Abiturprüfung Berufliche Oberschule 2011
Mathematik 13 Technik - A II - Lösung

made with mathcad

Teilaufgabe 1.0

Gegeben ist die Funktion $f_a(x) = \ln\left(\frac{x^2 + a^2}{a \cdot x}\right)$ mit der Definitionsmenge $D = IR^+$ und $a \in IR^+$.

Teilaufgabe 1.1 (5 BE)

Begründen Sie, dass D die in IR maximale Definitionsmenge von f_a ist, und untersuchen Sie ob f_a Nullstellen besitzt.

$$\frac{x^2 + a^2}{a \cdot x} > 0 \;\left|\; \begin{array}{l} \text{auflösen}, x \\ \text{annehmen}, a > 0 \end{array} \right. \rightarrow 0 < x$$

Das heißt, die Argumentenfunktion ist positv für x>0.

Nullstellenbedingung:

$$\frac{x^2 + a^2}{a \cdot x} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + a^2 - a \cdot x = 0 \text{ auflösen}, x \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{a}{2} + \frac{\sqrt{3} \cdot a \cdot i}{2} \\ \frac{a}{2} - \frac{\sqrt{3} \cdot a \cdot i}{2} \end{pmatrix}$$

keine reelle Lösung

$\Rightarrow$ keine Nullstellen

Teilaufgabe 1.2 (5 BE)

Ermitteln Sie das Verhalten von $f_a(x)$ an den Rändern von D und begründen Sie, dass der Graph von f_a nur im I. Quadranten des Koordinatensystems verläuft.

$$\lim_{x \to 0^+} \ln\left(\frac{x^2 + a^2}{a \cdot x}\right) \rightarrow \infty \qquad \Rightarrow \qquad \text{vertikale Asymptote } x_0 := 0$$

(Zähler $\to a^2$, Nenner $\to 0^+$)

$$\lim_{x \to \infty} \ln\left(\frac{x^2 + a^2}{a \cdot x}\right) = \lim_{x \to \infty} \ln\left(\frac{1}{a} \cdot x + \frac{a}{x}\right) = \infty$$

(mit $\frac{1}{a} \cdot x \to \infty$, $\frac{a}{x} \to 0$)

Der Graph von f_a ist stetig und besitzt keine Nullstellen, also $f_a(x) > 0$, der Graph von f verläuft im 1. Quadranten.

Teilaufgabe 1.3 (7 BE)
Bestimmen Sie das Monotonieverhalten des Graphen von f_a sowie die Koordinaten und Art des Extrempunktes in Abhängigkeit von a.

[Mögliches Teilergebnis: $f'_a(x) = \dfrac{x^2 - a^2}{x\cdot\left(x^2 + a^2\right)}$]

Mathcad-Darstellung des Funktionsterms: $f(x,a) := \ln\left(\dfrac{x^2 + a^2}{a\cdot x}\right)$

Ableitungsfunktion: $f'(x,a) := \dfrac{d}{dx}f(x,a)$ $\quad f'(x,a) = \dfrac{2\cdot x}{a^2 + x^2} - \dfrac{1}{x}$

Umformungen: $f'(x,a) = \dfrac{2\cdot x^2 - \left(a^2 + x^2\right)}{x\cdot\left(a^2 + x^2\right)}$ $\quad f'(x,a) := \dfrac{x^2 - a^2}{x\cdot\left(x^2 + a^2\right)}$

Zähler abrufen: $z(x,a) = x^2 - a^2$

Nullstellen des Zählers: $z(x,a) = 0 \rightarrow x^2 - a^2 = 0$ **auflösen**, $x \rightarrow \begin{pmatrix} a \\ -a \end{pmatrix}$ keine Lösung

Vorzeichentabelle

		$x \neq 0$		$x = a$	
Zähler	**nicht definiert**		**neg.**		**pos**
Nenner	**nicht definiert**		**pos.**		**pos**
f '(x,a)	**nicht definiert**		**neg**		**pos**
G_f			**smf**		**sms**
				TP	

sms: streng monoton steigend

smf: streng monoton fallend

$f(a,a) = \ln(2)$

Tiefpunkt: **TP(a/ ln(2))**

In den folgenden Teilaufgabe wird **a = 1** gesetzt.

