Epizykloiden

Bezeichnungen

Eine ***Epizykloide*** ist eine Kurve, die ein Punkt auf dem Umfang eines Kreises vom Radius b beschreibt, wenn dieser Kreis auf der Außenseite eines festen Kreises mit Radius a abrollt ohne zu gleiten.

Parameterdarstellung:

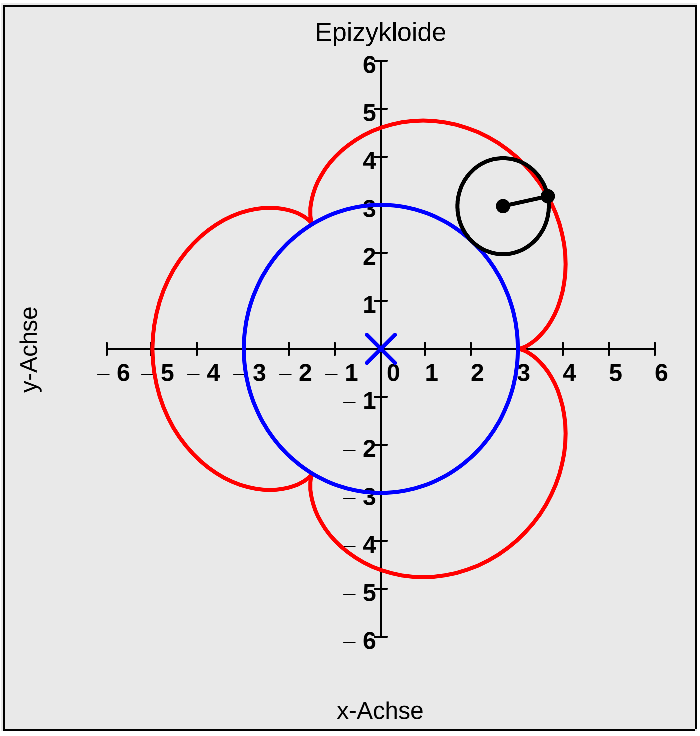
$$x(t) = (a + b)\cdot\cos(t) - b\cdot\cos\left(\frac{a+b}{b}\cdot t\right); \qquad y(t) = (a - b)\cdot\sin(t) - b\cdot\sin\left(\frac{a-b}{b}\cdot t\right);$$

Man unterscheidet dabei die ***spitze Epizykloide***, die ***gestreckte Epizykloide*** und die ***geschlungene Epizykloide***.

Die Form der Kurve hängt vom Quotienten $m = \frac{a}{b}$ ab, wobei stets $m > 1$ gilt.

Für ganzzahliges m besteht die Kurve aus m Kurvenzweigen, für gebrochenrationales m überdecken sich die Zweige gegenseitig, die Kurve ist jedoch geschlossen.
Für irrationales m ist die Kurve nicht in sich geschlossen, d. h. der umlaufende Punkt kehrt nicht in die Ausgangslage zurück.
Für m = 1 besitzt die Epizykloide einen Zweig und wird ***Kardioide*** genannt
Die ***verkürzte*** bzw. ***verlängerte Epizykloide*** wird auch ***Epitrochoide*** genannt.
Dabei befindet sich der rollende Punkt auf der Speiche entweder innerhalb oder außerhalb des rollenden Kreises.

