Die Arcussinusfunktion

Aufgabe 1

Gegeben ist die Funktion f mit $\mathbf{f(x) := sin(x)}$ mit $\mathbf{x} \in \mathbf{IR}$.

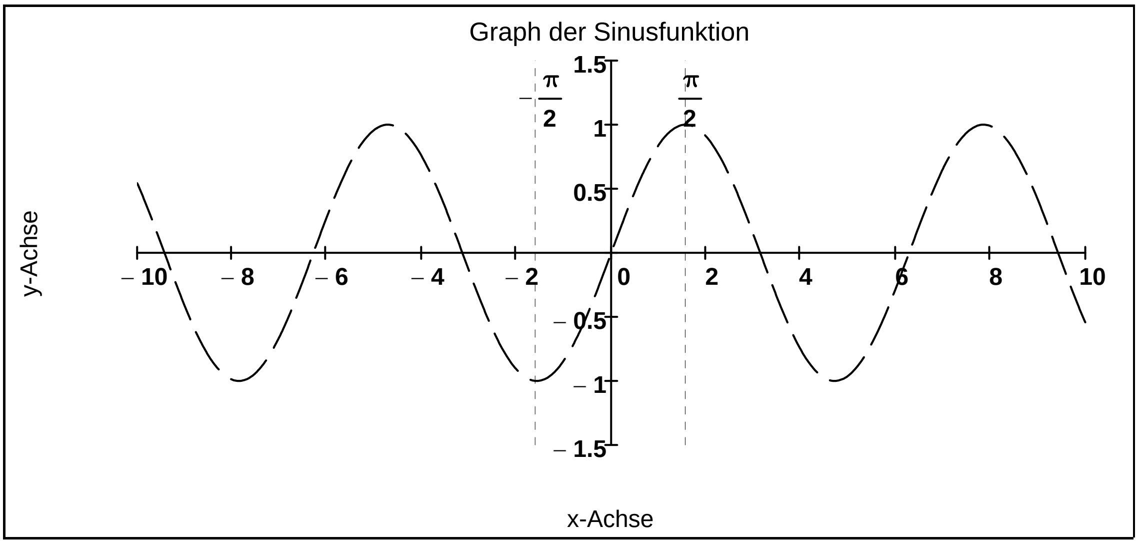
a) Bestimmen Sie eine möglichst große Definitionsmenge und die zugehörige Wertemenge, in der die Sinusfunktion umkehrbar ist.

b) Geben Sie Definitions- und Wertemenge der Umkehrfunktion $\mathbf{u(x) = arcsin(x)}$ an.

c) Zeichnen Sie die Graphen der Funktion **f** und der Umkehrfunktion **u**.

d) Bestimmen Sie die Ableitung der Arcussinusfunktion mithilfe der Ableitung der Umkehrfunktion.

Teilaufgabe a)



Für die Umkehrbarkeit wird ein Bereich strenger Monotonie ausgewählt:

G_f ist streng monoton steigend: $\Rightarrow$ $\mathbf{D_f = \left[-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2} \right]}$ $\mathbf{W_f = [-1 ; 1]}$

Teilaufgabe b)