Teilaufgabe 1.4 (11 BE)
Zeigen Sie, dass der Graph von f_1 genau einen Wendepunkt besitzt, und berechnen Sie dessen Koordinaten (Rundung auf 2 Dezimalen).
Zeichnen Sie den Graphen von f_1 im Bereich $0 < x \leq 5$ unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse (**1 LE = 2 cm**).

Konkreter Funktionsterm: $f_1(x) := f(x,1)$ $\quad f_1(x) = \ln\left(\dfrac{x^2 + 1}{x}\right)$

1. Ableitung: $f'_1(x) := \frac{d}{dx} f_1(x)$ $\qquad f'_1(x) = \frac{x^2 - 1}{x \cdot (x^2 + 1)}$

2. Ableitung: $f''_1(x) := \frac{d}{dx} f'_1(x)$ $\qquad f''_1(x) = \frac{4 \cdot x^2 - x^4 + 1}{x^2 \cdot (x^2 + 1)^2}$

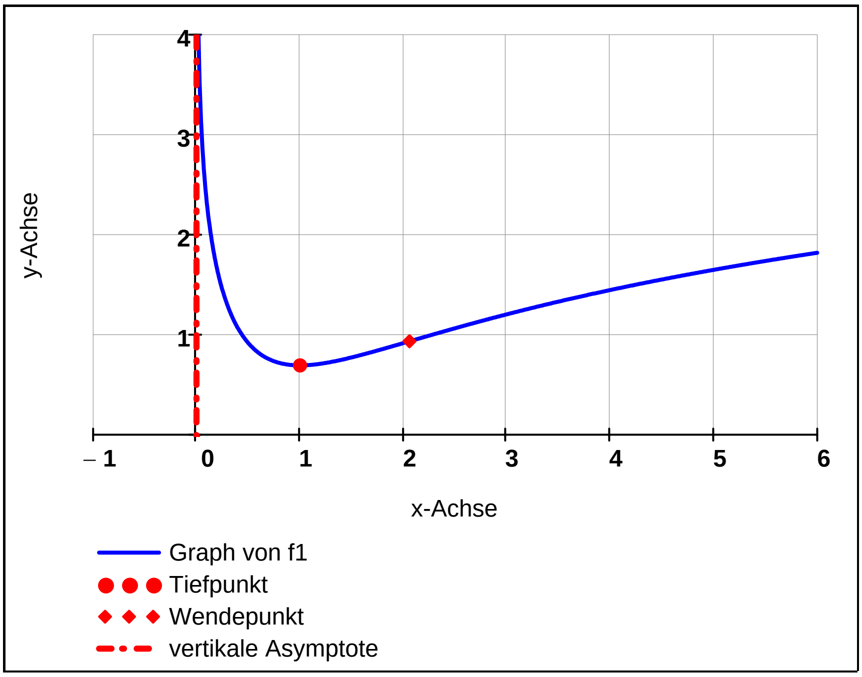
Zähler abrufen: $z''(x) := \text{numer}\left(f''_1(x)\right) = 4 \cdot x^2 - x^4 + 1$

Flachpunkte:

$$z''(x) = 0 \rightarrow 4 \cdot x^2 - x^4 + 1 = 0 \text{ auflösen}, x \rightarrow \begin{pmatrix} \sqrt{\sqrt{5} + 2} \\ \sqrt{2 - \sqrt{5}} \\ -\sqrt{\sqrt{5} + 2} \\ -\sqrt{2 - \sqrt{5}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.058 \\ 0.486i \\ -2.058 \\ -0.486i \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{Lösung} \\ \text{keine Lösung} \\ \text{keine Lösung} \\ \text{keine Lösung} \end{matrix}$$

$x_F := \sqrt{\sqrt{5} + 2}$ $\qquad f_1(x_F) = \ln\left(\frac{\sqrt{5} + 3}{\sqrt{\sqrt{5} + 2}}\right) = 0.934$

einfache Nullstelle $\Rightarrow$ **Wendepunkt WP(2,06 / 0,93)**



Gegeben ist weiter die Integralfunktion F durch $F(x) = \int_1^x f_1(t)\,dt$ mit $D_F = \mathbb{R}^+$.

