Hypozykloiden

Bezeichnungen

Eine ***Hypozykloide*** ist eine Kurve, die ein Punkt auf dem Umfang eines Kreises vom Radius b beschreibt, wenn dieser Kreis im Inneren eines festen Kreises mit Radius a ohne zu gleiten abrollt.

Parameterdarstellung:

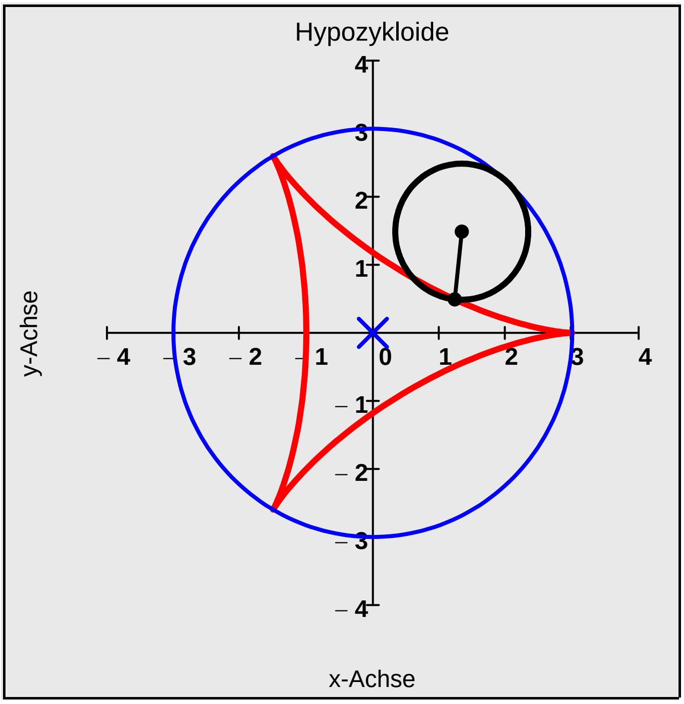
$$x(t) = (a - b)\cdot\cos(t) + b\cdot\cos\left(\frac{a-b}{b}\cdot t\right) ; \qquad y(t) = (a - b)\cdot\sin(t) - b\cdot\sin\left(\frac{a-b}{b}\cdot t\right) ;$$

Man unterscheidet dabei die ***spitze Hypozykloide***, die ***gestreckte Hypozykloide*** und die ***geschlungene Hypozykloide***.

Die Form der Kurve hängt vom Quotienten $m = \frac{a}{b}$ ab, wobei stets $m > 1$ gilt.

Für ganzzahliges m besteht die Kurve aus m Kurvenzweigen, für gebrochenrationales m überdecken sich die Zweige gegenseitig, die Kurve ist jedoch geschlossen.
Für irrationales m ist die Kurve nicht in sich geschlossen, d. h. der umlaufende Punkt kehrt nicht in die Ausgangslage zurück.
Für m = 2 entartet die Kurve in den Durchmesser des festen Kreises.
Für m = 3 besitzt die Hypozykloide drei Zweige.
Für m = 4 besitzt die Hypozykloide vier Zweige und wird ***Astroide*** genannt
Die ***verkürzte*** bzw. ***verlängerte Hypozykloide*** wird auch ***Hypotrochoide*** genannt.
Dabei befindet sich der rollende Punkt auf der Speiche entweder innerhalb oder außerhalb des rollenden Kreises.

