Abiturprüfung Berufliche Oberschule 2011
Mathematik 13 Nichttechnik - B I - Lösung

Teilaufgabe 1.0

In einem Koordinatensystem des IR^3 sind die Punkte **A(−5/ 2/ 7), B(0/ 2/ 1), C(2/ 1/ −1)** und **D(1/ −1/ 1)** gegeben.

Teilaufgabe 1.1 (6 BE)

Berechnen Sie die Vektoren $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$ und $\overrightarrow{AD}$ und zeigen Sie, dass die vier Punkte die Eckpunkte eines Trapezes sind.Skizzieren Sie das Trapez und bezeichnen Sie die Eckpunkte.

Ortsvektoren:

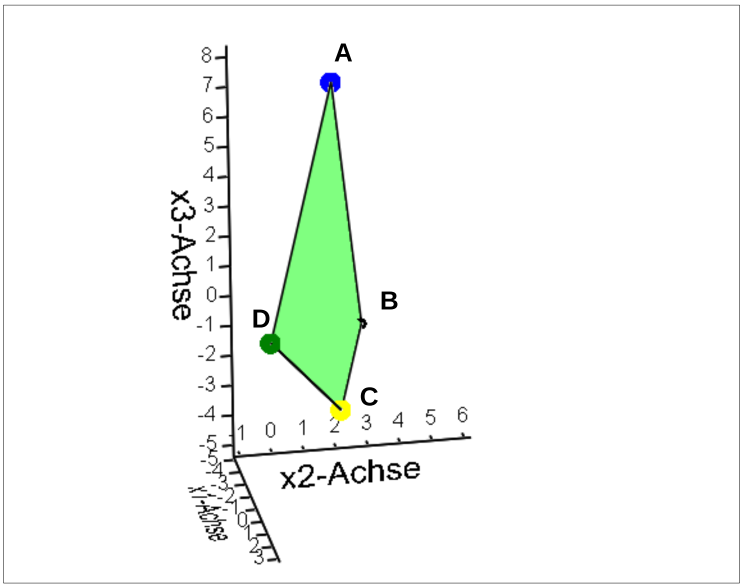
$$OA := \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} \qquad OB := \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad OC := \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad OD := \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Verbindungsvektoren:

$$AB := OB - OA \qquad BC := OC - OB \qquad CD := OD - OC \qquad AD := OD - OA$$

$$AB = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix} \qquad BC = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad CD = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad AD = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix}$$

$$3 \cdot BC = AD = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad BC \parallel AD \quad \Rightarrow \quad \text{ABCD ist ein Trapez}$$



Teilaufgabe 1.2 (4 BE)
Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes M der beiden Trapezdiagonalen.

Gerade durch AC:

$$x_{AC}(\lambda) := \mathbf{OA} + \lambda\cdot(\mathbf{OC} - \mathbf{OA})$$

$$x_{AC}(\lambda) = \begin{pmatrix} 7\cdot\lambda - 5 \\ 2 - \lambda \\ 7 - 8\cdot\lambda \end{pmatrix}$$

Gerade durch BD:

$$x_{BD}(\mu) := \mathbf{OB} + \mu\cdot(\mathbf{OD} - \mathbf{OB})$$

$$x_{BD}(\mu) = \begin{pmatrix} \mu \\ 2 - 3\cdot\mu \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$g_{AC} \cap g_{BD} = \{ M \}:$$

Lösung des Gleichungssystems:

$$x_{AC}(\lambda) = x_{BD}(\mu) \rightarrow \begin{pmatrix} 7\cdot\lambda - 5 \\ 2 - \lambda \\ 7 - 8\cdot\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu \\ 2 - 3\cdot\mu \\ 1 \end{pmatrix} \text{ auflösen}, \lambda, \mu \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

Mittelpunkt M:

$$\mathbf{OM} := x_{AC}\left(\frac{3}{4}\right) \qquad \mathbf{OM} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{5}{4} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.25 \\ 1.25 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad M := \mathbf{OM}^T \qquad M \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{5}{4} & 1 \end{pmatrix}$$

Teilaufgabe 1.3 (4 BE)
Durch die Punkte A, B, C und D ist die Ebene E festgelegt. Bestimmen Sie je eine Gleichung der Ebene E in Parameterform und in parameterfreier Form.
[Mögliches Teilergebnis: **E:** $6\cdot x_1 + 2\cdot x_2 + 5\cdot x_3 - 9 = 0$]

Ebene E: $$x_E(\lambda, \mu) := \mathbf{OA} + \lambda\cdot(\mathbf{OB} - \mathbf{OA}) + \mu\cdot(\mathbf{OD} - \mathbf{OC})$$

