Abiturprüfung Berufliche Oberschule 2011
Mathematik 13 Nichttechnik - A II - Lösung

made with mathcad

Teilaufgabe 1.0

Gegeben ist die Funktion $f(x) := \dfrac{x^2 - 4}{(x-1)^2}$ in ihrer maximalen Definitionsmenge $D_f \subset \mathbb{R}$.

Der zugehörige Graph heißt G_f.

Teilaufgabe 1.1 (6 BE)

Geben Sie D_f an, bestimmen Sie die Koordinaten der Achsenschnittpunkte von G_f und geben Sie die Gleichungen und Art aller Asymptoten an.

Definitionsmenge: $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

Zähler abrufen: $z(x) := \text{numer}(f(x)) = x^2 - 4$

Nullstellenbedingung: $z(x) = 0 \rightarrow x^2 - 4 = 0 \text{ auflösen}, x \rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

Nullstellen: $x_1 := -2$ $\qquad x_2 := 2$

Schnittpunkte mit der x-Achse: $NS_1(-2/\,0)$ $\qquad NS_2(2/\,0)$

Schnittpunkte mit der y-Achse: $f(0) = -4$ $\qquad S_y(0/\,-4)$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - 4}{(x-1)^2} \rightarrow 1$$

$y = 1$ horizontale Asymptote, da Zählergrad = Nennergrad.

$x = 1$ senkrechte Asymptote ohne Vorzeichenwechsel.

Teilaufgabe 1.2 (8 BE)

Ermitteln Sie die maximalen Monotonieintervalle von G_f und bestimmen Sie daraus die Art und die Koordinaten des Extrempunktes von G_f.

[Teilergebnis: $f'(x) := \dfrac{-2 \cdot x + 8}{(x-1)^3}$]

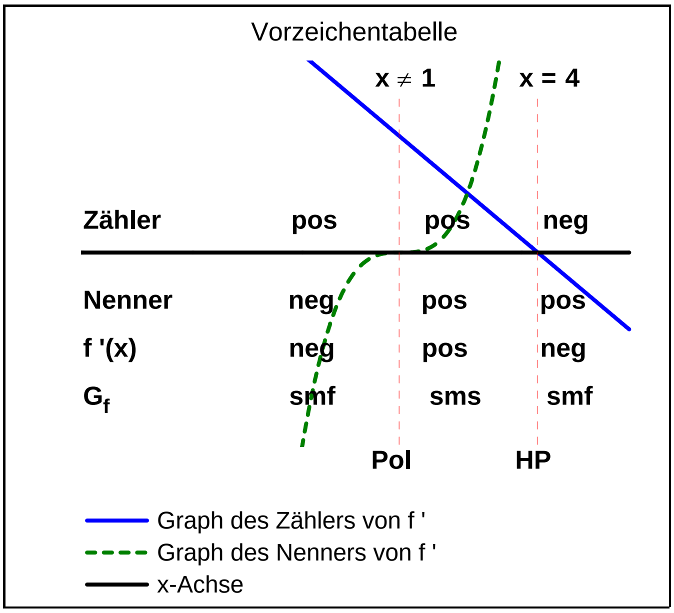
1. Ableitung:

$$f'(x) = \frac{(x-1)^2 \cdot 2 \cdot x - \left(x^2 - 4\right) \cdot 2 \cdot (x-1)}{(x-1)^4} = \frac{2 \cdot x^2 - 2 \cdot x - 2 \cdot x^2 + 8}{(x-1)^3} = \frac{-2 \cdot x + 8}{(x-1)^3}$$

Zähler abrufen: $z'(x) := \text{numer}(f'(x)) = 8 - 2 \cdot x$

Horizontale Tangenten: $z'(x) = 0 \rightarrow 8 - 2 \cdot x = 0 \text{ auflösen}, x \;\rightarrow 4$

Nenner abrufen: $n'(x) := \text{denom}(f'(x)) \rightarrow (x-1)^3$



Koordinaten des Hochpunkts:

$f(4) = \frac{4}{3} = 1.3$

$HP\left(4, \frac{4}{3}\right)$

Monotonieintervalle:

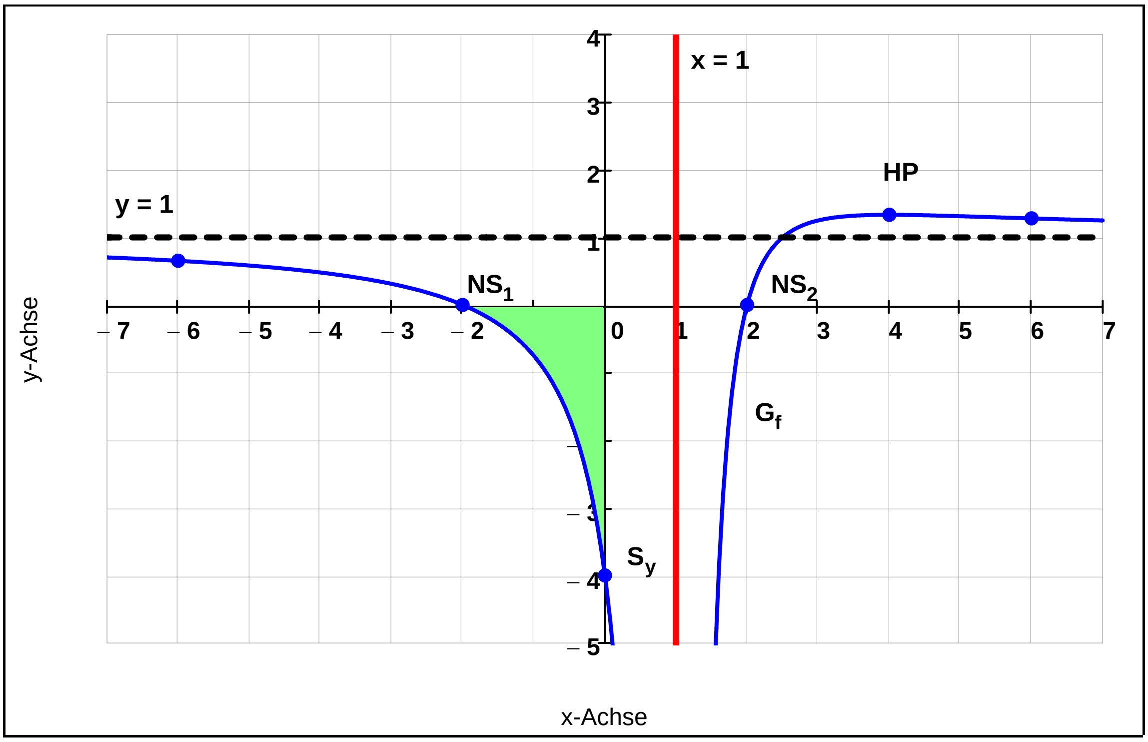
G_f ist streng monoton fallend in $]-\infty; 1[$.

G_f ist streng monoton steigend in $]1; 4]$.

G_f ist streng monoton fallend in $[4; \infty[$.

Teilaufgabe 1.3 (5 BE)
Zeichnen Sie die Asymptoten und G_f mithilfe der bisherigen Ergebnisse für $-6 \le x \le 6$ in ein kartesisches Koordinatensystem. (1 LE = 1 cm)

$$\text{Werte} = \begin{pmatrix} \text{"x"} & -6 & -2 & 0 & 0.5 & 1.5 & 2 & 4 & 6 \\ \text{"y"} & 0.65 & 0 & -4 & -15 & -7 & 0 & 1.33 & 1.28 \end{pmatrix}$$



Teilaufgabe 1.4 **(3 BE)**

Die Funktion $F(x) = x + \ln\left[(x-1)^2\right] + \dfrac{3}{x-1}$ mit $D_F = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ ist eine Stammfunktion von f (Nachweis nicht erforderlich). G_f und die Koordinatenachsen schließen im III. Quadranten ein Flächenstück ein. Bestimmen Sie die exakte Maßzahl seines Flächeninhalts.