Teilaufgabe 1.5 (6 BE)
Ermitteln Sie das Monotonieverhalten, das Krümmungsverhalten und die x-Koordinate des Wendepunkts des Graphen von F sowie die Anzahl der Nullstellen von F, ohne die Integration durchzuführen.

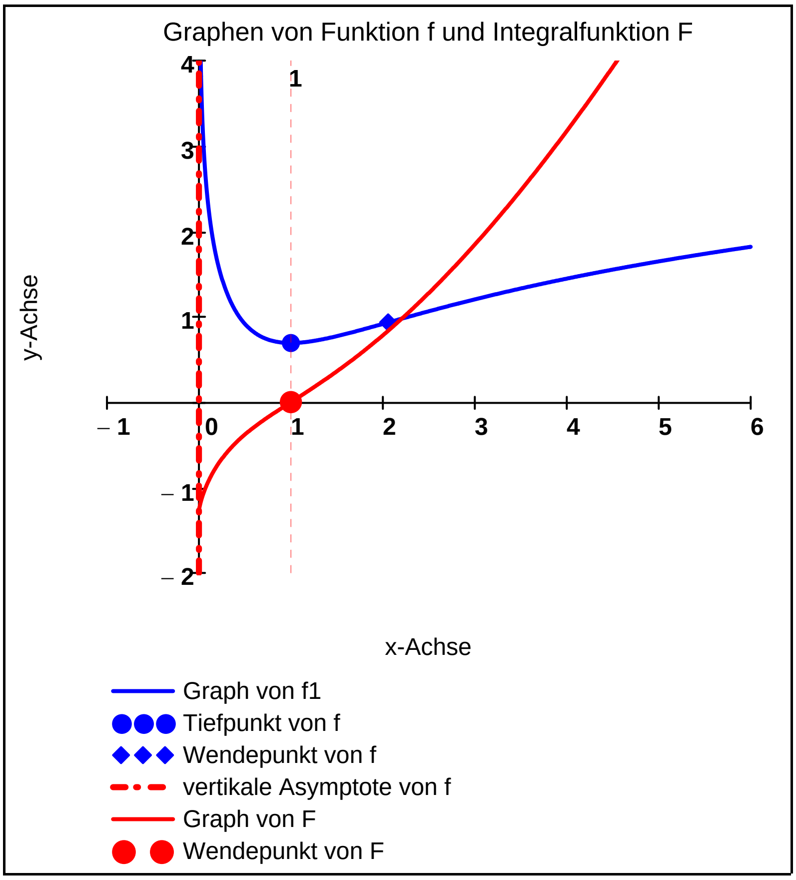
$F'(x) = f_1(x)$ $\quad F'(x) > 0$ für $x > 0$ $\quad \Rightarrow \quad$ G_F ist streng monoton steigend in D_F.

$F''(x) = f'_1(x)$ $\quad F''(x) < 0$ für $x < 1$ $\quad \Rightarrow \quad$ G_F ist rechtsgekrümmt in D_F.

