Abiturprüfung Berufliche Oberschule 2011
Mathematik 13 Technik - B I - Lösung

made with mathcad

Teilaufgabe 1.0
Am Flughafen muss jeder Passagier durch eine Sicherheitsschleuse, in die ein Metalldetektor eingebaut ist. Das Gerät soll ein akustisches Signal von sich geben, wenn der Passagier Metall bei sich trägt. Vor dem Durchqueren der Sicherheitsschleuse soll jeder Passagier alle metallischen Gegenstände abgeben. Aus Erfahrung weiß man, dass 8% aller Passagiere nicht alle metallischen Gegenstände abgeben.
Der Metalldetektor funktioniert mit der Wahrscheinlichkeit 90% richtig, wenn ein Passagier noch Metall bei sich trägt. Wenn ein Passagier kein Metall bei sich trägt, gibt der Detektor mit der Wahrscheinlichkeit von 15% irrtümlicherweise ein akustisches Signal von sich.

Teilaufgabe 1.1 (6 BE)
Ein Passagier geht durch die Sicherheitsschleuse.
a) Bestimmen Sie, mit welcher Wahrscheinlichkeit kein Signal ertönt.
b) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Passagier noch einen metallischen Gegenstand bei sich hat, falls dabei das Signal des Metalldetektors ertönt.

Bezeichnungen für die Vierfeldertafel:

M: Passagier hat noch Metall bei sich
nM: Passagier hat kein Metall bei sich
S: Detektor gibt ein akustisches Signal
nS: Detektor gibt kein akustisches Signal

Wahrscheinlichkeiten der gegebenen Ereignisse:

$P_M := 0.08$ $\qquad$ $P_{nM} := 0.92$

Wahrscheinlichkeiten der Durchschnittsereignisse:

$P_{M\cap S} := 0.08 \cdot 0.9 = 0.072$ $\qquad$ $P_{nM\cap S} := 0.92 \cdot 0.15 = 0.138$

Ausgabe der Vierfeldertafel mit den definierten Wahrscheinlichkeiten:

$$\text{Tafel} := \begin{pmatrix} \text{"---------"} & \text{"S"} & \text{"nS"} & \text{"Summe"} \\ \text{"M"} & 0.072 & \text{"x"} & 0.08 \\ \text{"nM"} & 0.138 & \text{"x"} & 0.92 \\ \text{"Summe"} & \text{"x"} & \text{"x"} & 1 \end{pmatrix}$$

Ausgabe der Vierfeldertafel mit vervollständigten Wahrscheinlichkeiten:

$$\text{Ergebnis} := \begin{pmatrix} \text{"---------"} & \text{"S"} & \text{"nS"} & \text{"Summe"} \\ \text{"M"} & 0.072 & 0.008 & 0.08 \\ \text{"nM"} & 0.138 & 0.782 & 0.92 \\ \text{"Summe"} & 0.21 & 0.79 & 1 \end{pmatrix}$$

Auslesen aus der Vierfeldertafel:

a) Wahrscheinlichkeit dafür, dass kein Signal ertönt.

$P_{nS} := Ergebnis_{3,2}$ $\qquad$ $P_{nS} = 0.79$

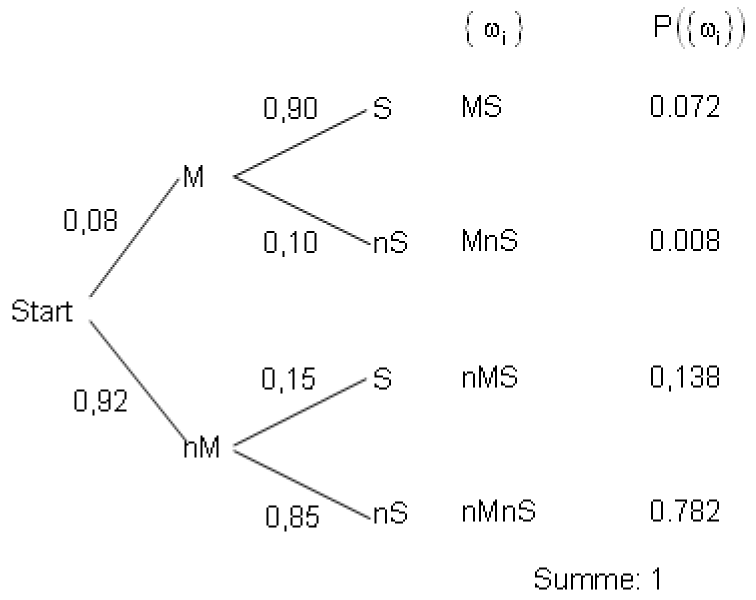
b) Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Passagier noch einen metallischen Gegenstand bei sich hat, falls dabei das Signal des Metalldetektors ertönt.

