Anwendung zum Satz des Pythagoras

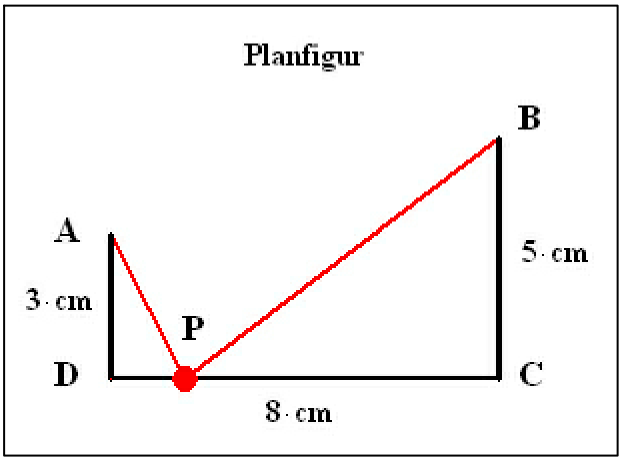
Aufgabe 1

In der Figur unten gilt: $\overline{AD} = 3 \cdot cm$, $\overline{BC} = 5 \cdot cm$, $\overline{CD} = 8 \cdot cm$.
Der Punkt P liegt auf CD. AD und BC stehen senkrecht auf CD.
a) Zeichnen Sie die Figur in Originalgröße.

b) Finden Sie durch Verschieben des Schiebereglers den minimalen Wert für $d = \overline{AP} + \overline{BP}$.
Begründen Sie die Lage des Punktes P mit Worten. (Beachten Sie das er- scheinende gestrichelte Hilfsdreieck.)

c) Berechnen Sie d_{min}.

Lösung:



Die Verbindungsstrecke AP ist Hypotenuse des rechtwinkligen Dreiecks APD:

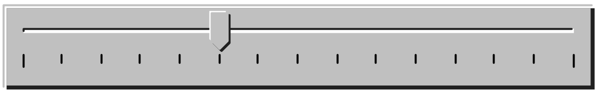
1. Teilstrecke: $\overline{AP} = \sqrt{p^2 + 9}$

Die Verbindungsstrecke BP ist Hypotenuse des rechtwinkligen Dreiecks BPC:

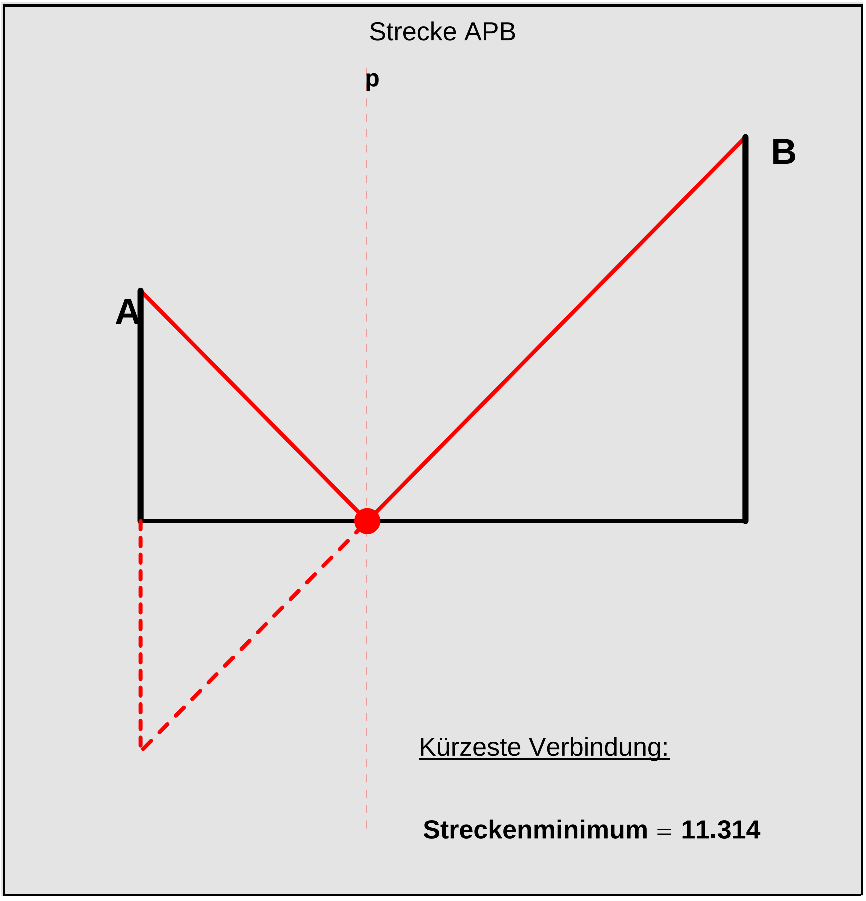
2. Teilstrecke: $\overline{BP} = \sqrt{(8 - p)^2 + 25}$