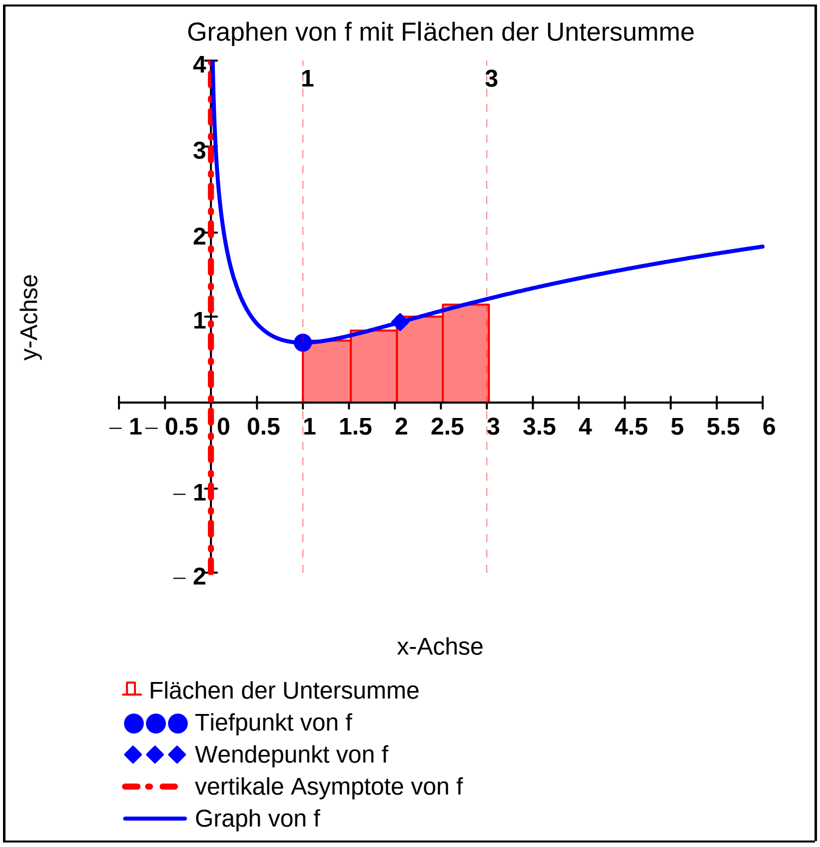
$F''(x) > 0$ für $x > 1$ $\quad \Rightarrow \quad$ G_F ist linksgekrümmt in D_F.

$\Rightarrow \quad$ Wendepunkt an der Stelle $x = 1$

$F(1) = \int_1^1 f_1(t)\,dt = 0$ $\quad \Rightarrow \quad$ $x = 1$ ist die einzige Nullstelle von F



Teilaufgabe 1.6 **(8 BE)**
Bestimmen Sie einen Näherungswert von $F(3)$ unter Verwendung einer Untersumme mit $\Delta x = 0.5$ auf zwei Nachkommastellen.
Ermitteln Sie eine integralfreie Darstellung von $F(x)$ und berechnen Sie $F(3)$ ebenfalls auf zwei Nachkommastellen.



$$F_{näherung} := 0.5 \cdot \left(f_1(1.25) + f_1(1.75) + f_1(2.25) + f_1(2.75)\right)$$

$$F_{näherung} = 1.84$$

Bestimmung der Stammfunktion:

$$F(x) = \int f_1(x)\,dx = \int \ln\left(\frac{x^2+1}{x}\right) \cdot 1\,dx$$

Partielle Integration: $F(x) = u(x) \cdot v(x) - \int v(x) \cdot u'(x)\,dx$

$u(x) := \ln\left(\frac{x^2+1}{x}\right) \quad \Rightarrow \quad u'(x) := \frac{d}{dx}u(x) \qquad u'(x) = \frac{x^2-1}{x\cdot\left(x^2+1\right)}$ vgl. $f_1(x)$!