$$A = -\int_{-2}^{0} f(x)\,dx = -(F(0) - F(-2))$$

$A := -[\ln(1) - 3 - (-2 + \ln(9) - 1)]$ $\quad$ $A = \ln(9)$

Teilaufgabe 2.0

Gegeben ist die Funktion h mit $h(x) := (x-4)\cdot\ln(x-3)$ in der größtmöglichen Definitionsmenge $D_h \subset \mathbb{R}$. Der Graph von h wird mit G_h bezeichnet.

Teilaufgabe 2.1 **(8 BE)**

Bestimmen Sie D_h und die Nullstelle von h sowie deren Vielfachheit. Untersuchen Sie das Verhalten von $h(x)$ an den Rändern von D_h und geben Sie die Gleichungen der Asymptote von G_h an.

Definitionsmenge: $x - 3 > 0$ auflösen, $x \rightarrow 3 < x$ $D_h =]\,3;\ \infty\,[$

$h(x) = 0 \rightarrow \ln(x-3)\cdot(x-4) = 0$ $\ln(x-3) = 0$ auflösen, $x \rightarrow 4$

$x - 4 = 0$ auflösen, $x \rightarrow 4$

doppelte Nullstelle: $x_{12} = 4$

$$\lim_{x \to 3^+} \left[\underbrace{(x-4)}_{\to -1}\cdot\underbrace{\ln(x-3)}_{\to -\infty}\right] \rightarrow \infty \qquad \lim_{x \to \infty} \left[\underbrace{(x-4)}_{\to \infty}\cdot\underbrace{\ln(x-3)}_{\to \infty}\right] \rightarrow \infty$$

Vertikale Asymptote $x = 3$

Teilaufgabe 2.2 (10 BE)
Weisen Sie nach, dass G_h an der Stelle $x = 4$ einen Punkt mit waagrechter Tangente besitzt.
Untersuchen Sie das Krümmungsverhalten von G_h, schließen Sie daraus auf die Art des Extremums von G_h und geben Sie die Wertemenge von h an.

[Teilergebnis: $h''(x) := \dfrac{x-2}{(x-3)^2}$]

1. Ableitungsfunktion:

$$h'(x) := 1\cdot\ln(x-3) + (x-4)\cdot\frac{1}{x-3}$$

$h'(4) = 0$ also horizontale Tangente

2. Ableitungsfunktion:

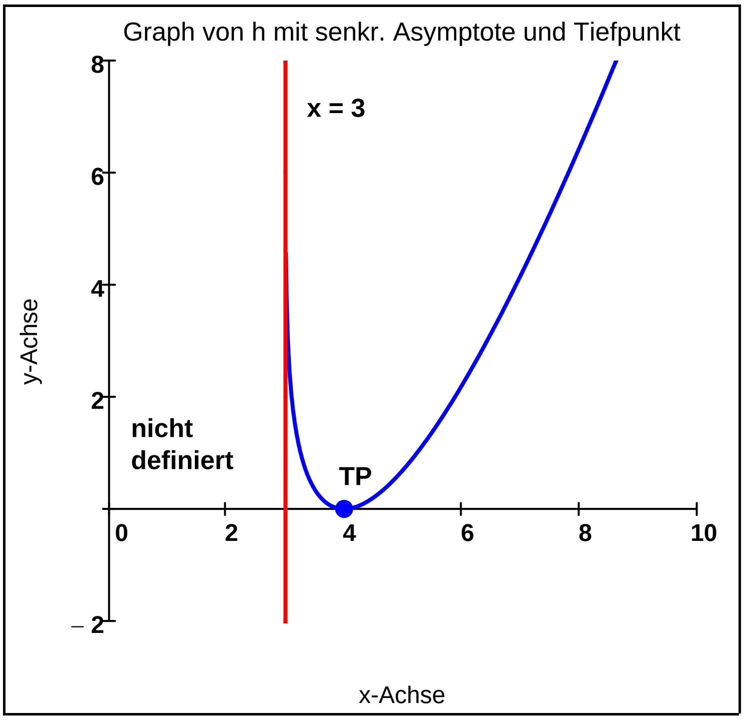
$$h''(x) = \frac{1}{x-3} + \frac{1\cdot(x-3) - (x-4)\cdot 1}{(x-3)^2} = \frac{x - 3 + x - 3 - x + 4}{(x-3)^2} = \frac{x-2}{(x-3)^2}$$