$P_{M \cap S} := Ergebnis_{1,1}$ $\qquad$ $P_{M \cap S} = 0.072$

$P_S := Ergebnis_{3,1}$ $\qquad$ $P_S = 0.21$

Bedingte Wahrscheinlichkeit: $\quad P_{S\_M} := \dfrac{P_{M \cap S}}{P_S}$ $\qquad$ $P_{S\_M} = 0.343$

Alternativ Lösung mit dem Baumdiagramm:



Berechnungen wie oben.

Teilaufgabe 1.2 (3 BE)
Es gehen zehn Passagiere nacheinander durch die Sicherheitsschleuse. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ertönt dabei genau zweimal das Signal, und zwar bei zwei aufeinander folgenden Passagieren.

SSxxxxxxxx $\quad$ **xSSxxxxxxx** $\quad$ **xxSSxxxxxx** $\quad$ **xxxSSxxxxx** $\quad$ **xxxxSSxxxx**

xxxxxSSxxx $\quad$ **xxxxxxSSxx** $\quad$ **xxxxxxxSSx** $\quad$ **xxxxxxxxSS**

Es gibt also 9 Möglicheiten, dass das Signal zweimal hintereinander ertönt.

$P(SS) := 9 \cdot 0.21^2 \cdot 0.79^8$ $\qquad$ $P(SS) = 0.06021$

Teilaufgabe 2.0
Die Fluggesellschaft *BOS Air* hat Flugzeuge, die in der Economy-Class jeweils 460 Plätze besitzen. *BOS Air* hat die Erfahrung gemacht, dass im Durchschnitt 8% aller Buchungen storniert werden. Daher nimmt *BOS Air* für jeden Flug 495 Buchungen für die 460 Plätze der Economy-Class entgegen.

Teilaufgabe 2.1 (2 BE)
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass von den 495 Buchungen für einen Flug genau 35 storniert werden.

Binomialverteilung: $\mathbf{B(n,p,k)} = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} = \binom{495}{35} \cdot 0.08^{35} \cdot 0.92^{460}$

Berechnung mit dem Taschenrechner!

Gegeben: $n := 495 \qquad p := 0.08$

Mathcad-Darstellung: $B(k) := \mathrm{dbinom}(k, n, p) \qquad B(35) = 0.05163$

Die Wahrscheinlichkeit beträgt etwa 5,2%.

Teilaufgabe 2.2 (4 BE)
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei einem Flug die Anzahl der Plätze der Economy-Class nicht ausreicht.

X: Anzahl der bei einem Flug tatsächlich benötigten Plätze in der Economy-Class.

Gesamtzahl: $n := 495$ Wahrscheinlichkeit für ***keine Stornierung***: $p := 0.92$

Erwartungswert: $\mu := n \cdot p \qquad \mu = 455.4$

Varianz: $Var_X := n \cdot p \cdot (1-p) \qquad Var_X = 36.432$ ist > 9, Normalverteilung als Näherung erlaubt.