Beispiel 1: Spitze Hypozykloide

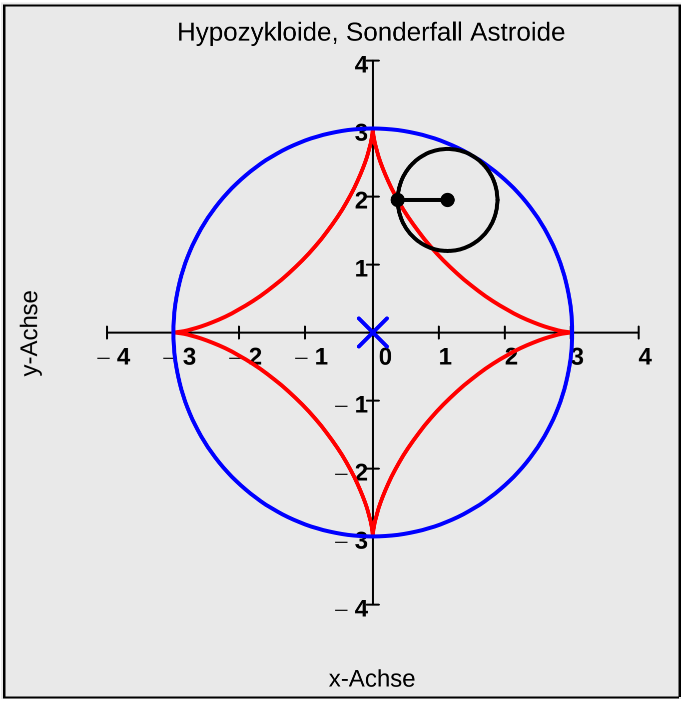


Konkrete Parameterdarstellung:

$x(t) = \cos(2\cdot t) + 2\cdot\cos(t)$

$y(t) = 2\cdot\sin(t) - \sin(2\cdot t)$

Beispiel 2: Astroide (Sternlinie)

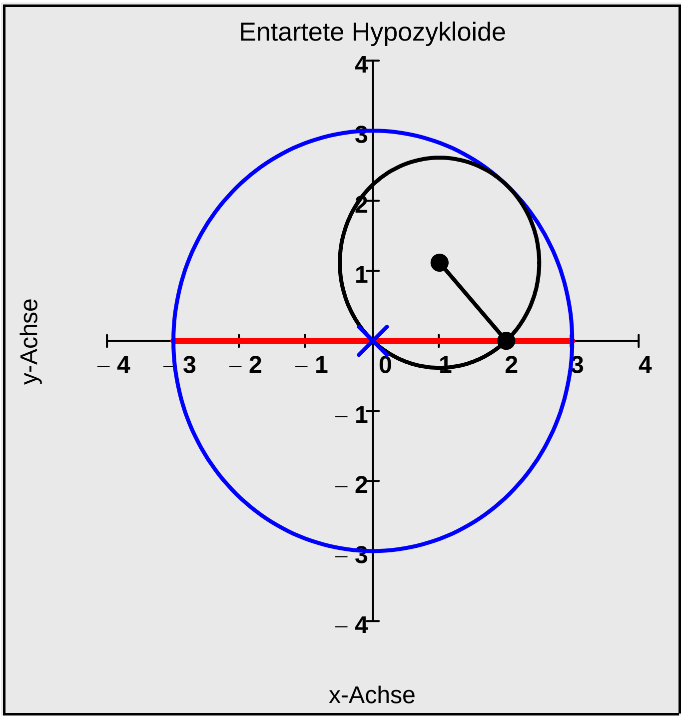


Konkrete Parameterdarstellung:

$$x(t) = 0.75 \cdot \cos(3.0 \cdot t) + 2.25 \cdot \cos(t)$$

$$y(t) = -0.75 \cdot \sin(3.0 \cdot t) + 2.25 \cdot \sin(t)$$

Beispiel 3: Gerade als Sonderfall der Hypozykloide

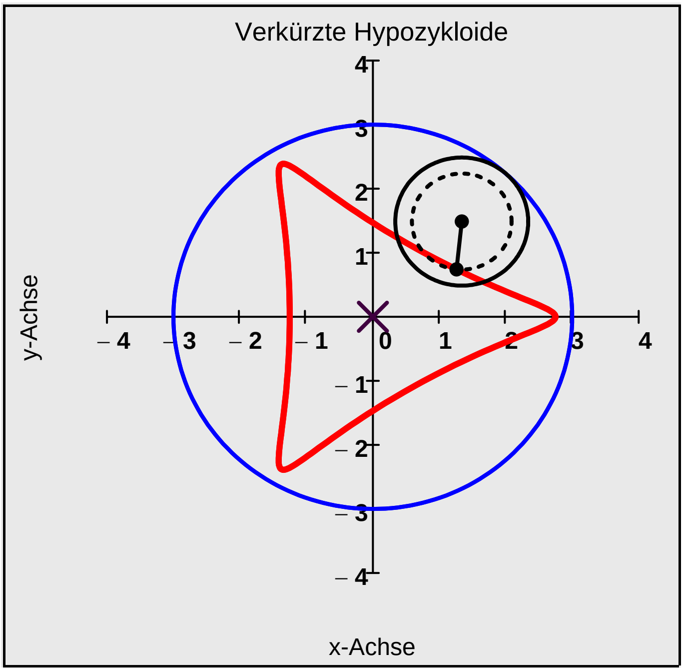


Konkrete Parameterdarstellung:

$$x(t) = 3 \cdot \cos(t)$$

$$y(t) = 0$$

Beispiel 4: Verkürzte Hypozykloide (Hypotrochoide)

