Abiturprüfung Berufliche Oberschule 2011
Mathematik 13 Nichttechnik - A I - Lösung

Teilaufgabe 1.0

Gegeben ist die Funktion $f(x) := \frac{(x-2)^2}{x-1}$ in ihrer maximalen Definitionsmenge $D_f \subset IR$.

Ihr Graph ist G_f.

Teilaufgabe 1.1 (5 BE)

Bestimmen Sie D_f, die Gleichungen aller Asymptoten von G_f und geben Sie die Nullstelle von f an.

Nenner abrufen: $n(x) := \mathrm{denom}(f(x)) = x - 1$

Nullstelle des Nenners: $n(x) = 0 \rightarrow x - 1 = 0 \text{ auflösen}, x \rightarrow 1$

Definitionsmenge: $D = IR \setminus \{ 1 \}$

Vertikale Asymptote: $x = 1$

Polynomdivision: $f(x) \rightarrow \frac{(x-2)^2}{x-1} \text{ parfrac} \rightarrow x + \frac{1}{x-1} - 3$

schiefe Asymptote: $a(x) := x - 3$

Zähler abrufen: $z(x) := \mathrm{numer}(f(x)) = (x-2)^2$

Nullstellenbedingung: $z(x) = 0 \rightarrow (x-2)^2 = 0 \text{ auflösen}, x \rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

Zweifache Nullstelle: $x_{12} = 2$

Teilaufgabe 1.2 (7 BE)

Ermitteln Sie die Art und die Koordinaten der Extrempunkte von G_f.

[Teilergebnis: $f'(x) = \frac{x^2 - 2 \cdot x}{(x-1)^2}$]

$$f'(x) := \frac{d}{dx} f(x) = 1 - \frac{1}{(x-1)^2} \quad \Leftrightarrow \quad f'(x) := \frac{x^2 - 2 \cdot x}{(x-1)^2}$$

Zähler abrufen: $z'(x) := \mathrm{numer}(f'(x)) \rightarrow x^2 - 2 \cdot x$

Horizontale Tangenten: $z'(x) = 0 \rightarrow x^2 - 2 \cdot x = 0$ **auflösen**, $x \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

Extremalstellen: $x_{E1} := 0$ $x_{E2} := 2$

		$x = 0$		$x \neq 1$		$x = 2$		$G_{z'}$
Zähler	pos		neg		neg		pos	
Nenner	pos		pos		pos		pos	
f'(x)	pos		neg		neg		pos	
G_f	sms		smf		smf		sms	
		HP				TP		

