Die Arcustangensfunktion

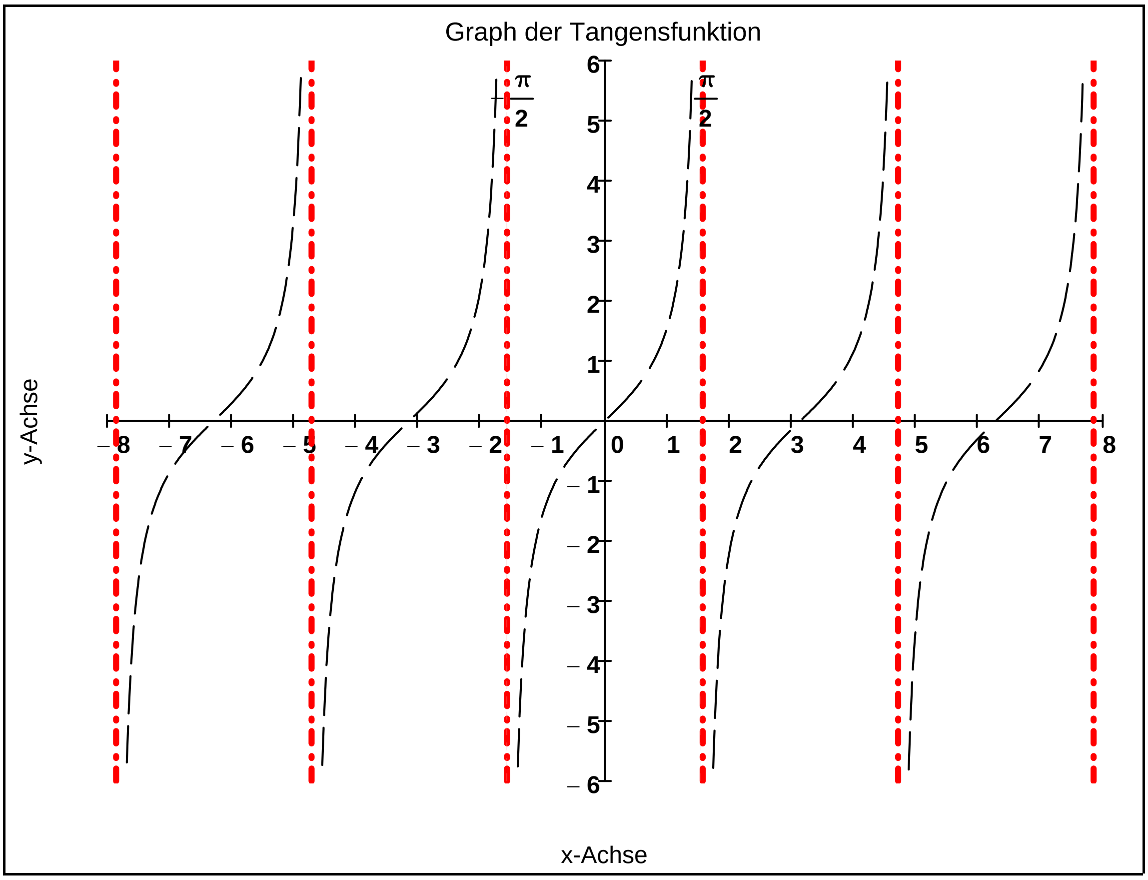
made with mathcad

Aufgabe 1

Gegeben ist die Funktion f mit $\mathbf{f}(\mathbf{x}) := \mathbf{tan}(\mathbf{x})$ mit $\mathbf{x} \in \mathbf{IR} \setminus \{ (2 \cdot k + 1) \cdot \frac{\pi}{2} \}$ mit $\mathbf{k} \in \mathbf{Z}$.

a) Bestimmen Sie eine möglichst große Definitionsmenge und die zugehörige Wertemenge, in der die Kosinusfunktion umkehrbar ist.
b) Geben Sie Definitions- und Wertemenge der Umkehrfunktion $\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{arctan}(\mathbf{x})$ an.
c) Zeichnen Sie die Graphen der Funktion **f** und der Umkehrfunktion **u**.
d) Bestimmen Sie die Ableitung der Arcuskosinusfunktion mithilfe der Ableitung der Umkehrfunktion.