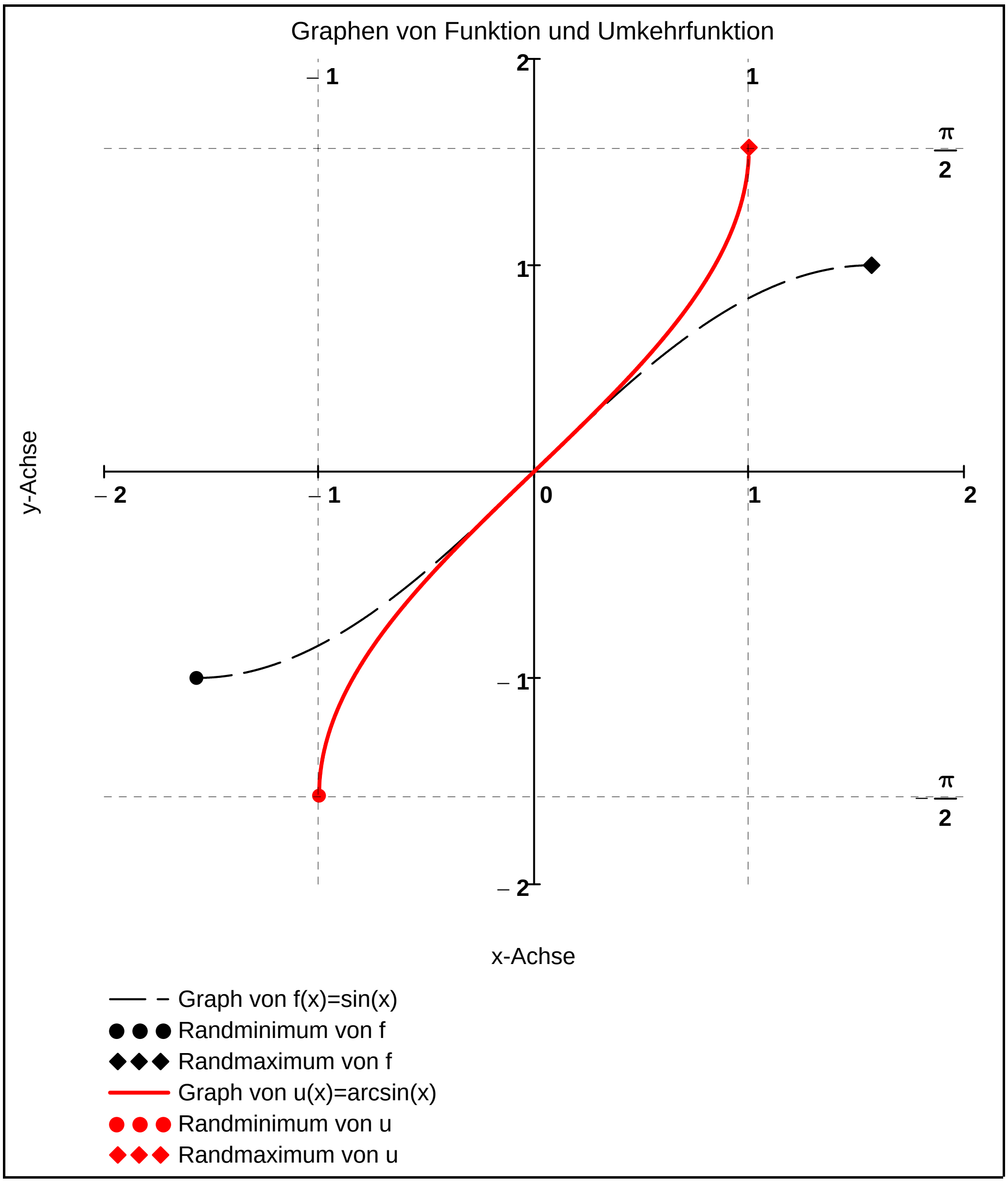
Schreibweise in Mathcad für die Arcussinusfunktion: $\mathbf{arcsin(x) := asin(x)}$

$\mathbf{u(x) := arcsin(x)}$ Definitionsmenge: $\mathbf{D_u = [-1 ; 1]}$

Wertemenge: $\mathbf{W_u = \left[-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2} \right]}$

Teilaufgabe c)

Definitionsbereiche: $x1 := -\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2} + 0.001 .. \frac{\pi}{2}$ $x2 := -1, -0.999 .. 1$



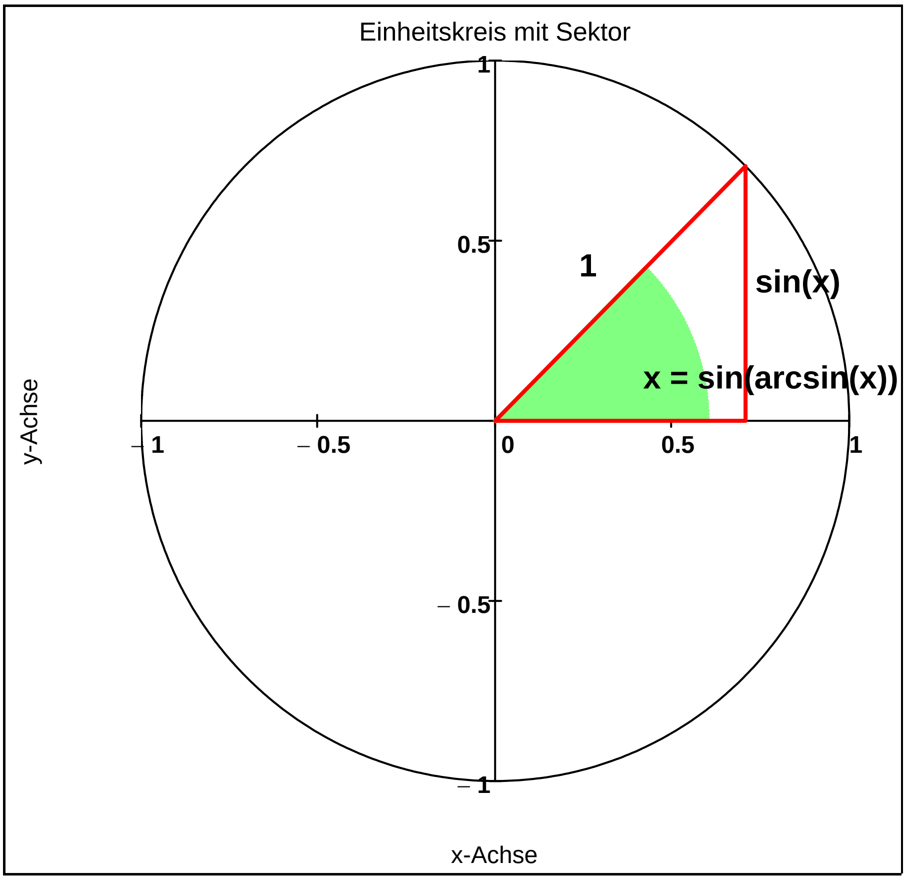
Teilaufgabe d)