Gesamte Länge: $d_{APB} = \overline{AP} + \overline{BP}$

Wählen Sie den Punkt P auf der Strecke CD:



Darstellung



Punkt P:

$p = 3$

Streckenlänge:

$d_{APB} = 11.314$

Allgemeine Lösung mit Hilfe der Differentialrechnung:

1. Teilstrecke: $AP(p) := \sqrt{p^2 + 9}$

2. Teilstrecke: $BP(p) := \sqrt{(8-p)^2 + 25}$

Abstandsfunktion: $d(p) := AP(p) + BP(p) = \sqrt{p^2 - 16 \cdot p + 89} + \sqrt{p^2 + 9}$

1. Ableitung: $d'(p) := \frac{d}{dp} d(p) = \frac{p}{\sqrt{p^2 + 9}} + \frac{p - 8}{\sqrt{p^2 - 16 \cdot p + 89}}$

Horizontale Tangenten: $d'(p) = 0 = \dfrac{p}{\sqrt{p^2+9}} + \dfrac{p-8}{\sqrt{p^2 - 16\cdot p + 89}} = 0 = 3$

Minimum: $P_{min} := d'(p) = 0 \text{ auflösen } \rightarrow 3$

$\text{Streckenminimum} := d(P_{min})$

Aufgabe 2

Die Punkte A bis H sind die Ecken einer Schachtel. Die Kanten haben die Längen

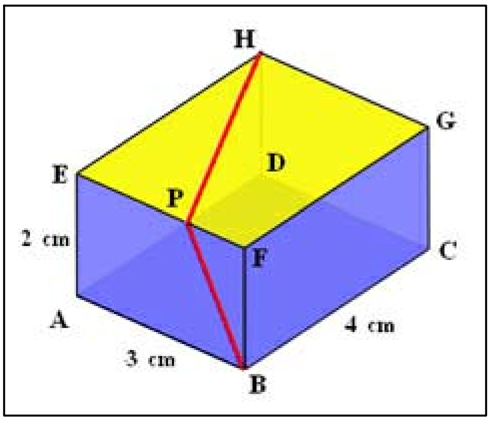
$\overline{AB} = 3\cdot cm$; $\overline{BC} = 4\cdot cm$ und $\overline{AE} = 2\cdot cm$.

Der Punkt P liegt auf der Kante EF und kann verschoben werden.

a) Finden Sie durch Verschieben des Schiebereglers den minimalen Wert für $d = \overline{HP} + \overline{PB}$.

b) Klappen Sie den Deckel der rechten Schachtel auf und begründen die Lage des Punktes P mit Worten.

c) Berechnen Sie d_{min} auf drei Stellen nach dem Komma und überprüfen Sie im Diagramm.