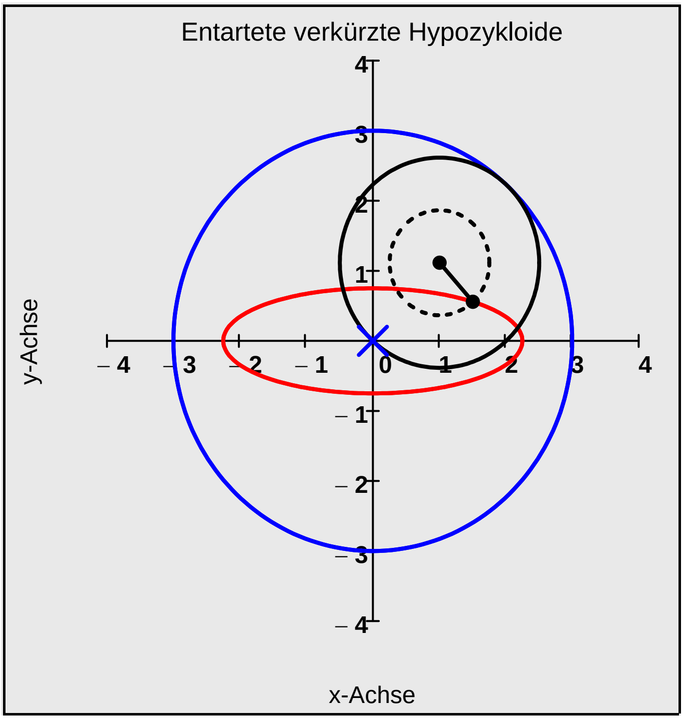


Konkrete Parameterdarstellung:

$$x(t) = 2\cdot\cos(t) + 0.75\cdot\cos(2\cdot t)$$

$$y(t) = 2\cdot\sin(t) + -0.75\cdot\sin(2\cdot t)$$

Beispiel 5: Ellipse als Sonderfall der verkürzten Hypozykloide

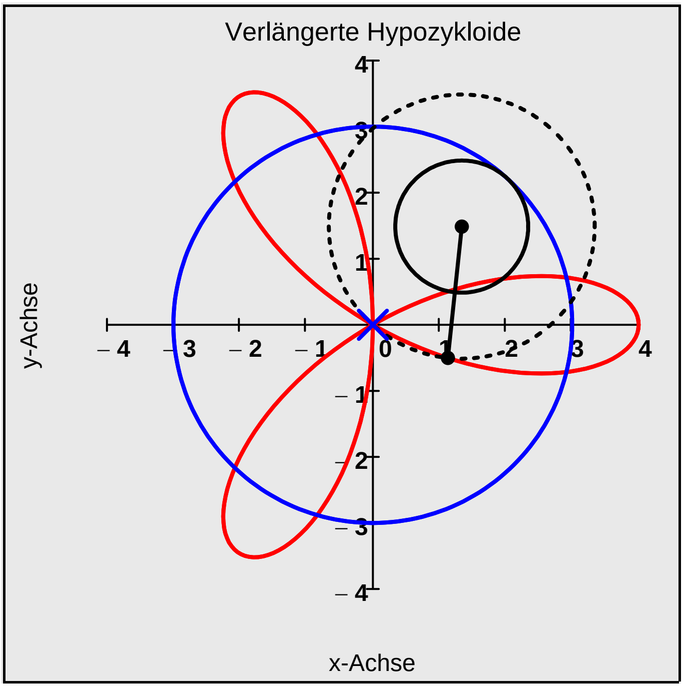


Konkrete Parameterdarstellung:

$$x(t) = 0.75\cdot\cos(1.0\cdot t) + 1.5\cdot\cos(t)$$

$$y(t) = -0.75\cdot\sin(1.0\cdot t) + 1.5\cdot\sin(t)$$

Beispiel 6: Gestreckte Hypozykloide (Hypotrochoide)