$v'(x) = 1 \quad \Rightarrow \quad v(x) = x$

$$\Rightarrow \qquad F(x) = \ln\left(\frac{x^2+1}{x}\right)\cdot x - \int x\cdot\frac{x^2-1}{x\cdot\left(x^2+1\right)}\,dx$$

Polynomdivision: $\frac{x^2-1}{x^2+1}$ parfrac $\rightarrow 1 - \frac{2}{x^2+1}$

$$\Rightarrow \qquad F(x) = \ln\left(\frac{x^2+1}{x}\right)\cdot x - \int \left(1 - \frac{2}{x^2+1}\right)dx = \ln\left(\frac{x^2+1}{x}\right)\cdot x - x + 2\arctan(x) + C$$

$$\Rightarrow \qquad F(x,C) := \ln\left(\frac{x^2+1}{x}\right)\cdot x - x + 2\arctan(x) + C$$

$$\Rightarrow \qquad F_3 := F(3,0) - F(1,0) \qquad \boxed{F_3 = 1.85}$$

Teilaufgabe 2.0 (6 BE)
Eine Kugel der Masse m befindet sich in einer Flüssigkeit und wird zum Zeitpunkt $t = 0$ aus der Ruhe heraus losgelassen. Zum Zeitpunkt $t \geq 0$ hat die Kugel eine Strecke der Länge $s(t)$ durchfallen und besitzt zu diesem Zeitpunkt t die Geschwindigkeit $v(t) = s'(t)$ sowie die Beschleunigung $a(t)$. Im Folgenden werden zur Vereinfachung nur die Maßzahlen der physikalischen Größen verwendet. Für die Geschwindigkeit $v(t)$ der Kugel gilt die folgende Differentialgleichung: $m\cdot v'(t) = m\cdot g - k\cdot v(t)$, wobei g und k weitere physikalische Konstanten sind.

Teilaufgabe 2.1 (9 BE)
Bestimmen Sie $v(t)$ mit der Methode der Variation der Konstanten.

DGL: $m\cdot v'(t) = m\cdot g - k\cdot v(t)$

Umformung liefert die inhomogene DGL: $v'(t) + \frac{k}{m}\cdot v(t) = g$

1. Lösung der homogenen DGL

$v'(t) + \frac{k}{m} \cdot v(t) = 0 \quad \Rightarrow$ tiviale Lösung: $v(t) = 0$

Differentialquotient: $\frac{dv}{dt} + \frac{k}{m} \cdot v = 0$

Variable trennen: $\frac{dv}{v} = -\frac{k}{m} \cdot dt$ mit $v \neq 0$

Integrieren: $\int \frac{1}{v} \, dv = \int -\frac{k}{m} \, dt + C \rightarrow \ln(v) = C - \frac{k \cdot t}{m}$

kein Betrag, da $v \geq 0$ gilt:

Nach y auflösen: $\ln(v) = C - \frac{k \cdot t}{m}$ auflösen, $v \rightarrow e^{\frac{C \cdot m - k \cdot t}{m}}$

Mit $D = e^C > 0$ folgt: $v_h(t) = D \cdot e^{-\frac{k}{m} \cdot t}$ Lösung der homogenen DGL

2. Lösung der inhomogenen DGL

Variation der Konstanten $v_h(t) = D(t) \cdot e^{-\frac{k}{m} \cdot t}$

Ableitung durch Anwendung der Produktregel: $v'(t) = D'(t) \cdot e^{-\frac{k}{m} \cdot t} + D(t) \cdot e^{-\frac{k}{m} \cdot t} \cdot \left(-\frac{k}{m}\right)$

Einsetzen in die inhomogene DGL: $v'(t) + \frac{k}{m} \cdot v(t) = g$

$$D'(t) \cdot e^{-\frac{k}{m} \cdot t} + D(t) \cdot e^{-\frac{k}{m} \cdot t} \cdot \left(-\frac{k}{m}\right) + \frac{k}{m} \cdot \left(D(t) \cdot e^{-\frac{k}{m} \cdot t}\right) = g$$

$$\Leftrightarrow \quad D'(t) \cdot e^{-\frac{k}{m} \cdot t} = g \quad \Leftrightarrow \quad D'(t) = g \cdot e^{\frac{k}{m} \cdot t}$$