Standardabweichung: $\sigma := \sqrt{Var_X} \qquad \sigma = 6.036$

$$P(X > 460) = 1 - P(X \le 460) = 1 - F(460) = 1 - \Phi\left[\frac{(x_1 - \mu) + 0.5}{\sigma}\right]$$

Mathcaddefinition der Normalverteilung: $\Phi(t) := \mathrm{knorm}(t)$ (Ansonsten Tafelwerk)

$X := 460 \qquad \Phi_{460} := \Phi\left[\frac{(X-\mu) + 0.5}{\sigma}\right] = 0.80$

$P_{460} := 1 - \Phi_{460} \qquad P_{460} = 0.20$

Die Wahrscheinlichkeit, dass die Plätze nicht ausreichen, beträgt 20%.

Teilaufgabe 2.3 (3 BE)
Für einen Flug der *BOS Air* stehen 475 Fluggäste mit gültigem Ticket der Economy-Class zum Abflug bereit, darunter auch 25 Mitglieder eines Sportvereins. Die Flugggesellschaft *BOS Air* wählt nun 15 der 475 Fluggäste zufällig aus und lässt diese ohne Aufpreis in der Business-Class mitfliegen. Bestimmen Sie die Wahrscheinichkeit dafür, dass genau zwei Mitglieder des Sportvereins in den Genuss der besseren Klasse kommen.

Hypergeometrische Verteilung:

$$P(X = k) = \frac{\binom{K}{k}\cdot\binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}} = \frac{\binom{25}{2}\cdot\binom{450}{13}}{\binom{475}{15}}$$

Berechnung mit dem Taschenrechner!

Gegeben: $K := 25$ $\quad N := 475$ $\quad n := 15$

Mathcad-Darstellung: $H(k) := \mathrm{dhypergeom}(k, K, N - K, n)$ $\quad H(2) = 0.145$

Die Wahrscheinlichkeit für den Genuss der besseren Klasse beträgt etwa 14,5%.

Teilaufgabe 2.4 (9 BE)
Die Fluggesellschaft will ihr Risiko, dass bei einem Flug die Anzahl der Economy-Class nicht ausreicht, deutlich verringern. Dieses Riskio soll in Zukunft weniger als 1% betragen. Bestimmen Sie, wie viele Buchungen *BOS Air* in Zukunft höchstens für die 460 Plätze der Economy-Class entgegennehmen darf.

X: Anzahl der bei einem Flug tatsächlich benötigten Plätze in der Economy-Class.

Plätze der Economy-Class $n_0 := 460$

Wahrscheinlichkeit für die nicht stornierten Buchungen: $p := 0.92$

$\mu = n \cdot p = 0.92 \cdot n$

$Var_X = n \cdot p \cdot (1 - p)$ $\qquad Var_X = 0.074 \cdot n$ $\quad > 9$, falls $n \geq 460$, Näherung durch Normalverteilung

$$P(X > 460) < 0.01 \quad \Leftrightarrow \quad 1 - P(X \leq 460) < 0.01 \quad \Leftrightarrow \quad P(X \leq 460) > 0.99 \quad \Leftrightarrow \quad F(460) > 0.99$$

Näherung:

$$\Phi\left(\frac{X - \mu + 0.5}{\sigma}\right) > 0.99 \qquad \Phi\left(\frac{460 - 0.92 \cdot n + 0.5}{\sqrt{0.074 \cdot n}}\right) > 0.99$$

Tafelwerk: $$\frac{460.5 - 0.92 \cdot n}{\sqrt{0.074 \cdot n}} > 2.33 \qquad (*)$$

Mathcadlösung: Inverse kumulative Normalverteilung:

$t(k) := \text{qnorm}(k, 0, 1) \qquad k_1 := 0.99 \qquad t(k_1) = 2.33$

Weiter mit **(*)**

$\Leftrightarrow \qquad 460.5 - 0.92 \cdot n - 2.33 \cdot \sqrt{0.074} \cdot \sqrt{n} > 0$

$\Leftrightarrow \qquad 0.92 \cdot n + 2.33 \cdot \sqrt{0.074} \cdot \sqrt{n} - 460.5 < 0$

