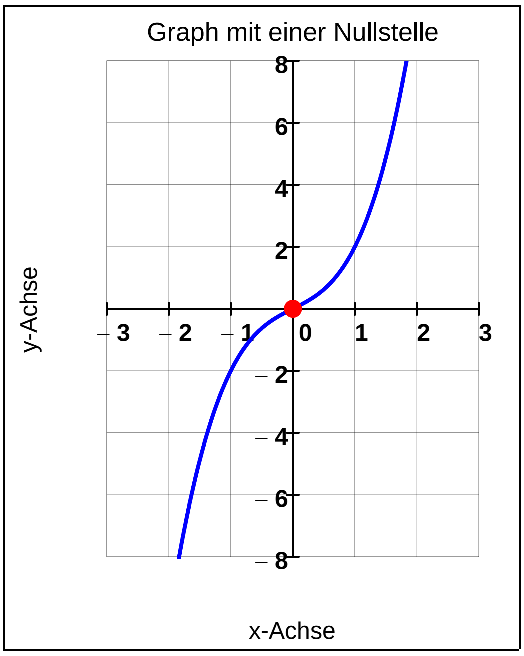
Folgerung: Extrema $\rightarrow$ "keine"

Anzahl der Nullstellen

Nullstellen $\rightarrow$ "eine einfache"

Diskriminante nach Cardano: $D := \left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2$ $\quad D = 0.037$

Lösungsformel für die Nullstelle: $x_1 := \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{D}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{D}}$ $\quad x_1 = 0$



Nullstelle:

$x_1 = 0$

Mathcad-Lösung:

$x_{NS} := f(x) = 0 \rightarrow x^3 + x = 0 \rightarrow 0$ $\qquad x_{NS} = 0$

Teilaufgabe b)

Gegeben: $\quad p_1 := 0 \quad q_1 := 1$

Koeffizienten: $\quad p := p_1 \quad p = 0 \quad q := q_1 \quad q = 1$

Reduzierte Form: $\quad x^3 + p \cdot x + q = 0 \rightarrow x^3 + 1 = 0$

Funktionsterm: $\quad f(x) := x^3 + p \cdot x + q \quad f(x) = x^3 + 1$

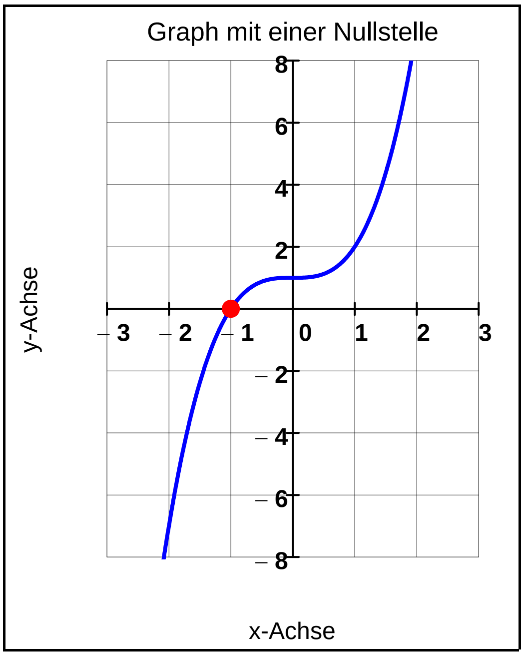
Ableitung: $\quad f'(x) := \frac{d}{dx} f(x) \quad f'(x) = 3 \cdot x^2$

Existenz der Extrema

Horizontale Tangenten : $\quad x_E := f'(x) = 0 \rightarrow 3 \cdot x^2 = 0$ auflösen , x $\rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Folgerung: kein Extremum

$$x_{NS} := f(x) = 0 \rightarrow x^3 + 1 = 0 \text{ auflösen}, x \rightarrow \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3} \cdot i}{2} \\ \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3} \cdot i}{2} \end{pmatrix}$$



Nullstelle:

$x_1 = -1$

Mathcad-Lösung:

$$x_{NS} := f(x) = 0 \rightarrow x^3 + 1 = 0 \rightarrow -1$$

$x_{NS} = -1$

Teilaufgabe c)

<u>Gegeben:</u> $p_1 := 0$ $q_1 := 0$

Koeffizienten: $p := p_1$ $p = 0$ $q := q_1$ $q = 0$

Reduzierte Form: $x^3 + p \cdot x + q = 0 \rightarrow x^3 = 0$

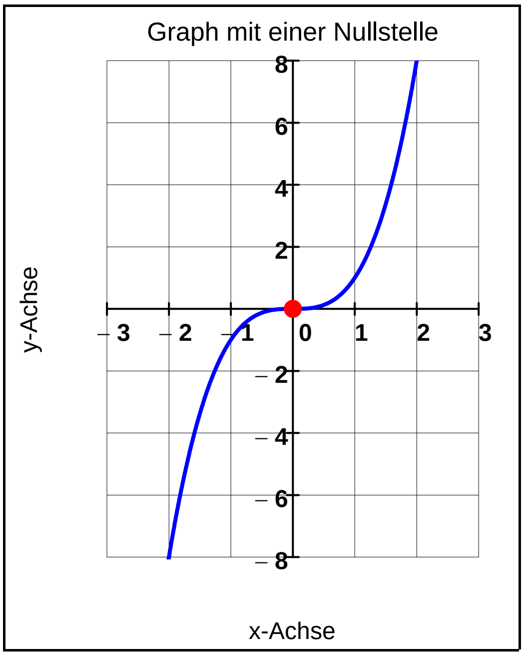
Funktionsterm: $f(x) := x^3 + p \cdot x + q$ $f(x) = x^3$

Ableitung: $f'(x) := \frac{d}{dx} f(x)$ $f'(x) = 3 \cdot x^2$

Horizontale Tangenten : $x_E := f'(x) = 0 \rightarrow 3 \cdot x^2 = 0$ auflösen, $x \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Folgerung: kein Extremum

$x_{NS} := f(x) = 0 \rightarrow x^3 = 0$ auflösen, $x \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$



$x_1 = 0$