$z''(x) := \mathrm{numer}(h''(x)) \rightarrow x - 2$ $z''(x) = 0 \rightarrow x - 2 = 0$ auflösen, $x \rightarrow 2$

$x = 2$ ist nicht in der Definitionsmenge enthalten $\Rightarrow h''(x) > 0$ für $x > 3$

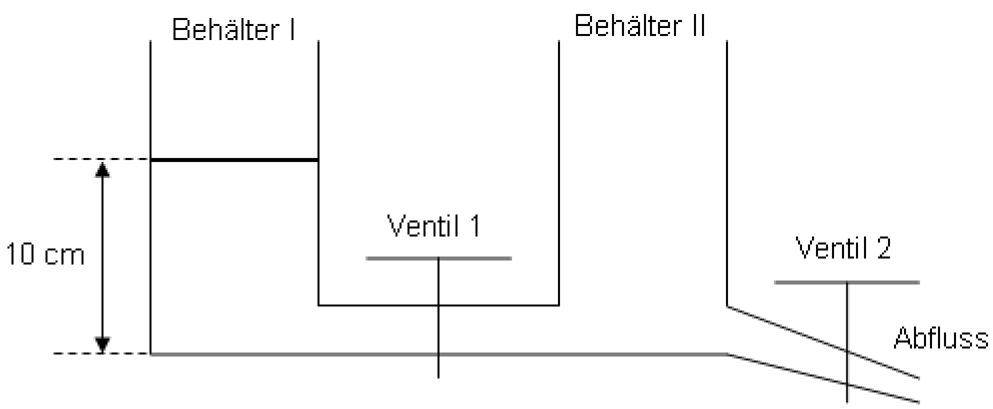
$\Rightarrow G_h$ ist linksgekrümmt $\Rightarrow$ $x = 4$ ist ein absoluter Tiefpunkt, Wertemenge: $W = \mathbb{R}_0^+$

Teilaufgabe 2.3 **(4 BE)**
Zeichnen Sie die Asymptote von G_h in ein Koordinatensystem und skizzieren Sie G_h mithilfe der bisherigen Ergebnisse in das Koordinatensystem.



Teilaufgabe 3.0
Gegeben sind zwei gleichartige Behälter, welche über ein Rohr miteinander verbunden sind. Am Anfang sind beide Ventile geschlossen und Behälter I hat einen Wasserstand von 10 cm, Behälter II enthält kein Wasser. Beim ersten Experiment wird zum Zeitpunkt $t = 0$ nur das Ventil 1 geöffnet. Der Wasserstand in Behälter II verhält sich entsprechend folgender Funktion:

$A_1(t) = 5 \cdot \left(1 - e^{-k \cdot t}\right)$ mit $t \geq 0$, wobei $A_1(t)$ der Wasserstand (in cm) zum Zeitpunkt t ist. Die Zeit t wird in Sekunden gemessen.
Bei den Rechnungen kann auf Einheiten verzichtet werden. Runden Sie alle Werte auf eine Nachkommastelle.