Lösung

Die Verbindungsstrecke HP ist Hypotenuse des rechtwinkligen Dreiecks HPE:

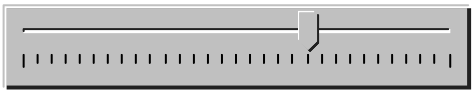
1. Teilstrecke: $\overline{HP} = \sqrt{(\overline{EH})^2 + (\overline{EP})^2} = \sqrt{16 + p^2}$

Die Verbindungsstrecke HP ist Hypotenuse des rechtwinkligen Dreiecks HPE:

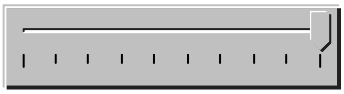
2. Teilstrecke: $\overline{PB} = \sqrt{(\overline{FB})^2 + (\overline{PF})^2} = \sqrt{4 + (3-p)^2}$

Gesamte Länge: $d_{HPB} = \overline{HP} + \overline{PB}$

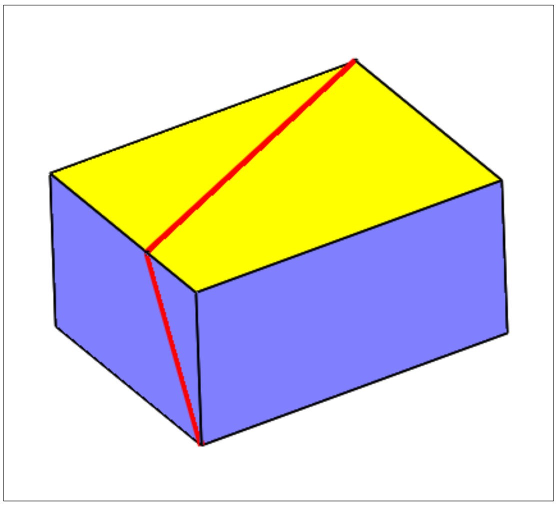
Verschiebung des Punktes P:

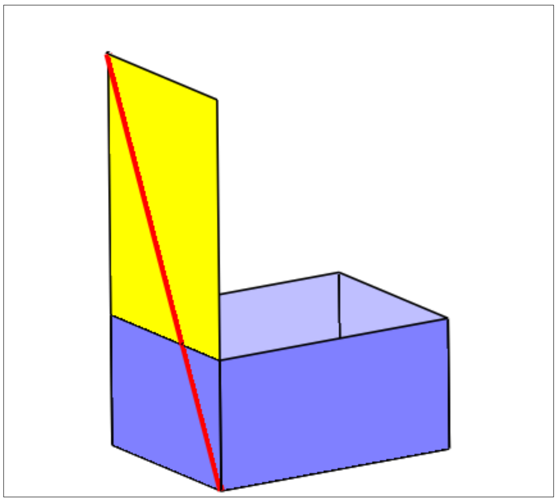


Anhebung des Deckels:



Darstellung





Punkt P: $P = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

für $p = 2$ gilt: $\text{Länge\_HPB} = 6.708$

Allgemeine Lösung mit Hilfe der Differentialrechnung

Abstandsfunktion: $d(p) := \sqrt{16 + p^2} + \sqrt{4 + (3 - p)^2}$

1. Ableitung: $d'(p) := \frac{d}{dp} d(p) \; = \frac{p}{\sqrt{p^2 + 16}} + \frac{p - 3}{\sqrt{p^2 - 6 \cdot p + 13}}$

Horizontale Tangenten: $d'(p) = 0 \rightarrow \frac{p}{\sqrt{p^2 + 16}} + \frac{p - 3}{\sqrt{p^2 - 6 \cdot p + 13}} = 0 \text{ auflösen}, p \;\rightarrow 2$

Minimum berechnen: $p_{min} := d'(p) = 0 \text{ auflösen} \;\rightarrow 2$

$\text{Minimum\_HPB} := d(p_{min})$

$\text{Minimum\_HPB} = 6.708$