Bezeichnung:
sms: streng monoton steigend
smf: sttreng monoton fallend

$f(0) = -4$

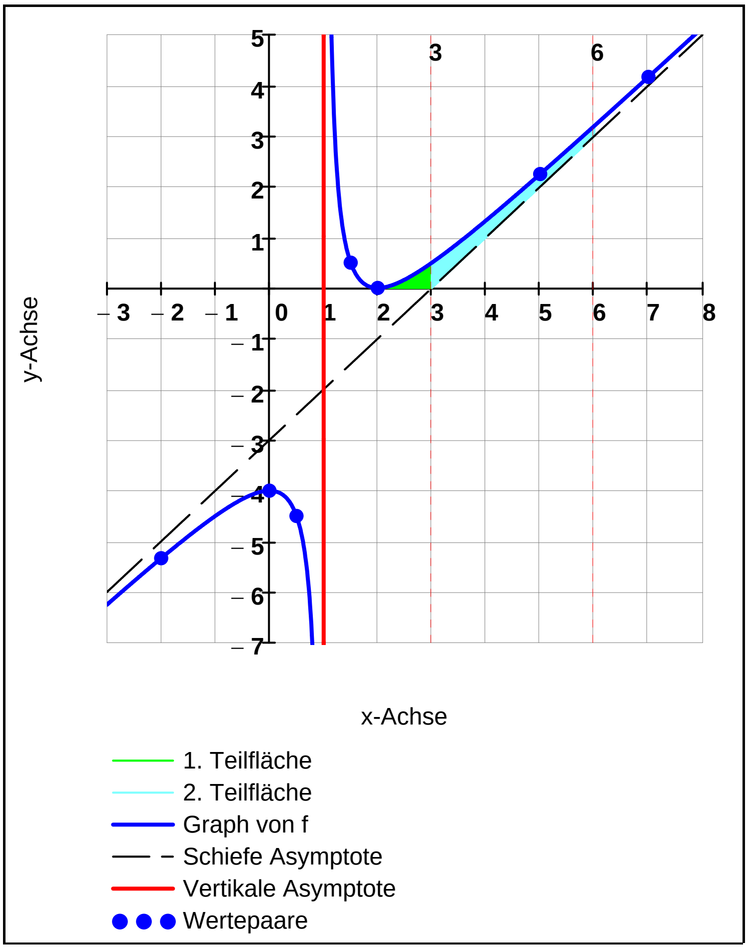
$f(2) = 0$

HP(0 / −4)

TP(2 / 0)

Teilaufgabe 1.3 **(5 BE)**

Zeichnen Sie die Asymptoten und G_f mit Hilfe der bisherigen Ergebnisse und der Berechnung weitere Funktionswerte für $-2 \leq x \leq 7$ in ein Koordinatensystem. [**1 LE = 1 cm**]



Wertepaare von G_f:

$x_W = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0.5 \\ 1.5 \\ 2 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$ $f(x_W) = \begin{pmatrix} -5.3 \\ -4.0 \\ -4.5 \\ 0.5 \\ 0.0 \\ 2.3 \\ 4.2 \end{pmatrix}$

Teilaufgabe 1.4 (5 BE)
Der Graph G_f schließt mit der x-Achse, seiner schiefen Asymptote und der Geraden $x = 6$ ein Flächenstück ein. Kennzeichnen Sie das Flächenstück in der Zeichnung von 1.3 und berechnen Sie die Maßzahl des Flächeninhalts.

Nullstelle der schiefen Asymptote: $x_0 := a(x) = 0 \rightarrow x - 3 = 0 \text{ auflösen}, x \rightarrow 3$

$x_0 = 3$

1. Teilfläche: $A_1 = \int_2^3 f(x)\,dx = \int_2^3 \left(x - 3 + \frac{1}{x-1}\right) dx$

1. Stammfunktion: $\int \left(x - 3 + \frac{1}{x-1}\right) dx = \ln(|x-1|) - 3 \cdot x + \frac{x^2}{2}$

1. Flächenmaßzahl: $A_1 := \int_2^3 f(x)\,dx$ $\qquad A_1 = \ln(2) - \frac{1}{2} = 0.193$

2. Teilfläche: $A_2 = \int_3^6 (f(x) - a(x))\,dx = \int_2^3 \left[x - 3 + \frac{1}{x-1} - (x-3)\right] dx$

2. Stammfunktion: $\int \left(\frac{1}{x-1}\right) dx = \ln(|x-1|)$

2. Flächenmaßzahl: $A_2 := \int_3^6 (f(x) - a(x))\,dx$ $\qquad A_2 = \ln(5) - \ln(2) = 0.916$

Gesamtfläche: $A := A_1 + A_2$ $\qquad A = \ln(5) - \frac{1}{2} = 1.11$

Teilaufgabe 1.5.0
Im Weiteren wird die Funktion $g(x) = \ln(f(x)) = \ln\left[\frac{(x-2)^2}{x-1}\right]$ in ihrer maximalen Definitionsmenge $D_g \subset \mathbb{R}$ betrachtet. Ihr Graph ist G_g. Zur Lösung der Aufgaben können die Ergebnisse der bisherigen Teilaufgaben verwendet werden.

Teilaufgabe 1.5.1 (6 BE)
Bestimmen Sie D_g, untersuchen Sie das Verhalten von $g(x)$ an den Rändern von D_g und geben Sie die Gleichungen aller Asymptoten von G_g an.

