Fibonacci-Zahlen - die Folge

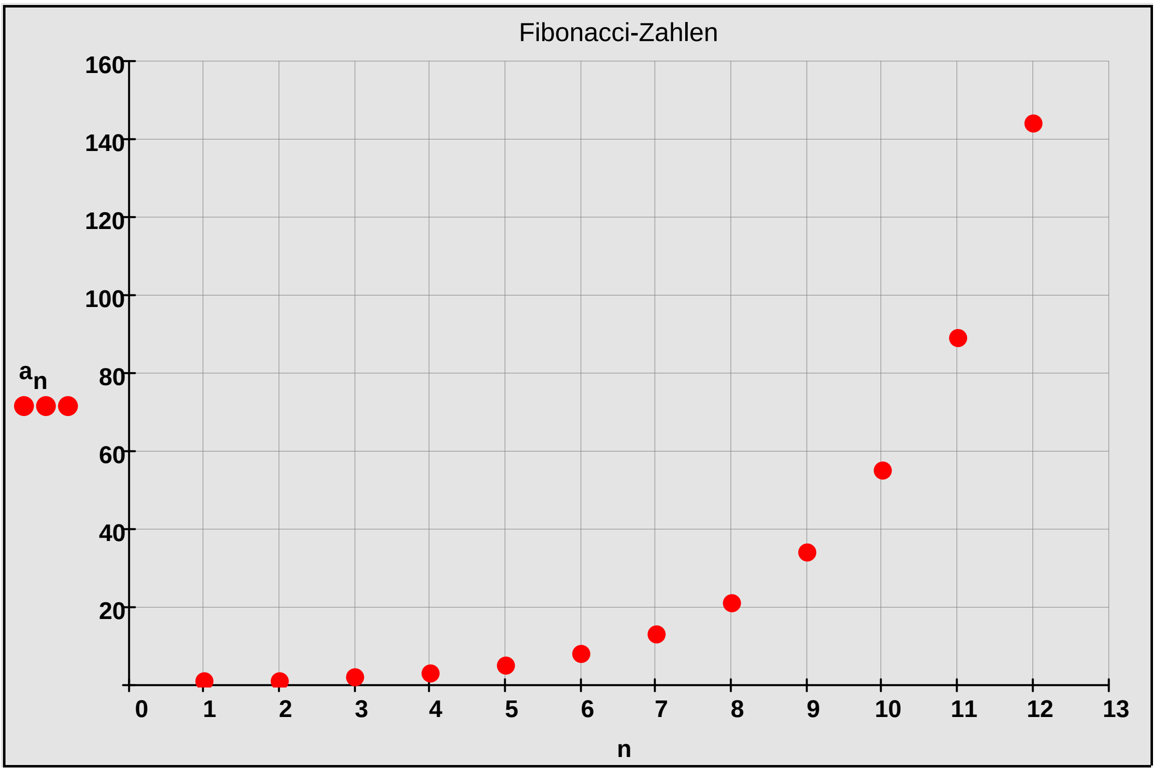
Bezeichnung
Die ***Fibonacci-Folge*** ist eine sehr bekannte rekursive Folge, die der berühmte Mathematiker ***Leonardo von Pisa*** (auch ***Fibonacci*** genannt, etwa 1220 n. Chr.) mithilfe der ***Population von Kaninchen*** dargestellt hat. Fibonacci überlegte sich:
Ein Kaninchenpaar beginnt 2 Monate nach seiner Geburt mit der Fortpflanzung und erzeugt von da an monatlich ein weiteres Kaninchenpaar. Die Nachkommen pflanzen sich jeweils in der gleichen Weise fort wie die Eltern.
Wie viele Kaninchenpaare sind nach n Monaten vorhanden, wenn kein Todesfall eintritt?

Werte :=

Monat n	Anzahl a_n
1	1
2	1
3	2
4	3
5	5
6	8
7	13
8	21
9	34
10	55
11	89
12	144

$n := \mathrm{Werte}^{\langle 0 \rangle}$

$a_n := \mathrm{Werte}^{\langle 1 \rangle}$



Definition

Die Zahlenfolge (a_n) mit dem rekursiven Bildungsgesetz $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ bei gegebenem $a_1 = 1$ und $a_2 = 1$ heißt ***Fibonacci-Folge***.

Berechnung

a) Berechnung der ersten zehn Fibonacci-Zahlen mithilfe der ***rekursiven Definition***.

b) Im 18. und 19. Jahrhundert fanden unabhängig voneinander die französischen Mathematiker de Moivre und Binet eine ***explizite Darstellung*** der

Fibonacci-Folge: $$b_k = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k}{\sqrt{5}} - \frac{\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k}{\sqrt{5}}$$

berechnung der ersten 12 Fibonacci-Zahlen und berechung von z. B. b_{20}.

Teilaufgabe a)

$n := 1 .. 12$

$a_1 := 1 \qquad a_2 := 1$

$a_{n+2} := a_n + a_{n+1}$

$n =$

1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12

$a_n =$

2
3
5
8
13
21
34
55
89
144

Teilaufgabe b)

$k := 1 .. 20$

$$b_k := \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k}{\sqrt{5}} - \frac{\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k}{\sqrt{5}}$$

$k =$	$b_k =$
1	1
2	1
3	2
4	3
5	5
6	8
7	13
8	21
9	34
10	55
11	89
12	144
13	233
14	377
15	610
...	...

$b_{20} = 6765$

Weitere Fibonacci-Zahlen können durch Scrollen in der Tabelle eingesehen werden.