Abiturprüfung Berufliche Oberschule 2011
Mathematik 13 Nichttechnik - B II - Lösung

made with mathcad

Teilaufgabe 1.0

In einem Koordinatensystem des IR^3 sind die Punkte **A(1/ 0/ 2), B(1/ 3/ −2)** und **C(0/ 6/ −4)** sowie die Gerade g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ mit $r \in IR$ gegeben.

Teilaufgabe 1.1 (5 BE)

Bestimmen Sie jeweils eine Gleichung der Ebene E durch die Punkte A, B und C in Parameterform und in parameterfreier Form.
[Mögliches Teilergebnis: **E:** $6 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3 - 12 = 0$]

Ortsvektoren: $OA := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\quad OB := \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ $\quad OC := \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix}$

Ebene E: $x_E(\lambda, \mu) := OA + \lambda \cdot (OB - OA) + \mu \cdot (OC - OA)$

$$x_E(\lambda, \mu) = \begin{pmatrix} 1 - \mu \\ 6 \cdot \mu + 3 \cdot \lambda \\ 2 - 4 \cdot \lambda - 6 \cdot \mu \end{pmatrix}$$

Eintragen in Gauß-Matrix:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & x_1 - 1 \\ 3 & 6 & x_2 \\ -4 & -6 & x_3 - 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[4 \cdot (II) + 3 \cdot (III)]{\text{vertauschen}} \begin{pmatrix} 3 & 6 & x_2 \\ 0 & -1 & x_1 - 1 \\ 0 & 6 & 4 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3 - 6 \end{pmatrix} \xrightarrow[6 \cdot (II) + (III)]{}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & x_2 \\ 0 & -1 & x_1 - 1 \\ 0 & 0 & 6 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3 - 12 \end{pmatrix}$$

Parameterfreie Darstellung von E: $6 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3 - 12 = 0$

Teilaufgabe 1.2 **(3 BE)**
Bestimmen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes S der Geraden g mit der Ebene E.
[Ergebnis: **S(2/ 0/ 0)**]

$$x_g(r) := \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad x_g(r) = \begin{pmatrix} 6 \cdot r - 4 \\ 4 \cdot r - 4 \\ 3 \cdot r - 3 \end{pmatrix}$$

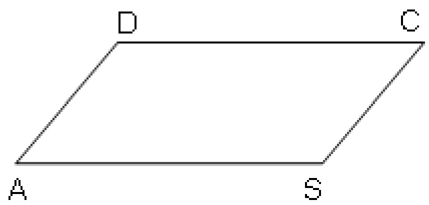
g ∩ E:

$$6 \cdot (6 \cdot r - 4) + 4 \cdot (4 \cdot r - 4) + 3 \cdot (3 \cdot r - 3) - 12 = 0 \text{ vereinfachen } \rightarrow 61 \cdot r - 61 = 0$$

$$r_1 := 61 \cdot r - 61 = 0 \text{ auflösen}, r \rightarrow 1$$

Schnittpunkt: $OS := x_g(r_1) \rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ Schnittpunkt: $S := OS^T \qquad S \rightarrow (2 \quad 0 \quad 0)$

Teilaufgabe 1.3.0
Die Punkte A, S und C bilden zusammen mit einem Punkt D das Parallelogramm ASCD.
(siehe Skizze)



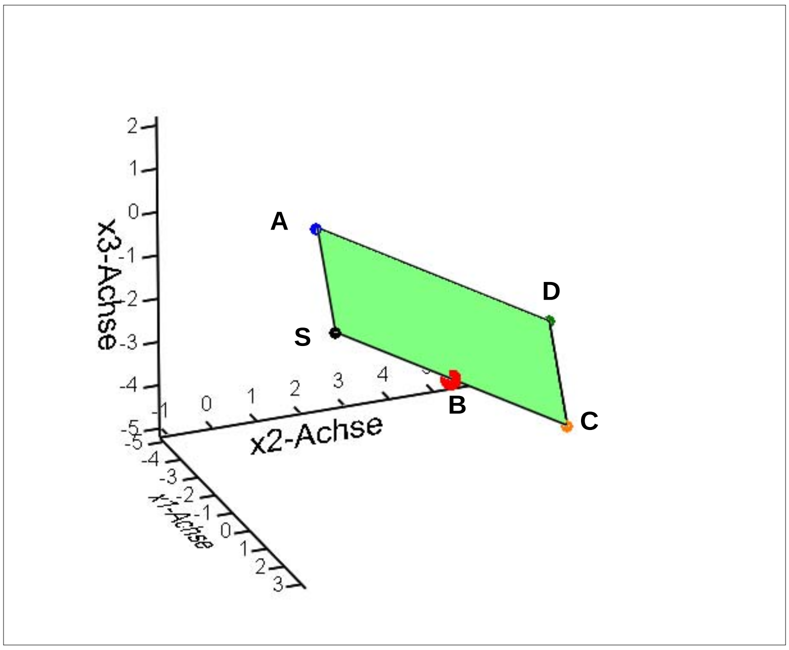
Teilaufgabe 1.3.1 **(3 BE)**
Ermitteln Sie die Koordinaten des Punktes D.

