

Abiturprüfung Berufliche Oberschule 2011 Mathematik 13 Technik - B II - Lösung



Für Triebwerke eines Raumtransporters werden Metallhülsen hergestellt, die mit sehr geringer Toleranz gefertigt werden müssen. Vom Hersteller der Hülsen werden dabei Pakete mit je 20 Hülsen an den Triebwerkshersteller geliefert.

Teilaufgabe 1.0

Bei der Eingangskontrolle werden aus jeder Packung nacheinander und ohne Zurücklegen zwei Teile entnommen und vermessen. Die Packung wird nur angenommen, wenn beide Teile innerhalb der Toleranz liegen, wobei jede Packung eine unbekannte Anzahl von Teilen enthält, die nicht innerhalb der Toleranz liegen. Diese Teile nennt man *nicht maßhaltig*.

Teilaufgabe 1.1 (5 BE)

Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeiten, dass solch eine Packung angenommen wird, wenn in ihr 1, 4 bzw. 7 nicht maßhaltige Teile enthalten sind und nehmen Sie zu dieser Art von Prüfung kurz Stellung. [Teilergebnis: $P_4 = 0.6316$]

Gegeben: $N = 20$ $k = 2$

Wahrscheinlichkeit, zwei Teile aus 20 auszuwählen: $\binom{20}{2} = \frac{20 \cdot 19}{1 \cdot 2}$

Ein nicht maßhaltiges Teil: $\binom{19}{2} = \frac{19 \cdot 18}{1 \cdot 2}$

Wahrscheinlichkeiten:

$$P_1 = \frac{\binom{19}{2}}{\binom{20}{2}} = \frac{\frac{19 \cdot 18}{1 \cdot 2}}{\frac{20 \cdot 19}{1 \cdot 2}}$$

$$P_1 := \frac{19 \cdot 18}{20 \cdot 19}$$

$$P_1 = 0.9000$$

$$P_4 = \frac{\binom{16}{2}}{\binom{20}{2}} = \frac{\frac{16 \cdot 15}{1 \cdot 2}}{\frac{20 \cdot 19}{1 \cdot 2}}$$

$$P_4 := \frac{16 \cdot 15}{20 \cdot 19}$$

$$P_4 = 0.6316$$

$$P_7 = \frac{\binom{13}{2}}{\binom{20}{2}} = \frac{\frac{13 \cdot 12}{1 \cdot 2}}{\frac{20 \cdot 19}{1 \cdot 2}}$$

$$P_7 := \frac{13 \cdot 12}{20 \cdot 19}$$

$$P_7 = 0.4105$$

Selbst bei 7 mangelhaften Teilen wird die Lieferung mit einer 41%-igen Wahrscheinlichkeit angenommen. Testart also nicht sinnvoll.

Teilaufgabe 1.2 (3 BE)

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass von einer Lieferung aus 12 Paketen mindestens 10 angenommen werden, wenn jedes Paket 4 nicht maßhaltige Teile enthält.

Wahrscheinlichkeit für 4 nicht maßhaltige Teile: $p := 0.6316$ $q := 1 - p$ $q = 0.3684$

$$P(\text{Annahme}) = P_A = \binom{12}{12} \cdot p^{12} \cdot q^0 + \binom{12}{11} \cdot p^{11} \cdot q^1 + \binom{12}{10} \cdot p^{10} \cdot q^2$$

$$P_A := 0.6316^{12} + 12 \cdot 0.6316^{11} \cdot 0.3684 + 66 \cdot 0.6316^{10} \cdot 0.3684^2$$

$$P_A = 0.1227$$

Teilaufgabe 2.0

Der Fehler einer Hülse kann zwei Gründe haben:

Entweder stimmt die Innenabmessung nicht (Mangel 1) oder die Außenabmessung ist falsch (Mangel 2).

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Teil nicht maßhaltig ist, beträgt 0,107. Dabei betragen die Wahrscheinlichkeiten, dass Mangel 1 auftritt, 0,050 und, dass nur Mangel 1 auftritt, 0,047.