Argument positiv: $\frac{(x-2)^2}{x-1} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x - 1 > 0$ auflösen, $x \rightarrow 1 < x$

Definitionsmenge: $D_g =]\,1\,;\,\infty\,[\ \backslash\ \{\,2\,\}$

$$\lim_{x \to 1^+} \ln\left[\frac{(x-2)^2}{x-1}\right] \rightarrow \infty \qquad \Rightarrow \qquad \text{vertikale Asymptote } x = 1$$

$$\downarrow$$
$$0^+$$

$$0^+$$
$$\uparrow$$

$$\lim_{x \to 2^-} \ln\left[\frac{(x-2)^2}{x-1}\right] \rightarrow -\infty$$

$$\Rightarrow \qquad \text{vertikale Asymptote } x = 2$$

$$\lim_{x \to 2^+} \ln\left[\frac{(x-2)^2}{x-1}\right] \rightarrow -\infty$$

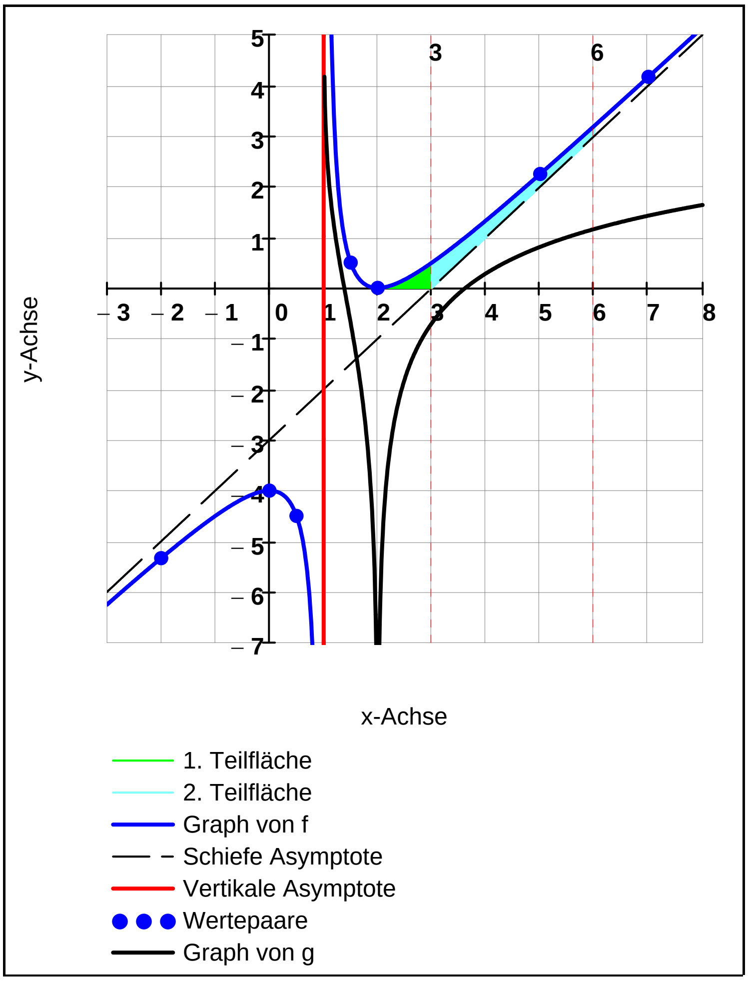
$$\lim_{x \to \infty} \ln\left[\frac{(x-2)^2}{x-1}\right] \rightarrow \infty$$

Teilaufgabe 1.5.2 (6 BE)
Bestimmen Sie die Nullstellen von g und skizzieren Sie den Graphen G_g mit anderer Farbe in das Koordinatensystem der Aufgabe 1.3.