Teilaufgabe 3.1 (3 BE)
Zum Zeitpunkt $t = 8.0 \cdot s$ beträgt der Wasserstand in Behälter II 4,0 cm. Bestimmen Sie daraus den Wert von k.
[Ergebnis: $k = 0.2$]

$$A_1(8) = 4 \quad \Leftrightarrow \quad 5\cdot\left(1 - e^{-k\cdot 8}\right) = 4 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{5} = e^{-8\cdot k}$$

$$\Leftrightarrow \quad k_0 := \ln\left(\frac{1}{5}\right) = -8k \text{ auflösen}, k \rightarrow \frac{\ln(5)}{8} \qquad k_0 = 0.201$$

Teilaufgabe 3.2 (3 BE)
Berechnen Sie die Zeit, nach der in Behälter II der Wasserstand auf 2,0 cm angestiegen ist.

Funktionsterm: $A_1(t) := 5\cdot\left(1 - e^{-0.2\cdot t}\right)$

Bedingung: $A_1(t) = 2 \quad \Leftrightarrow \quad 5\cdot\left(1 - e^{-0.2\cdot t}\right) = 2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{3}{5} = e^{0.2\cdot t}$

$$\Leftrightarrow \quad t_0 := \ln\left(\frac{3}{5}\right) = \frac{-2}{10}\cdot t \text{ auflösen}, t \rightarrow 5\cdot\ln(5) - \ln(243) \qquad t_0 = 2.6$$

Teilaufgabe 3.3.0
Das Experiment wird noch einmal wiederholt, wobei jetzt auch der Abfluss hinter Behälter II (Ventil 2) geöffnet ist, durch den gleichmäßig eine bestimmte Menge Wasser abfließt. Die Funktion für den Wasserstand in Behälter II verändert sich nun wie folgt:
$A_2(t) := 5 - 5\cdot e^{-0.2\cdot t} - 0.1\cdot t$ mit $0 \le t \le t_{leer}$

Teilaufgabe 3.3.1 (6 BE)
Ermitteln Sie, welcher Wasserstand in Behälter II maximal erreicht wird.

Ableitung: $A'_2(t) = -5\cdot(-0.2)\cdot e^{-0.2\cdot t} - 0.1 \qquad A'_2(t) := e^{-0.2\cdot t} - 0.1$

Horizontale Tangenten: $A'_2(t) = 0 \rightarrow e^{-0.2\cdot t} - 0.1 = 0 \; \left| \begin{array}{l} \text{auflösen}, t \\ \text{Gleitkommazahl}, 3 \end{array} \right. \rightarrow 11.5$

Extremum: $t_E := 11.5$

Vorzeichen von $A'_2(t)$

$$A'_2(t) > 0 \rightarrow e^{-0.2\cdot t} - 0.1 > 0 \; \left| \begin{array}{l} \text{auflösen}, t \\ \text{Gleitkommazahl}, 3 \end{array} \right. \rightarrow -\infty < t < 11.5$$

$$A'_2(t) < 0 \rightarrow e^{-0.2\cdot t} - 0.1 < 0 \; \left| \begin{array}{l} \text{auflösen}, t \\ \text{Gleitkommazahl}, 3 \end{array} \right. \rightarrow 11.5 < t < \infty$$

Vorzeichenwechsel von ***Plus nach Minus***, das Extremum ist also ein Maximum.

Höchster Wasserstand in Behälter II: $A_2(t_E) = 3.3$ also 3,3 cm.

Teilaufgabe 3.3.2 (4 BE)
In der Praxis lässt sich die Funktion $A_2(t)$ für $t > 30$ durch ihre schiefe Asymptote ersetzen.
Geben Sie die Gleichung der schiefen Asymptote an und berechnen Sie damit näherungsweise den Zeitpunkt t_{leer}, zu dem der Behälter II wieder leer ist.

$$\lim_{t \to \infty} \left(5 - \underbrace{5 \cdot e^{-0.2 \cdot t}}_{\downarrow \atop 0} - 0.1 \cdot t\right) \to -\infty$$

Schiefe Asymptote: $g(t) := 5 - 0.1 \cdot t$

$$g(t) = 0 \to -0.1 \cdot t + 5 = 0 \text{ auflösen}, t \to 50.0 \quad \Rightarrow \quad t_{leer} := 50$$

Behälter II ist etwa nach 50 Sekunden leer.