Integration: $$D(t) = \int g\cdot e^{\frac{k}{m}\cdot t}\,dt = g\cdot\frac{m}{k}\cdot e^{\frac{k}{m}\cdot t} + C$$

Spezielle Lösung mit $C = 0$ $$v_S(t) = g\cdot\frac{m}{k}\cdot e^{\frac{k}{m}\cdot t}\cdot e^{-\frac{k}{m}\cdot t} \text{ vereinfachen } \rightarrow v_S(t) = \frac{g\cdot m}{k}$$

3. Allgemeine Lösung der inhomogenen DGL

$$v(t) = v_S(t) + v_h(t) = \frac{g\cdot m}{k} + D\cdot e^{-\frac{k}{m}\cdot t}$$

4. Einsetzen der Anfangsbedingung

$$v(0) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{g\cdot m}{k} + D\cdot e^{-\frac{k}{m}\cdot 0} = 0 \text{ auflösen}, D \rightarrow -\frac{g\cdot m}{k}$$

$$\Leftrightarrow \quad v(t) = \frac{g\cdot m}{k} - \frac{g\cdot m}{k}\cdot e^{-\frac{k}{m}\cdot t}$$

$$\boxed{v(t) = \frac{g\cdot m}{k}\cdot\left(1 - e^{-\frac{k}{m}\cdot t}\right)}$$

Teilaufgabe 2.2.0

Für $v(t)$ einer speziellen Kugel gilt: $v(t) = 19.6\cdot\left(1 - e^{-0.50\cdot t}\right)$ für $t \geq 0$.

Teilaufgabe 2.2.1 (6 BE)

Zum Zeitpunkt t_1 mit $t_1 \geq 0$ besitzt die Kugel die Beschleunigung $a_1 = v'(t_1)$. Zeigen Sie, dass die Zeitdauer T_H, in der sich die Beschleunigung a_1 halbiert, unabhängig von t_1 ist und berechnen Sie T_H.

Funktionsterm: $$v(t) := 19.6\cdot\left(1 - e^{-0.50\cdot t}\right)$$

Beschleunigung: $$a(t) := \frac{d}{dt}v(t) = 9.8\cdot e^{-0.5\cdot t}$$

zu zeigen: $$a(t_1 + T_H) = \frac{1}{2}\cdot a(t_1)$$

$\Leftrightarrow \quad 9.8 \cdot e^{-0.5 \cdot (t_1 + T_H)} = \frac{1}{2} \cdot \left(9.8 \cdot e^{-0.5 \cdot t_1}\right)$

$\Leftrightarrow \quad 9.8 \cdot e^{-0.5 \cdot t_1} \cdot e^{-0.5 \cdot T_H} = \frac{9.8}{2} \cdot e^{-0.5 \cdot t_1}$

$\Leftrightarrow \quad e^{\frac{-1}{2} \cdot T_H} = \frac{1}{2}$ auflösen, $T_H \rightarrow \ln(4)$ unabhängig von t_1

$T_H := \ln(4)$

Teilaufgabe 2.2.2 **(3 BE)**
Ermitteln Sie die Streckenlänge, welche die Kugel bis zum Zeitpunkt **t = 2.5** durchfällt, auf eine Nachkommastelle.

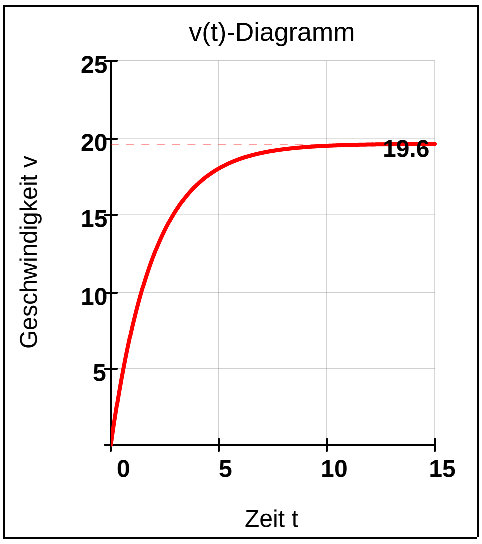
Streckenlänge allgemein: $s(t) = \int v(t)\, dt + C = \int 19.6 \cdot \left(1 - e^{-0.50 \cdot t}\right) dt + C$