Teilaufgabe 2.1 (4 BE)

Erstellen Sie aus diesen Angaben eine vollständige Vier-Felder-Tafel und berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, mit der eine Hülse mit dem Mangel 1 auch noch den Mangel 2 aufweist.

Bezeichnungen für die Vierfeldertafel:

M1: Mangel 1 tritt auf

nM1: Mangel 1 tritt nicht auf

M2: Mangel 2 tritt auf

nM2: Mangel 2 tritt nicht auf

Gegeben: sind die Wahrscheinlichkeiten

Teil nicht maßhaltig: $P_{M1 \cup M2} := 0.107$

Mangel 1 tritt auf: $P_{M1} := 0.050$

Lösung:

Berechnung von Wahrscheinlichkeiten:

Nur Mangel 1 tritt auf: $P_{M1 \cap M2} := 0.050 - 0.047$ $P_{M1 \cap M2} = 0.003$

$$P_{M1 \cup M2} = P_{M1} + P_{M2} - (P_{M1 \cap M2}) \Rightarrow P_{M2} = P_{M1 \cup M2} - P_{M1} + P_{M1 \cap M2}$$

Mangel 2 tritt auf: $P_{M2} := 0.107 - 0.050 + 0.003$ $P_{M2} = 0.060$

Ausgabe der Vierfeldertafel mit den definierten Wahrscheinlichkeiten:

$$\text{Tafel} := \begin{pmatrix} \text{"-----"} & \text{"M2"} & \text{"nM2"} & \text{"Summe"} \\ \text{"M1"} & \text{"x"} & \mathbf{0.047} & \mathbf{0.050} \\ \text{"nM1"} & \text{"x"} & \text{"x"} & \text{"x"} \\ \text{"Summe"} & \mathbf{0.060} & \text{"x"} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

Ausgabe der Vierfeldertafel mit vervollständigten Wahrscheinlichkeiten:

$$\text{Ergebnis} := \begin{pmatrix} \text{"-----"} & \text{"M2"} & \text{"nM2"} & \text{"Summe"} \\ \text{"M1"} & \mathbf{0.003} & \mathbf{0.047} & \mathbf{0.050} \\ \text{"nM1"} & \mathbf{0.057} & \mathbf{0.893} & \mathbf{0.950} \\ \text{"Summe"} & \mathbf{0.060} & \mathbf{0.940} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

Bedingte Wahrscheinlichkeit:

$$P_{M1_M2} = \frac{P(M1 \cap M2)}{P(M1)} \qquad P_{M1_M2} := \frac{0.003}{0.050} \qquad P_{M1_M2} = 0.060$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass die Hülse bei Mangel 1 auch noch Mangel 2 aufweist, beträgt 6.0%.

Teilaufgabe 2.2 (2 BE)

Untersuchen Sie, ob die beiden Mängel stochastisch unabhängig sind.

$$P_{M1 \cap M2} = 0.003$$

$$P_{M1} \cdot P_{M2} = 0.050 \cdot 0.060 = 0.003$$

$$P_{M1 \cap M2} = P_{M1} \cdot P_{M2} \quad \Rightarrow \quad M1 \text{ und } M2 \text{ sind stochastisch unabhängig.}$$