$$OD := OA + (OC - OS) \qquad OD = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad D := OD^T \qquad D \rightarrow (-1 \quad 6 \quad -2)$$

Teilaufgabe 1.3.2 **(3 BE)**
Berechnen Sie die Koordinaten des Diagonalenschnittpunktes M des Parallelogramms ASCD.

$$OM := OA + \frac{1}{2} \cdot (OC - OA) \qquad OM = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad M := OM^T \qquad M \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Teilaufgabe 1.3.3 **(3 BE)**
Gegeben ist die Menge aller Punkte
$P = \{ (p_1, p_2, p_3) \mid \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + t \cdot \overrightarrow{AS} + u \cdot \overrightarrow{SC}$ mit $t, u \in [0 ; 1] \}$.
Übertragen Sie das Parallelogramm auf Ihr Blatt und beschreiben und kennzeichnen Sie die Punktmenge P.



$$OA := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad OS := \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad OC := \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix} \qquad OD := \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$OP(t, u) := OA + t \cdot (OS - OA) + u \cdot (OC - OS) \rightarrow \begin{pmatrix} t - 2 \cdot u + 1 \\ 6 \cdot u \\ 2 - 4 \cdot u - 2 \cdot t \end{pmatrix}$$

$$OP(0, 1) = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix}$$ Punkt D

$$OP(1, 0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$ Punkt S

$$OP(1, 1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix}$$ Punkt C

Die Punktmenge sind alle Punkte im Inneren des Parallelogramms einschließlich der Seiten.

Teilaufgabe 1.3.4 (5 BE)
Überprüfen Sie, ob der Punkt B zur Punktmenge P gehört und zeichnen Sie B in die Skizze von 1.3.3 ein.

$$\mathbf{OB} = \mathbf{OP}(t,u) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t - 2\cdot u + 1 \\ 6\cdot u \\ 2 - 4\cdot u - 2\cdot t \end{pmatrix} \text{ auflösen}, u, t \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

$u = \frac{1}{2}$ $\quad t = 1$ $\quad$ B liegt in der Mitte der Seitenkante SC.

Probe: $\quad \mathbf{OS} + \frac{1}{2}\cdot(\mathbf{OC} - \mathbf{OS}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ $\quad$ Punkt B

Teilaufgabe 2.0
Die drei Werke R, S und T eines Chemieunternehmens sind untereinander und mit dem Markt nach dem Leontief-Modell veflochten.

die Inputmatrix der Verflechtung ist $\mathbf{A} := \begin{pmatrix} 0.1 & 0.2 & 0 \\ 0.05 & 0.3 & 0.2 \\ 0 & 0.5 & 0.2 \end{pmatrix}$.

Teilaufgabe 2.1 (5 BE)
Berechnen Sie die Marktabgaben der Werke R, S und T, wenn von R 800 Mengeneinheiten (ME), von S 520 ME und von T 450 ME produziert werden, und erstellen Sie die zugehörige Input-Output-Tabelle.

$$\mathbf{E} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{E} - \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0.9 & -0.2 & 0 \\ -0.05 & 0.7 & -0.2 \\ 0 & -0.5 & 0.8 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{x} := \begin{pmatrix} 800 \\ 520 \\ 450 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{y} := (\mathbf{E} - \mathbf{A})\cdot\mathbf{x} \qquad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 616 \\ 234 \\ 100 \end{pmatrix}$$