Parameterform: $$x_E(\lambda, \mu) = \begin{pmatrix} 5\cdot\lambda - \mu - 5 \\ 2 - 2\cdot\mu \\ 2\cdot\mu - 6\cdot\lambda + 7 \end{pmatrix}$$

Gauß-Matrix: $$\begin{pmatrix} 5 & -1 & x_1 + 5 \\ 0 & -2 & x_2 - 2 \\ -6 & 2 & x_3 - 7 \end{pmatrix} \xrightarrow{5\cdot(\mathrm{III}) + 6\cdot(\mathrm{I})} \begin{pmatrix} 5 & -1 & x_1 + 5 \\ 0 & -2 & x_2 - 2 \\ 0 & 4 & 6\cdot x_1 + 5\cdot x_3 - 5 \end{pmatrix}$$

$(III) + 2 \cdot (II)$ -------------------->

$$\begin{pmatrix} 5 & -1 & x_1 + 5 \\ 0 & -2 & x_2 - 2 \\ 0 & 0 & 6 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + 5 \cdot x_3 - 9 \end{pmatrix}$$

Parameterfreie Darstellung: $6 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + 5 \cdot x_3 - 9 = 0$

Teilaufgabe 1.4 (3 BE)
Ermitteln Sie die Schnittpunkte der Ebene E mit der x_1- und x_2-Achse und stellen Sie damit die Gleichung der Schnittgeraden der Ebene E mit der x_1x_2-Ebene auf.

Schnittpunkt mit der x_1-Achse: $x_2 = 0 \wedge x_3 = 0$

$6 \cdot x_1 - 9 = 0 \text{ auflösen}, x_1 \rightarrow \frac{3}{2}$ $\Rightarrow$ $S_1 \left(\frac{3}{2} / 0 / 0 \right)$

Schnittpunkt mit der x_2-Achse: $x_1 = 0 \wedge x_3 = 0$

$2 \cdot x_2 - 9 = 0 \text{ auflösen}, x_2 \rightarrow \frac{9}{2}$ $\Rightarrow$ $S_2 \left(0 / \frac{9}{2} / 0 \right)$

Schnittgerade: $x_S(\tau) := \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \tau \cdot \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ \frac{9}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$

Teilaufgabe 2.0
drei Sektoren U, V und W eines Unternehmens sind untereinander und mit dem Markt nach dem Leontief-Modell gemäß der untenstehenden Input-Output-Tabelle verflochten.
(Angaben in Mengeneinheiten ME.)

".."	"U"	"V"	"W"	"Markt"	"Produktion"
"U"	x_{11}	0	72	78	250
"V"	50	x_{22}	0	110	200
"W"	100	20	x_{33}	72	240

Teilaufgabe 2.1 (5 BE)
Bestimmen Sie die Inputmatrix, die zu dieser Verflechtung gehört.

$x_{11} := 250 - 72 - 78 \qquad x_{11} = 100$

$x_{22} := 200 - 50 - 110 \qquad x_{22} = 40$

$x_{33} := 240 - 100 - 20 - 72 \qquad x_{33} = 48$

Inputmatrix: $A := \begin{pmatrix} \frac{100}{250} & 0 & \frac{72}{240} \\ \frac{50}{250} & \frac{40}{200} & 0 \\ \frac{100}{250} & \frac{20}{200} & \frac{48}{240} \end{pmatrix}$ $\qquad A = \begin{pmatrix} 0.4 & 0 & 0.3 \\ 0.2 & 0.2 & 0 \\ 0.4 & 0.1 & 0.2 \end{pmatrix}$

Teilaufgabe 2.2 (5 BE)
Berechnen Sie den Produktionsvektor $\vec{x}$, wenn die Marktabgabe $\vec{y} = \begin{pmatrix} 120 \\ 90 \\ 80 \end{pmatrix}$ ermöglicht werden soll.

$(E - A) \cdot \vec{x} = \vec{y}$

$E := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad E - A = \begin{pmatrix} 0.6 & 0 & -0.3 \\ -0.2 & 0.8 & 0 \\ -0.4 & -0.1 & 0.8 \end{pmatrix}$

Gleichungssystem aufstellen:

$$(E - A) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 120 \\ 90 \\ 80 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{3 \cdot x_1}{5} - \frac{3 \cdot x_3}{10} \\ \frac{4 \cdot x_2}{5} - \frac{x_1}{5} \\ \frac{4 \cdot x_3}{5} - \frac{x_2}{10} - \frac{2 \cdot x_1}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 120 \\ 90 \\ 80 \end{pmatrix}$$