Beispiel 1: Spitze Epizykloide

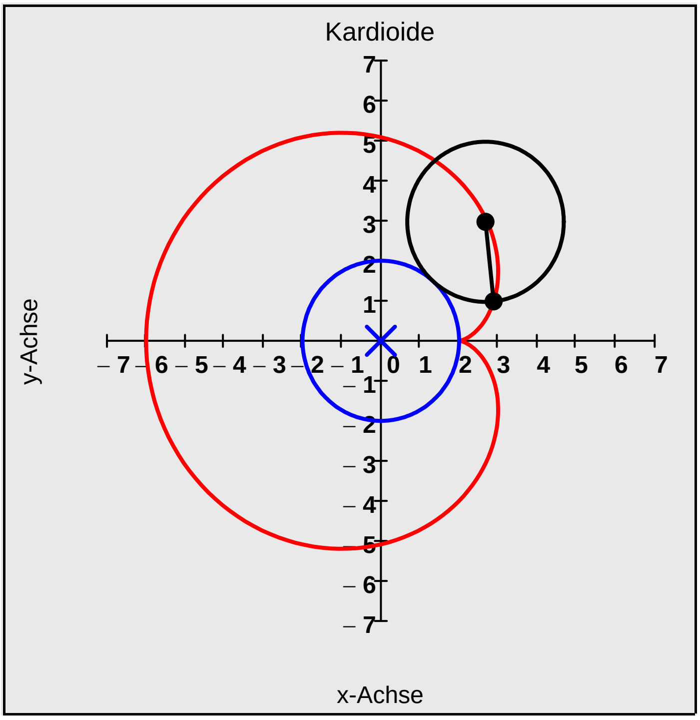


Konkrete Parameterdarstellung:

$$x(t) = 4\cdot\cos(t) - \cos(4\cdot t)$$

$$y(t) = 4\cdot\sin(t) - \sin(4\cdot t)$$

Beispiel 2: Kardioide (Herzkurve) als Sonderfall der Epizykloide

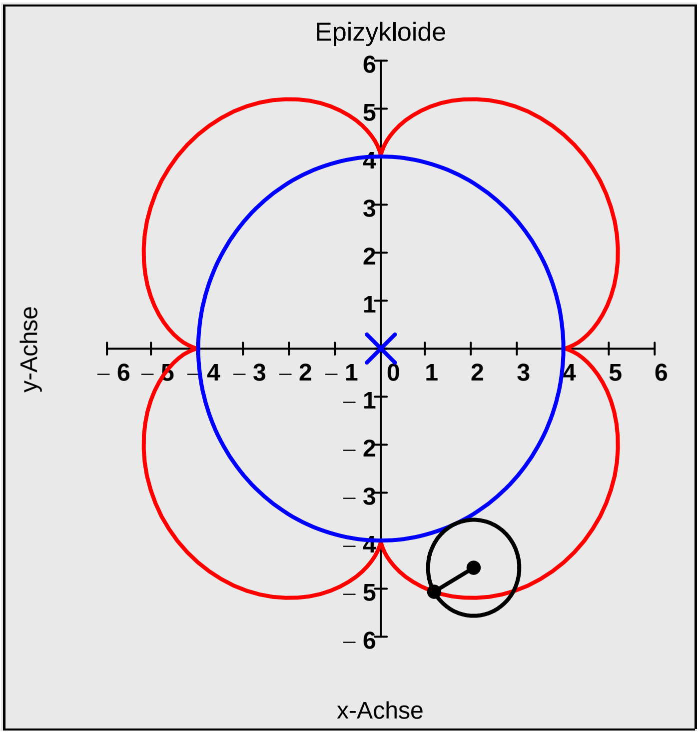


Konkrete Parameterdarstellung:

$x(t) = 4 \cdot \cos(t) - 2 \cdot \cos(2 \cdot t)$

$y(t) = 4 \cdot \sin(t) - 2 \cdot \sin(2 \cdot t)$

Beispiel 3: Spitze Epizykloide

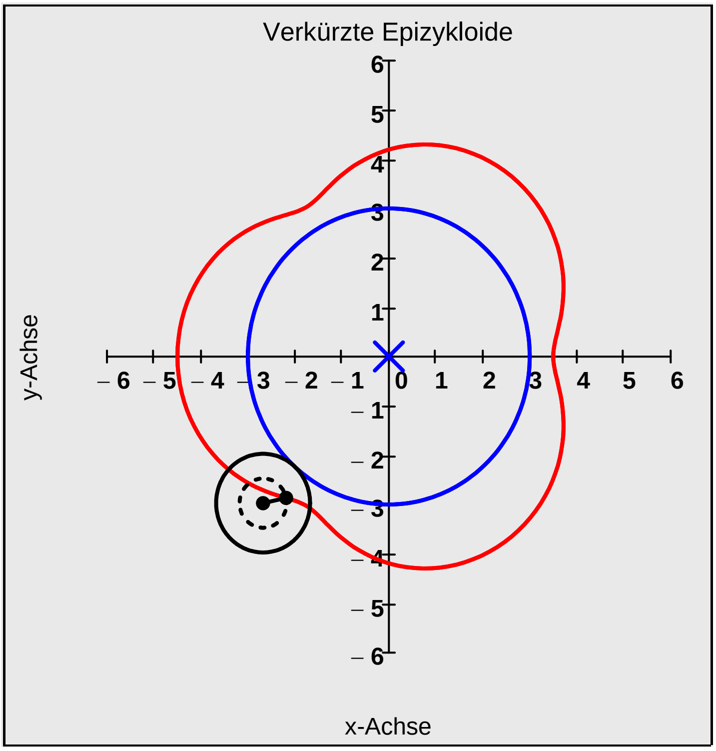


Konkrete Parameterdarstellung:

$x(t) = 5 \cdot \cos(t) - \cos(5 \cdot t)$

$y(t) = 5 \cdot \sin(t) - \sin(5 \cdot t)$

Beispiel 4: Verkürzte Epizykloide (Epitrochoide)

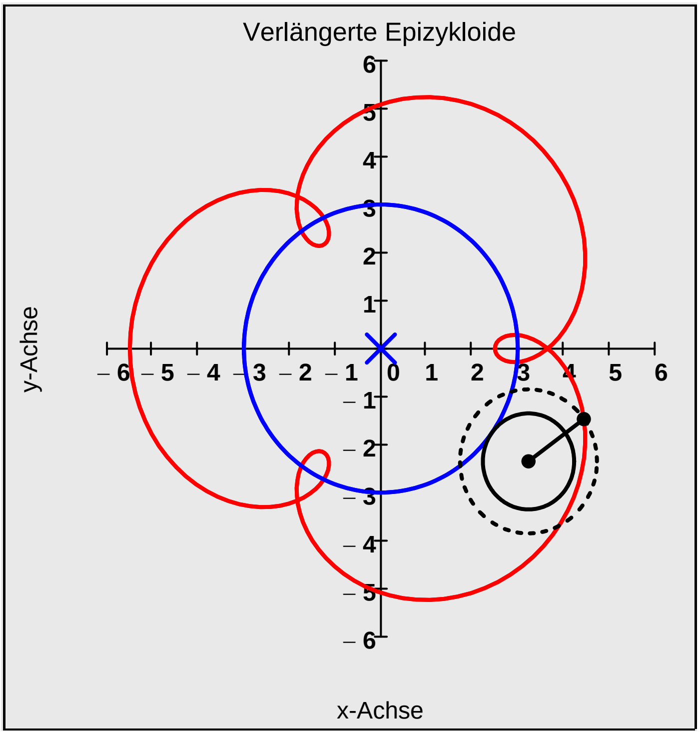


Konkrete Parameterdarstellung:

$$x(t) = 4 \cdot \cos(t) + -0.5 \cdot \cos(4 \cdot t)$$

$$y(t) = 4 \cdot \sin(t) + -0.5 \cdot \sin(4 \cdot t)$$

Beispiel 5: Verlängerte Epizykloide (Epitrochoide)



Konkrete Parameterdarstellung:

$$x(t) = 4 \cdot \cos(t) + -1.5 \cdot \cos(4 \cdot t)$$

$$y(t) = 4 \cdot \sin(t) + -1.5 \cdot \sin(4 \cdot t)$$