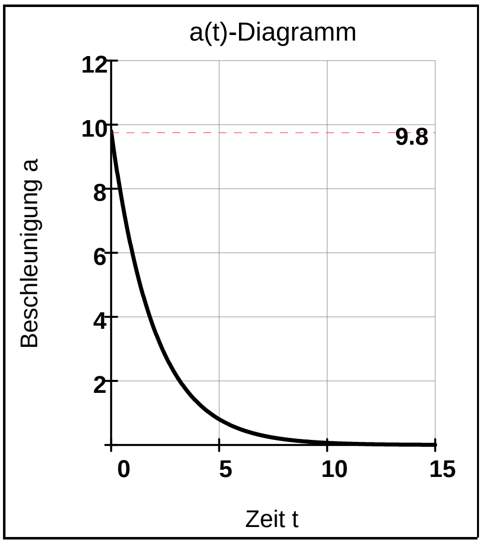
Streckenlänge konkret: $s_{2.5} := \left[\int_0^{2.5} 19.6 \cdot \left(1 - e^{-0.50 \cdot t}\right) dt\right]$ $\quad s_{2.5} = 21.0$

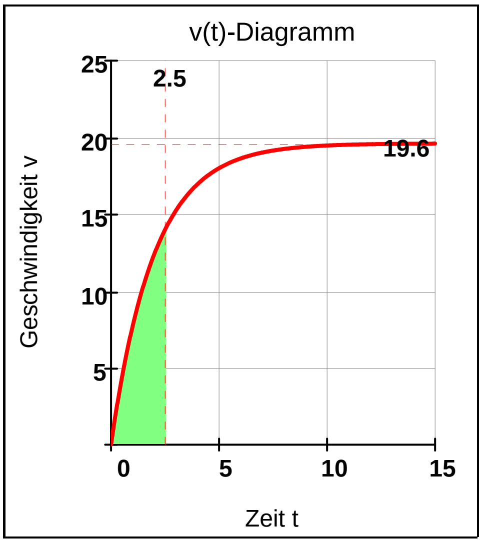
Folgende Darstellungen in der Prüfung nicht verlangt:

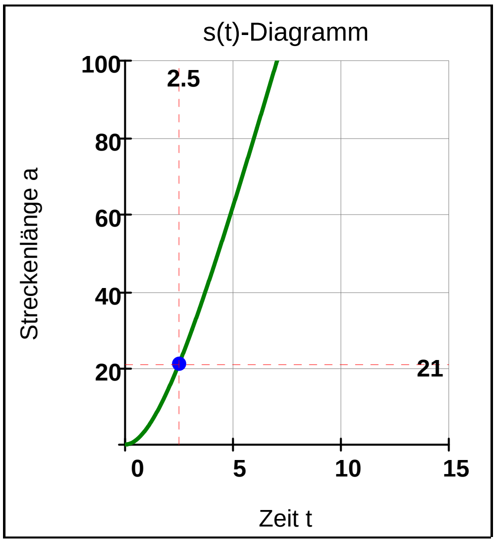
$$v(t) := 19.6 \cdot \left(1 - e^{-0.50 \cdot t}\right) \qquad a(t) := \frac{d}{dt} v(t) \rightarrow 9.8 \cdot e^{-0.5 \cdot t}$$

$$s(t) := \int_0^t v(\tau)\, d\tau = \int_0^t -19.6 \cdot e^{-0.5 \cdot \tau} + 19.6\, d\tau \qquad s(t) = 19.6 \cdot t + 39.2 \cdot e^{-0.5 \cdot t} - 39.2$$









$s(2.5) = 21.031$