Gleichungssystem lösen:

$$(E - A) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 120 \\ 90 \\ 80 \end{pmatrix} \text{ auflösen}, x_1, x_2, x_3 \rightarrow (350 \quad 200 \quad 300)$$

Produktionsvektor:

$\vec{x} = \begin{pmatrix} 350 \\ 200 \\ 300 \end{pmatrix}$

Teilaufgabe 2.3 (6 BE)
Für das nächste Jahr plant man in U eine Produktion von 300 ME, in V von 250 ME.
Jeder Sektor soll so viel produzieren, dass von den Gütern jedes Sektors mindestens 30 ME an den Markt abgegeben werden können. Bestimmen Sie das Intervall, in dem sich die Produktion von W bewegen muss.

$$(E - A) \cdot \vec{x} = \vec{y}$$

$$\begin{pmatrix} 0.6 & 0 & -0.3 \\ -0.2 & 0.8 & 0 \\ -0.4 & -0.1 & 0.8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 300 \\ 250 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.3 \cdot x_3 + 180.0 \\ 140.0 \\ 0.8 \cdot x_3 - 145.0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -0.3 \cdot x_3 + 180.0 \\ 140.0 \\ 0.8 \cdot x_3 - 145.0 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 30 \\ 30 \\ 30 \end{pmatrix} \text{ vereinfachen } \rightarrow \begin{pmatrix} -0.3 \cdot x_3 + 180.0 \geq 30 \\ 1 \\ 0.8 \cdot x_3 - 145.0 \geq 30 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -0.3 \cdot x_3 + 180.0 \geq 30 \\ 0.8 \cdot x_3 - 145.0 \geq 30 \end{pmatrix} \text{ auflösen}, x_3 \rightarrow 218.75 \leq x_3 \leq 500.0$$

Lösungsintervall: $218.75 \leq x_3 \leq 500.0$

Teilaufgabe 2.4 (7 BE)
Im Folgenden hängt der Produktionsvektor von einer Variablen $a \in \mathbb{R}_0^+$ ab.

Es gilt: $\vec{x} = \begin{pmatrix} a^2 \\ a \\ 5\,a \end{pmatrix}$. Beim Verkauf am Markt erzielt man bei den Gütern von U 10 GE (Geldeinheiten), von V 15 GE und von W 20 GE je ME.
Bestimmen Sie a so, dass die Gesamteinnahmen eine Maximalwert annehmen.

$$(E - A) \cdot \vec{x} = \vec{y}$$

$$\begin{pmatrix} 0.6 & 0 & -0.3 \\ -0.2 & 0.8 & 0 \\ -0.4 & -0.1 & 0.8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a^2 \\ a \\ 5 \cdot a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1.5 \cdot a + 0.6 \cdot a^2 \\ 0.8 \cdot a + -0.2 \cdot a^2 \\ -0.1 \cdot a + 4.0 \cdot a + -0.4 \cdot a^2 \end{pmatrix}$$

Bedingung: $-1.5 \cdot a + 0.6 \cdot a^2 \geq 0 \text{ auflösen}, a \rightarrow 2.5 \leq a < \infty \vee -\infty < a \leq 0.0$

$0.8 \cdot a + -0.2 \cdot a^2 \geq 0 \text{ auflösen}, a \rightarrow 0.0 \leq a \leq 4.0$

$-0.1 \cdot a + 4.0 \cdot a + -0.4 \cdot a^2 \geq 0 \text{ auflösen}, a \rightarrow 0.0 \leq a \leq 9.75$

Definitionsmenge für a: $2.5 \le a \le 4$

Erlösfunktion: $E(a) := 10 \cdot \left(-1.5 \cdot a + 0.6 \cdot a^2\right) + 15 \cdot \left(0.8 \cdot a - 0.2 \cdot a^2\right) + 20 \cdot \left(-0.1 \cdot a + 4.0 \cdot a - 0.4 \cdot a^2\right)$

Vereinfachen: $E(a) = 75.0 \cdot a - 5.0 \cdot a^2$

Ableitung: $E'(a) := \frac{d}{da} E(a)$ $\quad E'(a) = -10.0 \cdot a + 75.0$

Horizontale Tangenten: $E'(a) = 0 \rightarrow -10.0 \cdot a + 75.0 = 0$ auflösen, a $\rightarrow 7.5$

$a_E = 7.5 \quad \notin \quad D$

Einsetzen der Radnwerte: $E(2.5) \rightarrow 156.25$

$E(4) \rightarrow 220.0$

$\Rightarrow$ **Extremum wird auf dem Rand angenommen, also $a_{max} = 4$**