Teilaufgabe 3.0

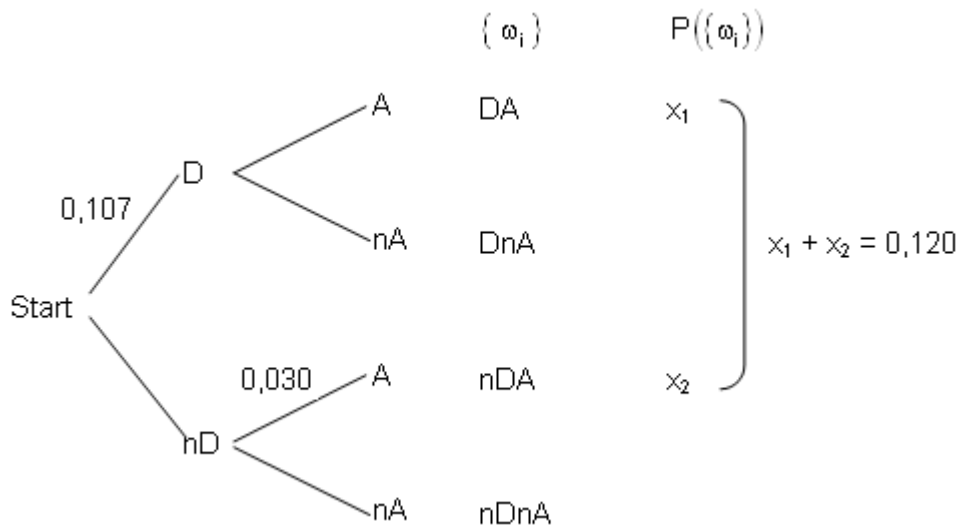
Vor der Endkontrolle sind weiterhin 10,7% der Hülsen nicht maßhaltig. Während der Endkontrolle wird eine Hülse mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,120 als Ausschuss aussortiert. Dabei wird allerdings auch mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,030 eine maßhaltige Hülse als Ausschuss erfasst.

Teilaufgabe 3.1 (5 BE)

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine nicht maßhaltige Hülse aussortiert wird.

Bezeichnungen für das Baumdiagramm

- D:** Hülse defekt, also nicht maßhaltig
- nD:** Hülse nicht defekt, also maßhaltig
- A:** Hülse wird als Ausschuss aussortiert
- nA:** Hülse wird nicht als Ausschuss aussortiert



Es gilt nach den Pfadregeln:

$$0.107 \cdot x + (1 - 0.1079) \cdot 0.030 = 0.120 \quad \left| \begin{array}{l} \text{auflösen, } x \\ \text{Gleitkommazahl, } 3 \end{array} \right. \rightarrow 0.871 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{P_D(A) = 0.871}$$

Die Wahrscheinlichkeit für das Aussortieren einer nicht maßhaltigen Hülse beträgt 87,1%.

Teilaufgabe 3.2 (3 BE)

Ermitteln Sie, mit welcher Wahrscheinlichkeit eine aussortierte Hülse wirklich falsche Abmessungen besitzt.

Bedingte Wahrscheinlichkeit und Regel von Bayes:

$$P_{A(D)} = P_{A_D} = \frac{P(A \cap D)}{P(A)} = \frac{P_D(A) \cdot P(D)}{P(A)} \quad P_{A_D} := \frac{0.871 \cdot 0.107}{0.120} \quad \mathbf{P_{A_D} = 0.777}$$

Teilaufgabe 4 (7 BE)

Pro Tag prüft man 100 Hülsen, die aussortierten Teile werden in eine Gitterbox gelegt, die 30 Teile fasst. Die Wahrscheinlichkeit für die Aussortierung eines Teils beträgt 0,12. Bestimmen Sie die Anzahl der Tage, nach der die Gitterbox mit mindestens 99% Wahrscheinlichkeit voll ist.

X: Anzahl der getesteten Hülsen. $n_0 := 100$

Wahrscheinlichkeit für die Aussortierung: $p := 0.12$

$$P(X \geq 30) \geq 0.99 \Leftrightarrow 1 - P(X \leq 29) \geq 0.99 \Leftrightarrow P(X \leq 29) \leq 0.01$$

$$\Leftrightarrow F(29) \leq 0.01 \Leftrightarrow \sum_{i=0}^{29} B(100, 0.01, i) \leq 0.01 \quad \text{nicht im Tafelwerk}$$

$$\mu = n \cdot p = 0.12 \cdot n$$

$$\text{Var}_X = n \cdot p \cdot (1 - p) \quad \text{Nebenrechnung: } 0.12 \cdot (1 - 0.12) = 0.1056$$