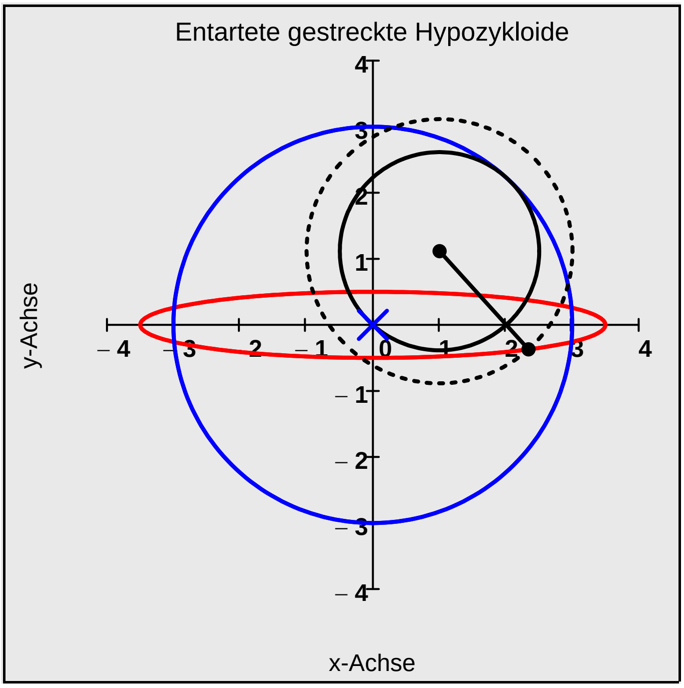


Konkrete Parameterdarstellung:

$$x(t) = 2 \cdot \cos(2 \cdot t) + 2 \cdot \cos(t)$$

$$y(t) = 2 \cdot \sin(t) - 2 \cdot \sin(2 \cdot t)$$

Beispiel 7: Die Ellipse als Sonderfall der gestreckten Hypozykloide

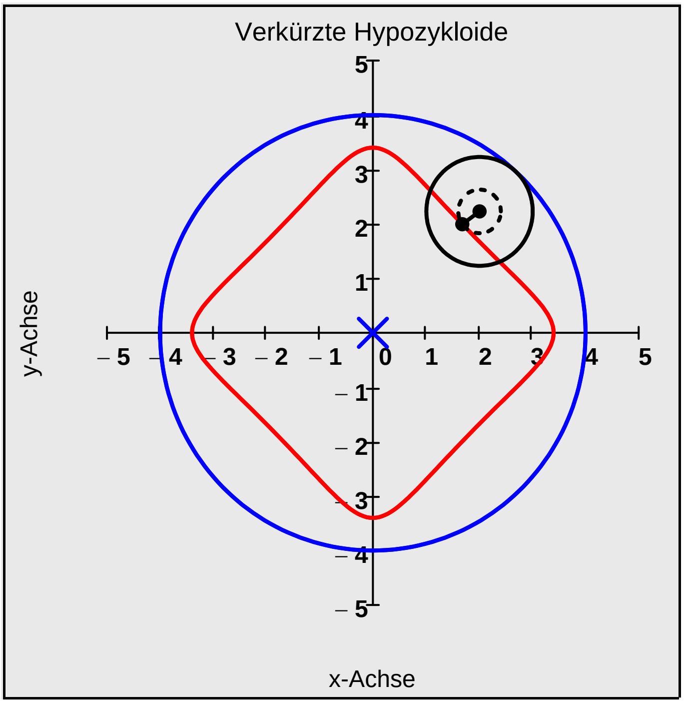


Konkrete Parameterdarstellung:

$$x(t) = 2 \cdot \cos(1.0 \cdot t) + 1.5 \cdot \cos(t)$$

$$y(t) = 1.5 \cdot \sin(t) - 2 \cdot \sin(1.0 \cdot t)$$

Beispiel 8

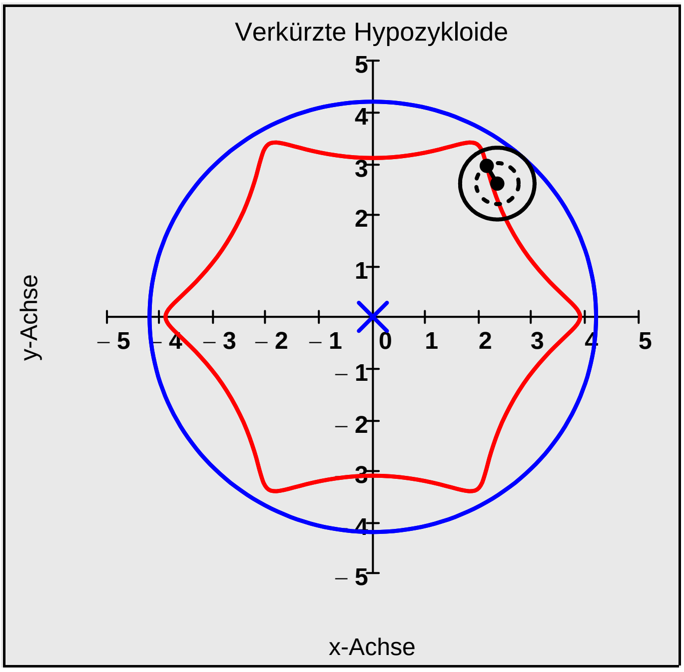


Konkrete Parameterdarstellung:

$$x(t) = 3\cdot\cos(t) + 0.4\cdot\cos(3\cdot t)$$

$$y(t) = 3\cdot\sin(t) + -0.4\cdot\sin(3\cdot t)$$

Beispiel 9

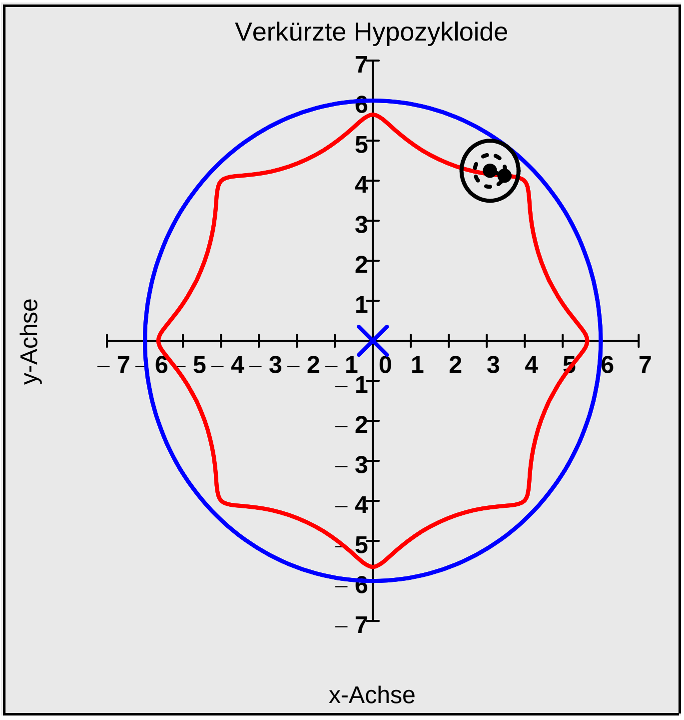


Konkrete Parameterdarstellung:

$$x(t) = 3.5\cdot\cos(t) + 0.4\cdot\cos(5.0\cdot t)$$

$$y(t) = 3.5\cdot\sin(t) + -0.4\cdot\sin(5.0\cdot t)$$

Beispiel 10

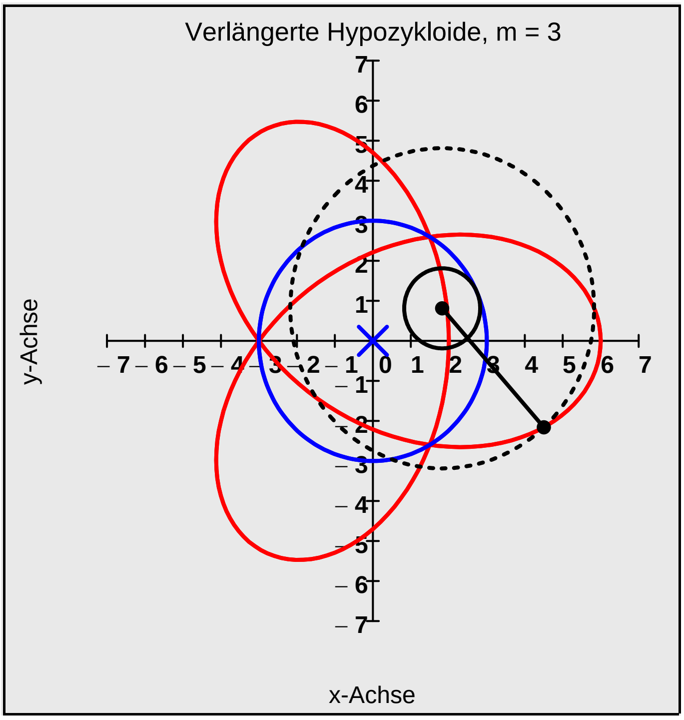


Parameterdarstellung der Kurve:

$x(t) = 5.25\cdot\cos(t) + 0.4\cdot\cos(7.0\cdot t)$

$y(t) = 5.25\cdot\sin(t) + -0.4\cdot\sin(7.0\cdot t)$

Beispiel 11

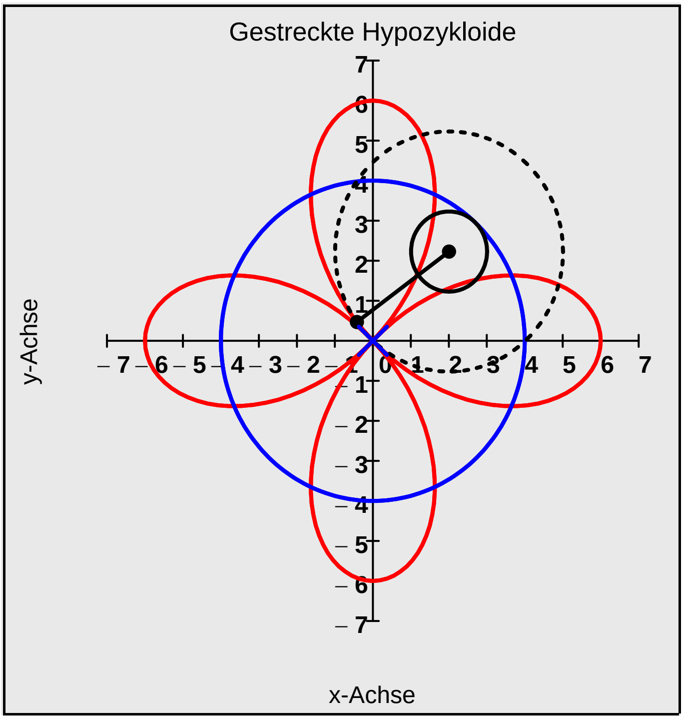


Parameterdarstellung der Kurve:

$x(t) = 4\cdot\cos(2\cdot t) + 2\cdot\cos(t)$

$y(t) = 2\cdot\sin(t) - 4\cdot\sin(2\cdot t)$

Beispiel 12

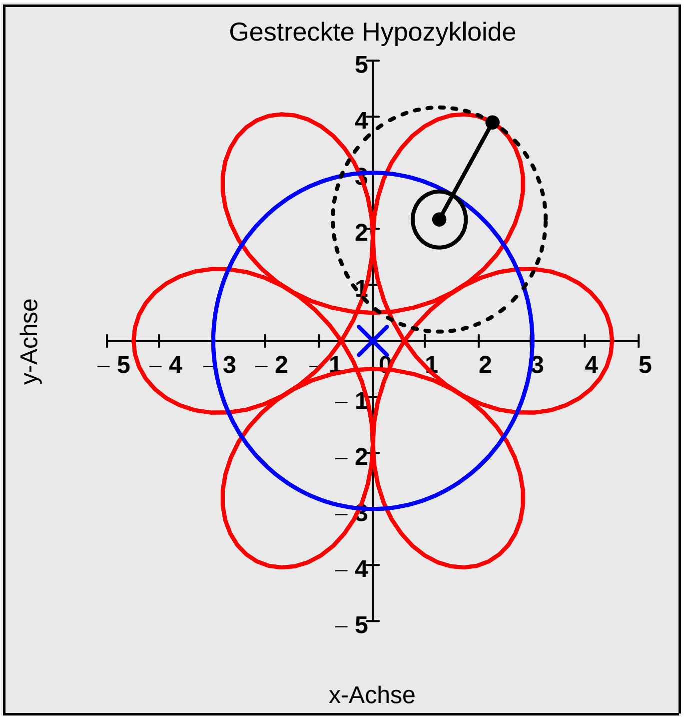


Parameterdarstellung der Kurve:

$x(t) = 3\cdot\cos(3\cdot t) + 3\cdot\cos(t)$

$y(t) = 3\cdot\sin(t) - 3\cdot\sin(3\cdot t)$

Beispiel 13

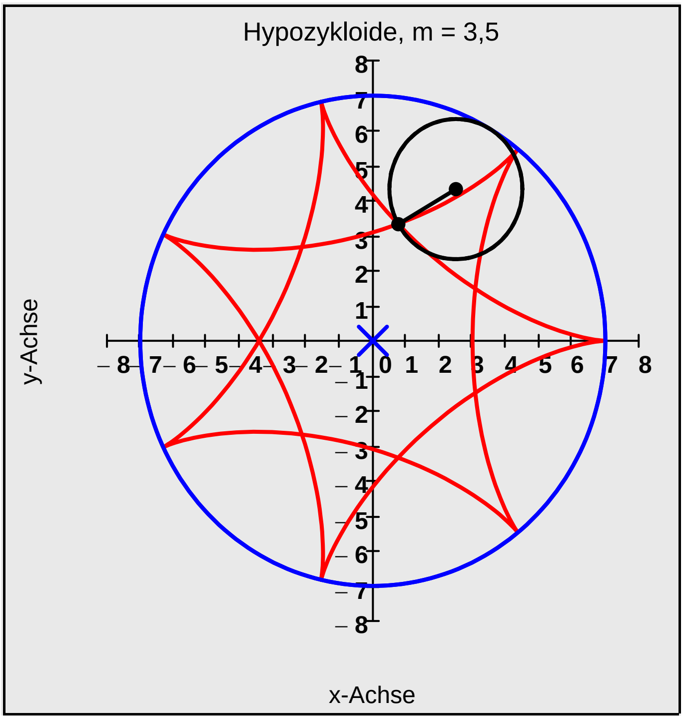


Parameterdarstellung der Kurve:

$x(t) = 2\cdot\cos(5.0\cdot t) + 2.5\cdot\cos(t)$

$y(t) = 2.5\cdot\sin(t) - 2\cdot\sin(5.0\cdot t)$

Beispiel 14

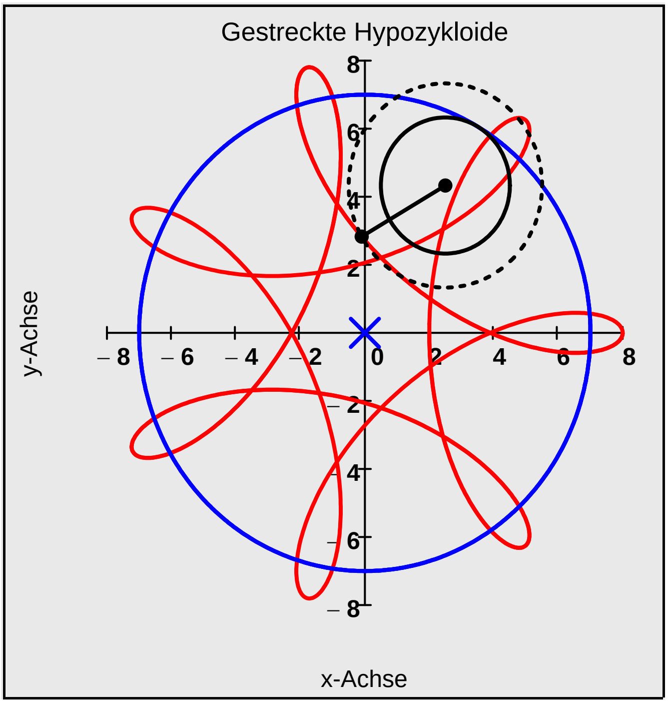


Parameterdarstellung der Kurve:

$$x(t) = 2\cdot\cos\left(\frac{5\cdot t}{2}\right) + 5\cdot\cos(t)$$

$$y(t) = 5\cdot\sin(t) - 2\cdot\sin\left(\frac{5\cdot t}{2}\right)$$

Beispiel 15



Parameterdarstellung der Kurve:

$$x(t) = 3\cdot\cos\left(\frac{5\cdot t}{2}\right) + 5\cdot\cos(t)$$

$$y(t) = 5\cdot\sin(t) - 3\cdot\sin\left(\frac{5\cdot t}{2}\right)$$