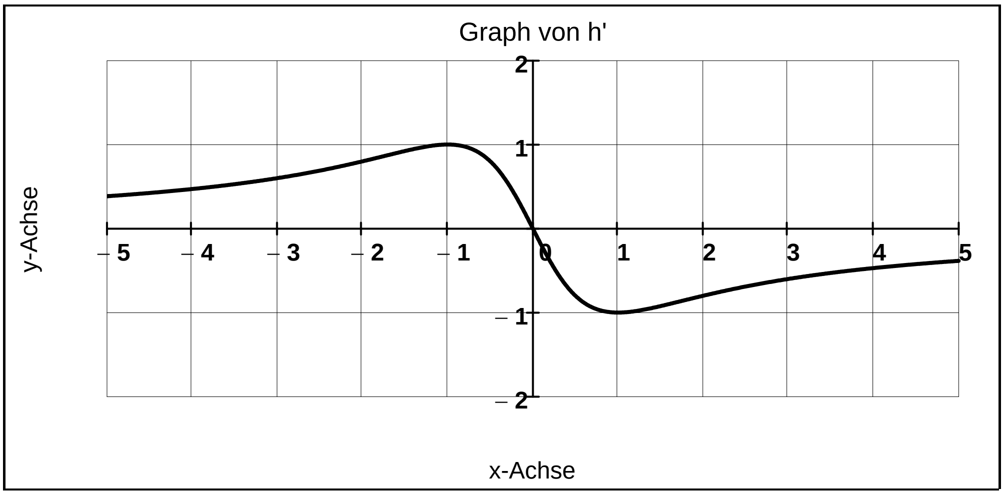
Nullstellenbedingung: $x0 := \frac{(x-2)^2}{x-1} = 1$ auflösen, $x \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}$

Zwei Nullstellen: $x_1 := x0_2 \qquad x_1 = \frac{5}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} = 1.4$

$x_2 := x0_1 \qquad x_2 = \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{5}{2} = 3.6$



Teilaufgabe 2 **(5 BE)**
Eine Funktion h sei auf ganz IR differenzierbar. In der Abbildung ist der **Graph der Ableitung h'** dargestellt. Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen **zur Funktion h** richtig, falsch oder nicht entscheidbar sind. Falls Sie sich für richtig oder falsch entscheiden, begründen Sie Ihre Antwort jeweils kurz.



(1) $h(x) \le 0$ für $0 \le x \le 3$
(2) An der Stelle $x = 0$ besitzt der Graph von h einen Hochpunkt.
(3) Der Graph von h besitzt bei $x = 1$ eine Tangente, die parallel zur Geraden $y = 1$ ist.

Zu (1) keine Aussage möglich

Zu (2) Die Aussage ist richtig, denn x = 0 ist eine einfache Nullstelle von h' mit Vorzeichenwechsel von plus nach minus, G_h ist also streng monoton steigend für x < 0 und G_h ist streng monoton fallend für x > 0, also ist das Extremum ein Hochpunkt.

Zu (3) Aussage ist falsch, denn $h'(1) = -1$ ist ungleich Null.

Teilaufgabe 3.0
Durch starke Überfischung war der Fischbestand des Gelbflossenthuns im Südostatlantik stark gefährdet, worauf Verhandlungen über Schutzmaßnahmen aufgenommen wurden. Auf der Basis von Messungen der Fischpopulation wurde das folgende mathematische Modell entwickelt. Für den Bestand B (in Millionen Fischen) zum Zeitpunkt t (in Jahren) gilt:
$B(t) = (a \cdot t + b) \cdot e^{-0.15 \cdot t} + 70$ mit $t \ge 0$ und $a, b \in IR$.
Die Zeit t wurde auf den 1.1. 1995 bezogen.
Auf Einheiten wird bei der Rechnung verzichtet. Ergebnisse sind gegebenenfalls auf zwei Nachkommastellen zu runden.