$f(x) = \sin(x)$ $\qquad$ $f'(x) = \cos(x)$

$u(x) = \arcsin(x)$ $\qquad$ $u'(x) = \dfrac{1}{f'(y)} = \dfrac{1}{\cos(y)}$ $\quad$ mit $\quad y = \arcsin(x)$

Darstellung Kreis

Mit Pythagoras gilt: $\quad (\sin(y))^2 + (\cos(y))^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad (\cos(y))^2 = 1 - (\sin(y))^2$



Wurzelziehen: $\quad \cos(y) = \sqrt{1 - (\sin(\arcsin(x)))^2} = \sqrt{1 - x^2}$

Eingesetzt: $\quad \boxed{u'(x) = \dfrac{1}{\sin(\arcsin(x))} = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}}$ $\qquad$ mit $\; D =]-1;\,1[$

Weiter gilt: $\quad \lim_{x \to -1^+} \dfrac{-1}{\sqrt{1 - x^2}} \to -\infty \qquad \lim_{x \to 1^-} \dfrac{-1}{\sqrt{1 - x^2}} \to -\infty$

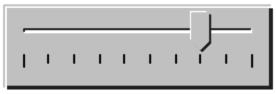
Aufgabe 2

Gegeben ist die Funktion $g(x) := \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ mit $x \in \left]-1\,;\,1\right[$.

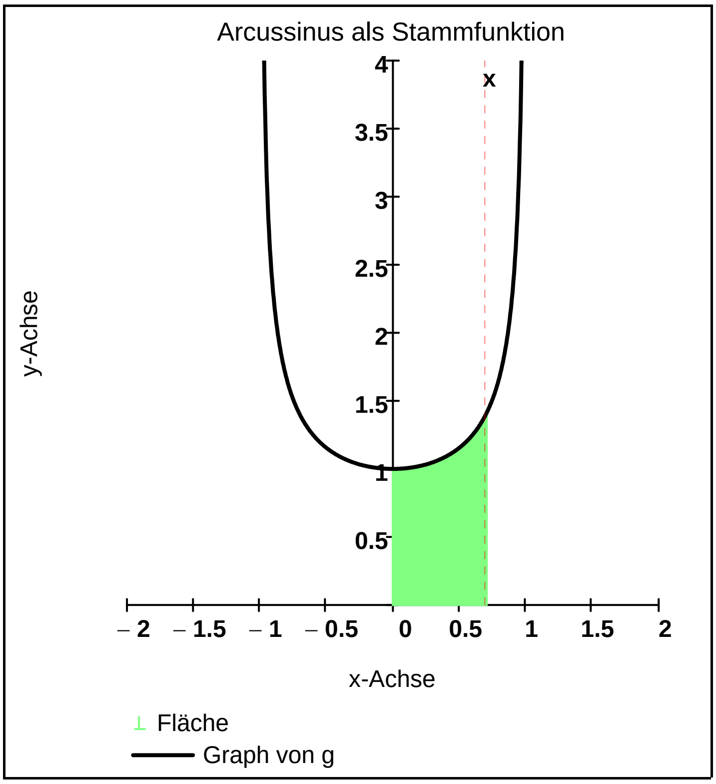
a) Skizzieren Sie den Graphen der Funktion g in einem Koordinatensystem.
b) Berechnen Sie die Fläche unter dem Graphen von g im Intervall **[0 ; x]** für mindestens drei verschiedene Werte von x und vergleichen Sie diese Werte jeweils mit dem Wert von arcsin(x).

Es gilt: $\quad \arcsin(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-\tau^2}}\,d\tau$

Wählen Sie x:



Darstellung



$x = 0.7$

$\displaystyle\int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-\tau^2}}\,d\tau = 0.775$

Zum Vergleich:

$\arcsin(x) = 0.775$