Gleichung: $0.92 \cdot n + 2.33 \cdot \sqrt{0.074} \cdot \sqrt{n} - 460.5 = 0$

Substitution: $\sqrt{n} = z$

$$0.92 \cdot z^2 + 2.33 \cdot \sqrt{0.074} \cdot z - 460.5 = 0 \text{ auflösen}, z \rightarrow \begin{pmatrix} 22.03100873506171196 \\ -22.71995278474331591 \end{pmatrix} \begin{matrix} z = 22.03 \\ \text{keine Lösung} \end{matrix}$$

Resubstitution: $n_0 := 22.03^2 \qquad n_0 = 485.321$ Es muss gelten: $n < n_0$

Gerundet: $n_{max} := \text{floor}(n_0) \qquad n_{max} = 485$

Die Fluggesellschaft darf also höchstens 485 Buchungen entgegennehmen.

Teilaufgabe 3 (8 BE)
Lange zurückliegende Umfragungen in einem Land ergaben, dass höchstens 55% der Bevölkerung dieses Landes die Fluggesellschaft *BOS Air* kennen. *BOS Air* möchte einen höheren Bekanntheitsgrad haben. Um zu entscheiden, ob dazu eine Werbekampagne nötig ist, testet die Fluggesellschaft die Nullhypothese H_0: ***Der Anteil p der Personen, die diese Fluggesellschaft in dem Land kennen, beträgt höchstens 55%*** durch eine neue Umfrage bei 2500 zufällig ausgewählten dieses landes. Das Signifikanzniveau des Test soll 5% betragen.
Geben Sie für diesen Test die Testgröße und die Gegenhypothese an und ermitteln Sie den Annahme- und Ablehnungsbereich der Nullhypothese.

Testgröße: Personen, die die Fluggesellschaft kennen unter $N := 2500$

Testart: Rechtsseitiger Signifikanztest; $p := 0.55$

Nullhypothese H_0: $p_0 \le p \rightarrow p_0 \le 0.55$

Gegenhypothese H_1: $p_1 > p \rightarrow p_1 > 0.55$

Signifikanzniveau: $\alpha_S := 0.05$

Annahmebereich: $A = \{0, 1, 2, \ldots, k\}$

Ablehnungsbereich: $\overline{A} = \{k + 1, k + 2, \ldots, N\}$

Lösung mit Tafelwerk:

$1 - P_A \le 0.05 \quad \Leftrightarrow \quad P_A \ge 0.95 \quad \Leftrightarrow \quad F(k) \ge 0.95$

Kumulative Binomialverteilung: $F(k) = \sum_{i=0}^{k} B(2500, 0.55, i)$ Nicht im Tafelwerk

$\mu := N \cdot p \quad \mu = 1375 \qquad Var_X := N \cdot p \cdot (1 - p) \qquad Var_X = 618.750 \quad > 9$

Näherung über Normalverteilung möglich:

$\Phi\left(\frac{k - \mu + 0.5}{\sigma}\right) \ge 0.95 \quad \Leftrightarrow \quad \Phi\left(\frac{k - 1375.5}{\sqrt{618.75}}\right) \ge 0.95$

Tafelwerk: $\frac{k - 1375.5}{\sqrt{618.75}} \ge 1.65$

Mathcadlösung: Inverse kumulative Normalverteilung:

$t(k) := qnorm(k, 0, 1) \qquad k_1 := 0.95 \qquad t(k_1) = 1.645$

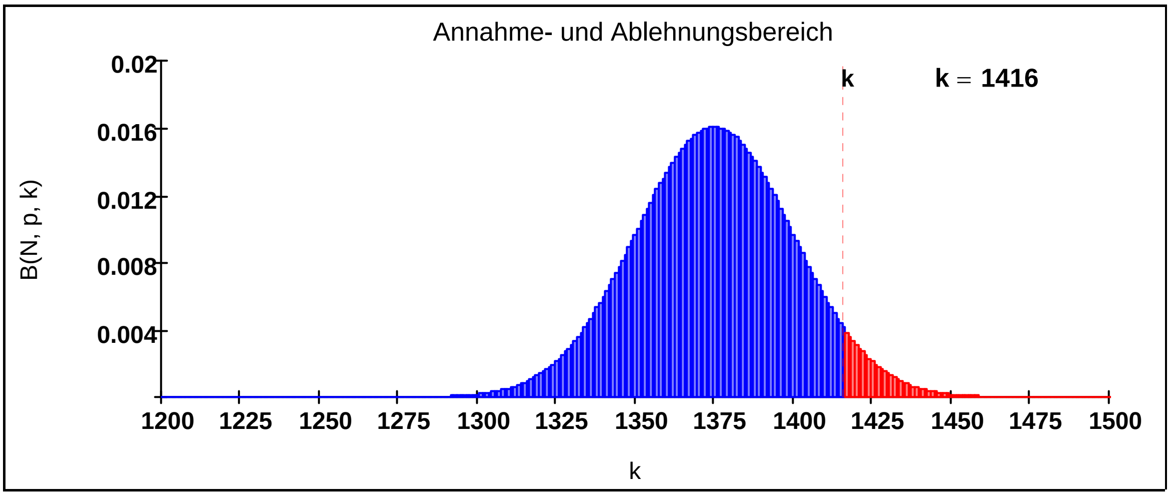
Lösung der Ungleichung:

$\frac{k - 1375.5}{\sqrt{618.75}} \ge 1.645 \;\left|\; \begin{array}{l} \text{auflösen}, k \\ \text{Gleitkommazahl}, 4 \end{array}\right. \rightarrow 1416.0 \le k < \infty \quad \Rightarrow \quad k := 1416$

Annahmebereich: $A = \{ 0, 1, 2, \ldots, 1416 \}$

Ablehnungsbereich: $\overline{A} = \{ 1416; 1417; \; ...; 2500 \}$

Darstellung



Teilaufgabe 4 (5 BE)
Für einen Flug stehen zweimotorige und viermotorige Flugzeuge zur Auswahl. Jeder Motor dieser Flugzeuge funktioniert unabhängig von den anderen während eines Fluges mit der Wahrscheinlichkeit q nicht. Ein Flugzeug stürzt beim Flug ab, wenn mehr als die Hälfte der Motoren ausfällt. Bestimmen Sie die Werte von q, für die bei einem Flug eine zweimotorige Maschine einer viermotorigen Maschine vorzuziehen ist.

q: Wahrscheinlichkeit, mit der ein Flugzeugmotor während des Fluges ausfällt, wobei $q \in]\,0\,;\,1\,[$.

Zweimotorige Maschine stürzt ab:

Wahrscheinlichkeit, dass mehr als die Hälfte der Motoren fällt aus, also alle beide: $P_2 = q^2$

Viermotorige Maschine stürzt ab:

Wahrscheinlichkeit, dass mehr als die Hälfte der Motoren fällt aus, also drei oder vier:

drei Motoren fallen aus:	**xMMM_MxMM_MMxM_MMMx**	4 Möglichkeiten	$4 \cdot q^3 \cdot (1 - q)$
vier Motoren fallen aus:		1 Möglichkeit	q^4

Insgesamt: $P_4 = q^4 + 4 \cdot q^3 \cdot (1 - q)$

Ansatz: $P_2 < P_4$

$\Leftrightarrow \quad q^2 < q^4 + 4 \cdot q^3 \cdot (1 - q) \quad \Leftrightarrow \quad q^2 < 4 \cdot q^3 - 3 \cdot q^4$

$\Leftrightarrow \quad 3 \cdot q^4 - 4 \cdot q^3 + q^2 < 0 \quad \Leftrightarrow \quad q^2 \cdot \left(3 \cdot q^2 - 4 \cdot q + 1\right) < 0$

$\Leftrightarrow \quad 3 \cdot q^2 - 4 \cdot q + 1 < 0 \ \textbf{auflösen}, q \ \rightarrow \frac{1}{3} < q < 1$

Das heißt, dass bei einer Wahrscheinlichkeit von $q > \frac{1}{3}$ die zweimotorige der viermotorigen Maschine vorzuziehen ist.