Berechnungen

$$\mathbf{Warenflussmatrix} = \begin{pmatrix} \text{"Zweigwerke"} & \text{"R"} & \text{"S"} & \text{"T"} & \text{"y"} & \text{"x"} \\ \text{"R"} & 80 & 104 & 0 & 616 & 800 \\ \text{"S"} & 40 & 156 & 90 & 234 & 520 \\ \text{"T"} & 0 & 260 & 90 & 100 & 450 \end{pmatrix}$$

Teilaufgabe 2.2 (5 BE)
Aufgrund wirtschaftlicher Probleme soll die Produktion im werk T um a Mengeneinheiten verringert werden, während die Produktionseinheiten der Werek R und S unverändert bleiben sollen.
Bestimmen Sie den maximal möglichen Wert von a.

$$x(a) := \begin{pmatrix} 800 \\ 520 \\ 450 - a \end{pmatrix}$$

$$y(a) := (E - A)\cdot x(a) \qquad y(a) = \begin{pmatrix} 616.0 \\ 0.2\cdot a + 234.0 \\ -0.8\cdot a + 100.0 \end{pmatrix} \qquad \text{mit} \quad 0 \le a \le 450$$

Bedingungen: $\begin{pmatrix} 0.2\cdot a + 234.0 \ge 0 \\ -0.8\cdot a + 100.0 \ge 0 \end{pmatrix}$ **auflösen, a** $\rightarrow -1170.0 \le a \le 125.0$

$$\Rightarrow \qquad a_{max} := 125$$

Teilaufgabe 2.3 (4 BE)

Im kommenden Produktionszeitraum wird mit dem Marktvektor $\vec{y} = \begin{pmatrix} 362 \\ 149 \\ 113 \end{pmatrix}$ gerechnet.

Bestimmen Sie den zugehörigen Produktionsvektor $\vec{x}$.

Marktvektor: $y := \begin{pmatrix} 362 \\ 149 \\ 113 \end{pmatrix}$

$$\vec{y} = (E - A)\cdot\vec{x} \qquad \Rightarrow \qquad (E - A)\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = y \rightarrow \begin{pmatrix} -0.2\cdot x_2 + 0.9\cdot x_1 \\ 0.7\cdot x_2 + -0.05\cdot x_1 + -0.2\cdot x_3 \\ 0.8\cdot x_3 + -0.5\cdot x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 362 \\ 149 \\ 113 \end{pmatrix}$$

Gauß-Matrix: $G := \begin{pmatrix} 0.9 & -0.2 & 0 & 362 \\ -0.05 & 0.7 & -0.2 & 149 \\ 0 & -0.5 & 0.8 & 113 \end{pmatrix}$

Diagonalisieren: $\text{zref}(G) = \begin{pmatrix} 1.0 & 0.0 & 0 & 480.0 \\ 0 & 1.0 & 0.0 & 350.0 \\ 0 & 0 & 1.0 & 360.0 \end{pmatrix}$ $\qquad x_1 := 480 \quad x_2 := 350 \quad x_3 := 360$

Porduktionsvektor: $x := \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \qquad x = \begin{pmatrix} 480 \\ 350 \\ 360 \end{pmatrix}$

Teilaufgabe 2.4 (4 BE)
Untersuchen Sie allgemein, unter welcher Bedingung gilt:
Werk R gibt 70% seiner Produktion an den Markt ab.

$$E - A = \begin{pmatrix} 0.9 & -0.2 & 0 \\ -0.05 & 0.7 & -0.2 \\ 0 & -0.5 & 0.8 \end{pmatrix} \qquad (E - A) \cdot \begin{pmatrix} x_R \\ x_S \\ x_T \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -0.2 \cdot x_S + 0.9 \cdot x_R \\ 0.7 \cdot x_S + -0.05 \cdot x_R + -0.2 \cdot x_T \\ 0.8 \cdot x_T + -0.5 \cdot x_S \end{pmatrix}$$

Bedingung: $-0.2 \cdot x_S + 0.9 \cdot x_R = 0.7 \cdot x_R \text{ auflösen}, x_R \rightarrow x_S$

$\Rightarrow$ Die Produktionszahlen von R und S müssen gleich sein.