$\text{Var}_X = 0.1056 \cdot n > 9$, falls $n_0 = 100$, Näherung durch Normalverteilung

$$\Phi\left(\frac{k - \mu + 0.5}{\sigma}\right) \leq 0.01 \quad \Leftrightarrow \quad \Phi\left(\frac{29 - 0.12 \cdot n + 0.5}{\sqrt{0.1056 \cdot n}}\right) \leq 0.01$$

$$\text{Tafelwerk (Quantile): } \frac{29 - 0.12 \cdot n + 0.5}{\sqrt{0.1056 \cdot n}} \leq -2.326$$

$$29.5 - 0.12 \cdot n + 2.326 \cdot \sqrt{0.1056} \cdot \sqrt{n} \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad 0.12 \cdot n - 2.326 \cdot \sqrt{0.1056} \cdot \sqrt{n} - 29.5 \geq 0$$

$$\text{Substitution: } \sqrt{n} = z$$

Gleichung:

$$0.12 \cdot z^2 - 2.326 \cdot \sqrt{0.1056} \cdot z - 29.5 = 0 \quad \left| \begin{array}{l} \text{auflösen, } z \\ \text{Gleitkommazahl, } 5 \end{array} \right. \rightarrow \begin{pmatrix} 19.142 \\ -12.843 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} z \geq 19.142 \\ \text{keine Lsg.} \end{array}$$

$$\text{Resubstitution: } n = z^2 \quad n := 19.142^2 \quad n = 366.416 \quad \text{Hülsen}$$

Pro Tag werden 100 Hülsen geprüft, also ist nach 4 Tagen die Gitterbox zu 99% gefüllt.

Teilaufgabe 5

Verantwortlich für die nicht maßhaltigen Hülsen ist die Werkzeugabnutzung bei der Herstellung. Ein neuer Werkzeugfabrikant verspricht eine Senkung der Wahrscheinlichkeit für eine nicht maßhaltige Hülse auf weniger als 7% (Gegenhypothese). In einem einseitigen Test an 300 Teilen soll diese Behauptung überprüft werden

Teilaufgabe 5.1 (7 BE)

Berechnen Sie den Ablehnungsbereich und den Annahmehbereich der zugehörigen Nullhypothese bei einem Signifikanzniveau von 1%.

Testgröße: Anzahl der fehlerhaften Teile bei $N := 300$ überprüften Hülsen

Testart: Linksseitiger Signifikanztest; $p := 0.07$

Nullhypothese H_0 : $p_0 \geq p \rightarrow p_0 \geq 0.07$

Gegenhypothese H_1 : $p_1 < p \rightarrow p_1 < 0.07$

Signifikanzniveau: $\alpha_S := 1\%$

Lösung mit Tafelwerk:

Annahmehbereich: $A = \{ k + 1, k + 2, \dots, N \}$

Ablehnungsbereich: $\bar{A} = \{ 0, 1, 2, 3, \dots, k \}$

Wahrscheinlichkeit: $P(\bar{A}) = F(k) = \sum_{i=0}^k B(300, 0.07, i)$ nicht im Tafelwerk

$\mu := N \cdot p \quad \mu = 21 \quad \text{Var}_X := N \cdot p \cdot (1 - p) \quad \text{Var}_X = 19.530 > 9$

Näherung über Normalverteilung möglich:

$$\Phi\left(\frac{k - \mu + 0.5}{\sigma}\right) \leq 0.01 \quad \Leftrightarrow \quad \Phi\left(\frac{k - 20.5}{\sqrt{19.530}}\right) \leq 0.01$$

Tafelwerk (Quantile): $\frac{k - 20.5}{\sqrt{19.530}} \leq -2.326$

Mathcadlösung: Inverse kumulative Normalverteilung:

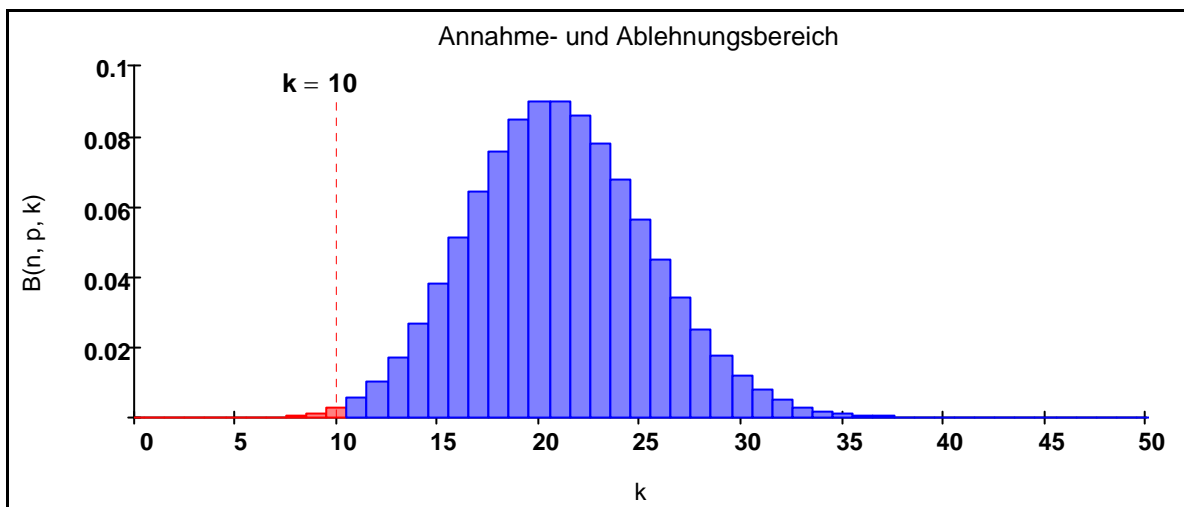
$t(k) := \text{qnorm}(k, 0, 1) \quad k_1 := 0.01 \quad t(k_1) = -2.326$

Lösung der Ungleichung:

$$\frac{k - 20.5}{\sqrt{19.530}} \leq -2.326 \quad \left| \begin{array}{l} \text{auflösen, } k \\ \text{Gleitkommazahl, 4} \end{array} \right. \rightarrow -\infty < k \leq 10.22 \quad \Rightarrow \quad k := 10$$

Ablehnungsbereich: $\bar{A} = \{ 0; 1; \dots; 10 \}$ Annahmehbereich: $A = \{ 11, 12, \dots, 300 \}$

Darstellung



Teilaufgabe 5.2 (4 BE)

Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit, mit der die Nullhypothese abgelehnt wird, obwohl die neuen Werkzeuge weiter mit einer Wahrscheinlichkeit von 10,7% fehlerhafte Teile produzieren, wenn die Nullhypothese bei bis zu 10 fehlerhaften Teilen abgelehnt wird. Kommentieren Sie kurz das Ergebnis.

Stichprobengröße: $N := 300$

Neue Wahrscheinlichkeit: $p := 0.107$

$$P(X \leq 10) = F(10) = \sum_{i=0}^{10} B(300, 0.107, i) \quad \text{nicht im Tafelwerk}$$

$$\mu := N \cdot p \quad \mu = 32.1 \quad \text{Var}_X := N \cdot p \cdot (1 - p) \quad \text{Var}_X = 28.665 \quad > 9$$

Näherung durch Normalverteilung:

$$\Phi\left(\frac{k - \mu + 0.5}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{10 - 32.1 + 0.5}{\sqrt{28.665}}\right) \quad x_1 := \frac{10 - 32.1 + 0.5}{\sqrt{28.665}} = -4.034$$

$$\Phi(-4.034) = 1 - \Phi(4.034) = 1 - 0.99997 = 0.00003$$

Da der Fehler sehr klein ist, kann bei der Ablehnung von einer Verbesserung der Werkzeuge ausgegangen werden.