Die Arcuskosinusfunktion

Aufgabe 1

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) := \cos(x)$ mit $x \in IR$.

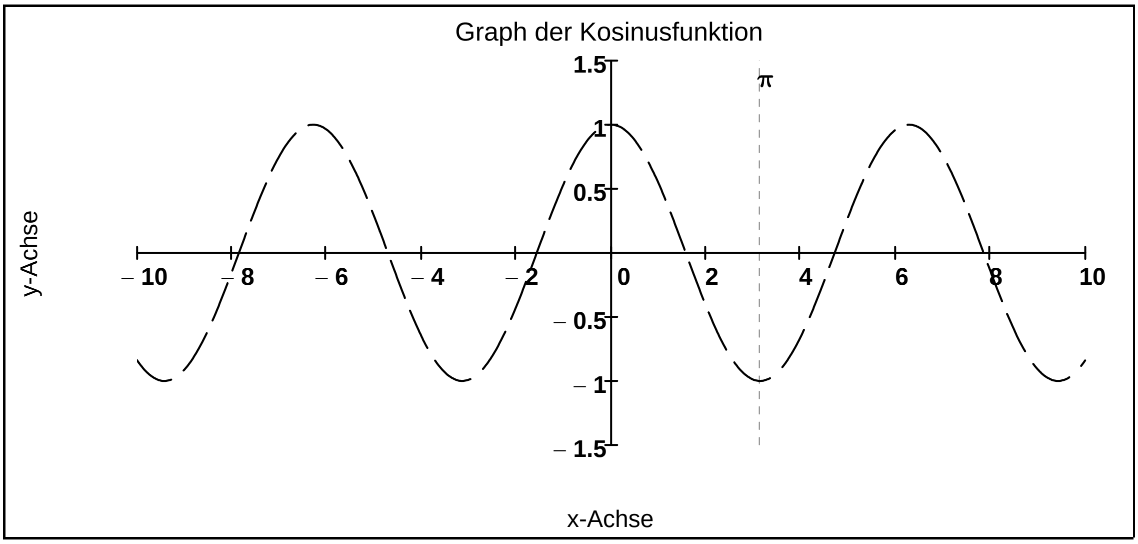
a) Bestimmen Sie eine möglichst große Definitionsmenge und die zugehörige Wertemenge, in der die Kosinusfunktion umkehrbar ist.

b) Geben Sie Definitions- und Wertemenge der Umkehrfunktion $u(x) = \arccos(x)$ an.

c) Zeichnen Sie die Graphen der Funktion **f** und der Umkehrfunktion **u**.

d) Bestimmen Sie die Ableitung der Arcuskosinusfunktion mithilfe der Ableitung der Umkehrfunktion.

Teilaufgabe a)



Für die Umkehrbarkeit wird ein Bereich strenger Monotonie ausgewählt:

G_f ist streng monoton fallend: $\Rightarrow$ $D_f = [\ 0\ ;\ \pi\ ]$ $W_f = [\ -1\ ;\ 1\ ]$

Teilaufgabe b)