Teilaufgabe 3.1 (7 BE)
Berechnen Sie die Werte für a und b, wenn am 1.1.2002 der Bestand den minimalen Wert von 35 Millionen Fischen erreicht hat.
[Ergebnis: $a = -15$; $b = 5$]

Funktionsterm: $B(t, a, b) := (a \cdot t + b) \cdot e^{-0.15 \cdot t} + 70$

Ableitungsfunktion: $B'(t, a, b) := \frac{d}{dt} B(t, a, b) = a \cdot e^{-0.15 \cdot t} + -0.15 \cdot e^{-0.15 \cdot t} \cdot (b + a \cdot t)$

$B'(t, a, b) := (a - 0.15 \cdot b - 0.15 \cdot a \cdot t) \cdot e^{-0.15 \cdot t}$

vorgabe

$B(7, a, b) = 35$ $\quad (a \cdot 7 + b) \cdot e^{-0.15 \cdot 7} + 70 = 35$

$B'(7, a, b) = 0$ $\quad (a - 0.15 \cdot b - 0.15 \cdot a \cdot 7) \cdot e^{-0.15 \cdot 7} = 0$

$$\text{suchen}(a, b) = \begin{pmatrix} -15.0 \\ 5.0 \end{pmatrix}$$

$a = -15 \qquad b = 5$

Teilaufgabe 3.2 (4 BE)
Berechnen Sie den Bestand des Gelbflossenthuns am 1.1.1995, bestimmen Sie den Grenzwert der Funktion B für t $\rightarrow \infty$ und interpretieren Sie das Ergebnis im Sinne der vorliegenden Thematik.

Konkreter Funktionsterm: $B(t) := (-15 \cdot t + 5) \cdot e^{-0.15 \cdot t} + 70$

Stand am 1.1.1995: $B(0) = 75$ also 75 Millionen Fische.

L'Hosp.

$$\lim_{t \to \infty} \left[\underbrace{(-15 \cdot t + 5)}_{\to -\infty} \cdot \underbrace{e^{-0.15 \cdot t}}_{\to 0} + 70 \right] = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{\overset{\to -\infty}{-15 \cdot t + 5}}{\underbrace{e^{0.15 \cdot t}}_{\to \infty}} + 70 \right) = \lim_{x \to \infty} \left(\underbrace{\frac{-15}{0.15 \cdot e^{0.15 \cdot t}}}_{\to 0} + 70 \right)$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{t \to \infty} B(t) \rightarrow 70.0$$

Nach sehr langer Zeit stellt sich der Bestand auf 70 Millionen Fische ein.

Teilaufgabe 3.3 (5 BE)
Berechnen Sie den Bestand am 1.7.2011 und die momentane jährliche Zunahme, die das Modell zu diesem Zeitpunkt liefet.
[Teilergebnis: $B'(t) = 2.25 \cdot (t - 7) \cdot e^{-0.15 \cdot t}$]

Vom 1.1.1995 bis 1.7.2011 sind 16,5 Jahre vergangen.

Bestand am 1.7.2011: $B(16.5) = 49.59$

Ableitungsfunktion: $B'(t) := \frac{d}{dt} B(t) \rightarrow 0.15 \cdot e^{-0.15 \cdot t} \cdot (15 \cdot t - 5) - 15 \cdot e^{-0.15 \cdot t}$

Momentane jährliche Zunahme: $B'(16.5) = 1.799$

Teilaufgabe 3.4 (5 BE)
Zeigen Sie, dass es nach diesem Modell einen Zeitpunkt größter Bestandszunahme gab, und berechnen Sie, in welchem Jahr dies der Fall war.

Funktionsterm der 2. Ableitung: $B''(t) := \frac{d}{dt} B'(t) \rightarrow 4.5 \cdot e^{-0.15 \cdot t} + -0.0225 \cdot e^{-0.15 \cdot t} \cdot (15 \cdot t - 5)$

Ausklammern: $B''(t) := (4.613 - 0.337 \cdot t) \cdot e^{-0.15 \cdot t}$

Wendepunktsbedingung:

$$B''(t) = 0 \rightarrow e^{-0.15 \cdot t} \cdot (-0.337 \cdot t + 4.613) = 0 \text{ auflösen}, t \rightarrow 13.688427299703264095$$

Einfache Nullstelle mit Vorzeichenwechsel von plus nach minus

$\Rightarrow$ Wendepunkt $x_W := 13.69$

ist absolutes Maximum, die größte Bestandzunahme war im Jahr 1995+14 = 2008.

Graphische Veranschaulichung in der Prüfung nicht verlangt.