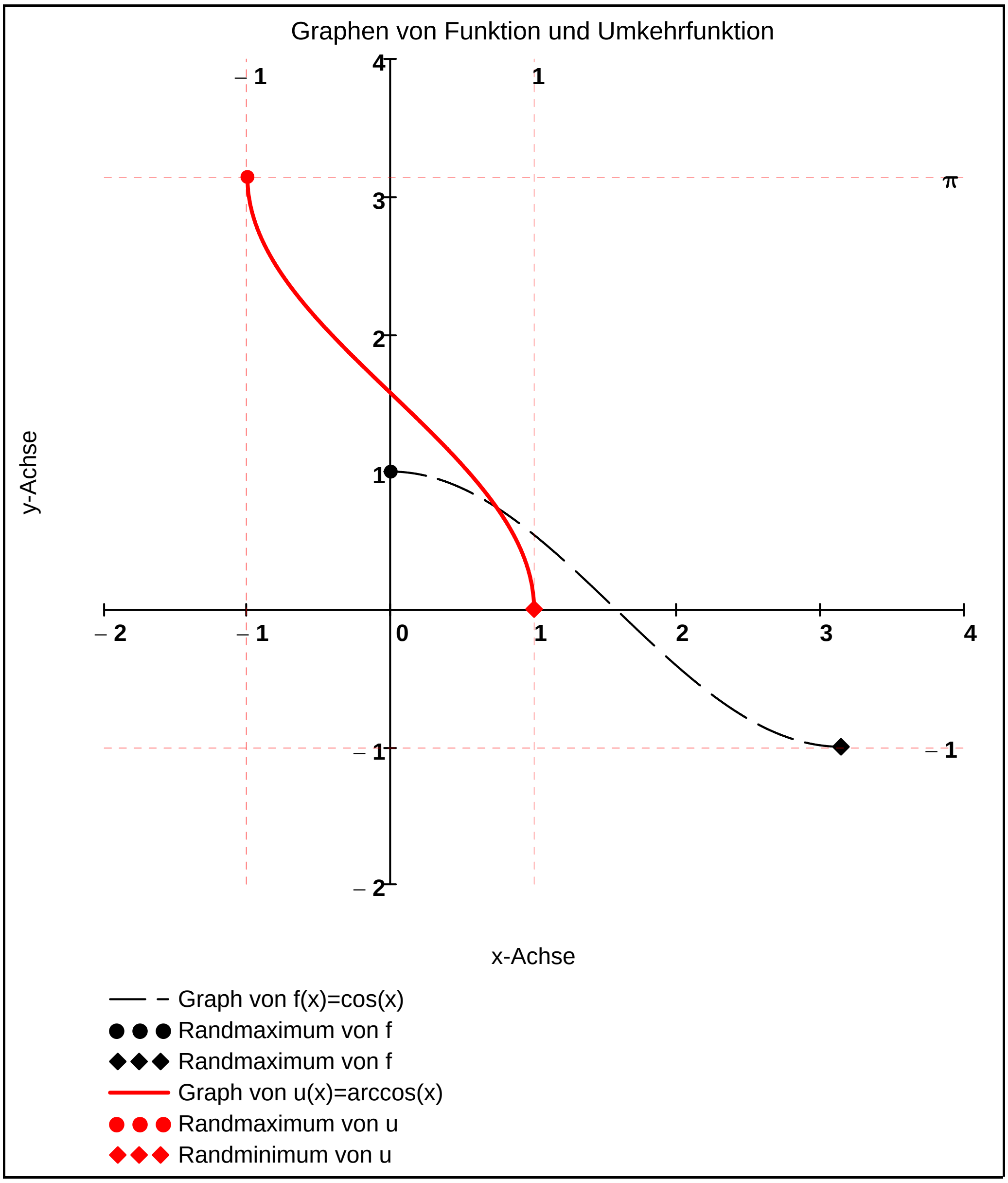
Schreibweise in Mathcad für die Arcussinusfunktion: $\arccos(x) := \text{acos}(x)$

$u(x) := \arccos(x)$ Definitionsmenge: $D_u = [\ -1\ ;\ 1\ ]$

Wertemenge: $W_u = [\ 0\ ;\ \pi\ ]$

Teilaufgabe c)

Definitionsbereiche: $x1 := 0, 0.001 .. \pi$ $x2 := -1, -0.999 .. 1$



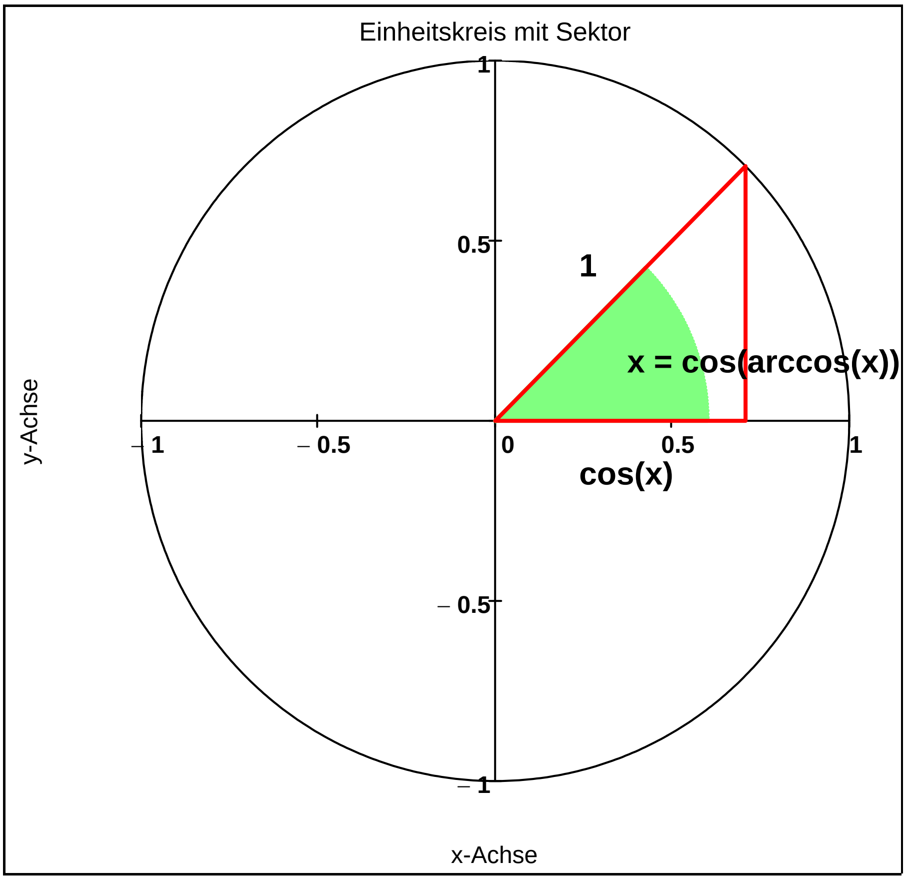
Teilaufgabe d)

$f(x) = \cos(x)$ $\qquad$ $f'(x) = -\sin(x)$

$u(x) = \arccos(x)$ $\qquad$ $u'(x) = \dfrac{1}{f'(y)} = \dfrac{1}{-\sin(y)}$ $\qquad$ mit $\qquad y = \arccos(x)$

Darstellung Kreis

Mit Pythagoras gilt: $\quad (\sin(y))^2 + (\cos(y))^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad (\sin(y))^2 = 1 - (\cos(y))^2$



Wurzelziehen: $\quad \sin(y) = \sqrt{1 - (\cos(\arccos(x)))^2} = \sqrt{1 - x^2}$

Eingesetzt: $\quad \boxed{u'(x) = \dfrac{1}{-\sin(y)} = \dfrac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}}$ $\qquad$ mit $\; D =]-1\,;\,1[$

Weiter gilt: $\quad \lim\limits_{x \to -1^+} \dfrac{-1}{\sqrt{1 - x^2}} \to -\infty \qquad \lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{-1}{\sqrt{1 - x^2}} \to -\infty$

Aufgabe 2

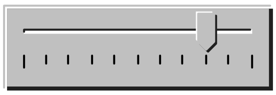
Gegeben ist die Funktion $g(x) := \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$ mit $x \in \,]-1;\ 1[$.

Berechnen Sie den folgenden Term: $\dfrac{\pi}{2} + \displaystyle\int_0^x \dfrac{-1}{\sqrt{1-\tau^2}}\, d\tau$

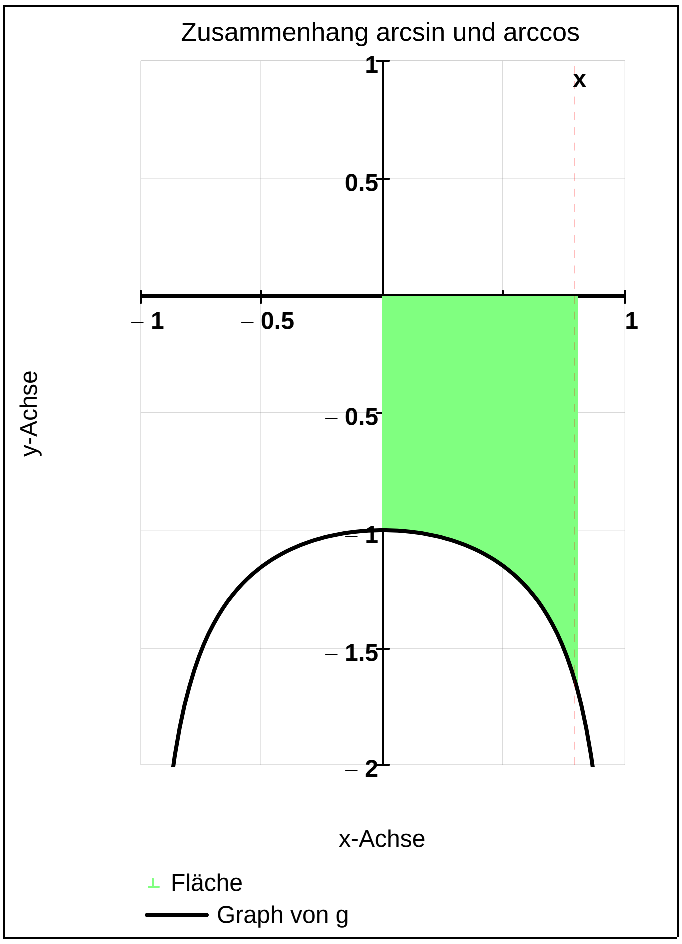
Vergleichen Sie für zwei selbst gewählte konkrete Werte für x den Term mit dem Wert von arccos(x).
Welche Beziehung ergibt sich demnach zwischen den Arcusfunktionen von Sinus und Kosinus?

Es gilt: $\quad \arcsin(x) = \displaystyle\int_0^x \dfrac{1}{\sqrt{1-\tau^2}}\, d\tau$

Wählen Sie x:



Darstellung



$x = 0.8$

$$\frac{\pi}{2} + \int_0^x \frac{-1}{\sqrt{1-\tau^2}}\, d\tau = 0.644$$

Zum Vergleich:

$\arccos(x) = 0.644$

$\arcsin(x) = 0.927$

Es gilt:

$\arcsin(x) + \arccos(x) = 1.571$

$\dfrac{\pi}{2} = 1.571$