Teilaufgabe a)



Für die Umkehrbarkeit wird ein Bereich strenger Monotonie ausgewählt:

G_f ist streng monoton steigend: $\Rightarrow$ $\mathbf{D_f} = [\,0\,;\,\pi\,]$ $\mathbf{W_f} = [\,-1\,;\,1\,]$

Teilaufgabe b)

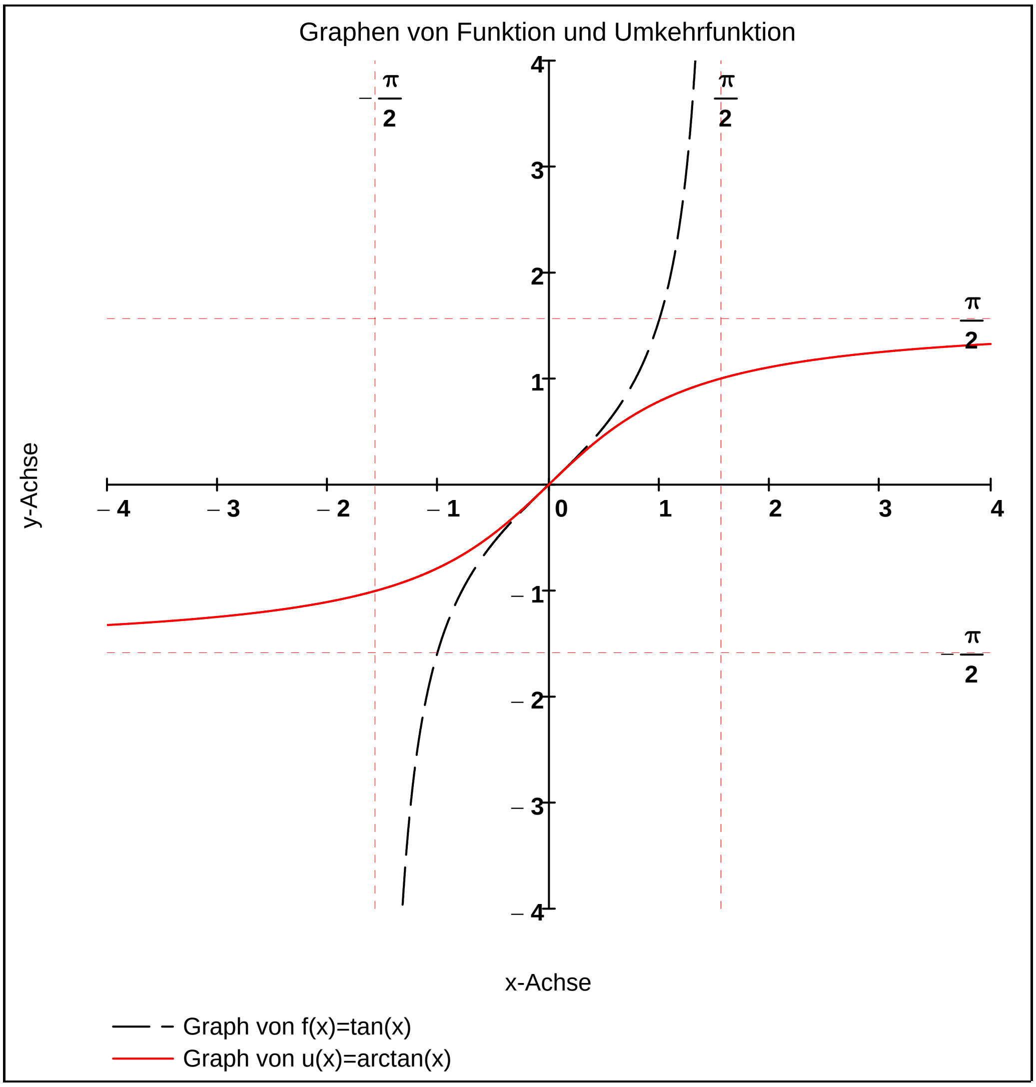
$u(x) := \arctan(x)$

Definitionsmenge: $D_u = [\,-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\,]$

Wertemenge: $W_u = \,]-\infty\,;\,\infty\,[$

Teilaufgabe c)

Definitionsbereiche: $x1 := -\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2} + 0.001 .. \frac{\pi}{2}$ $\qquad$ $x2 := -4, -3.999 .. 4$

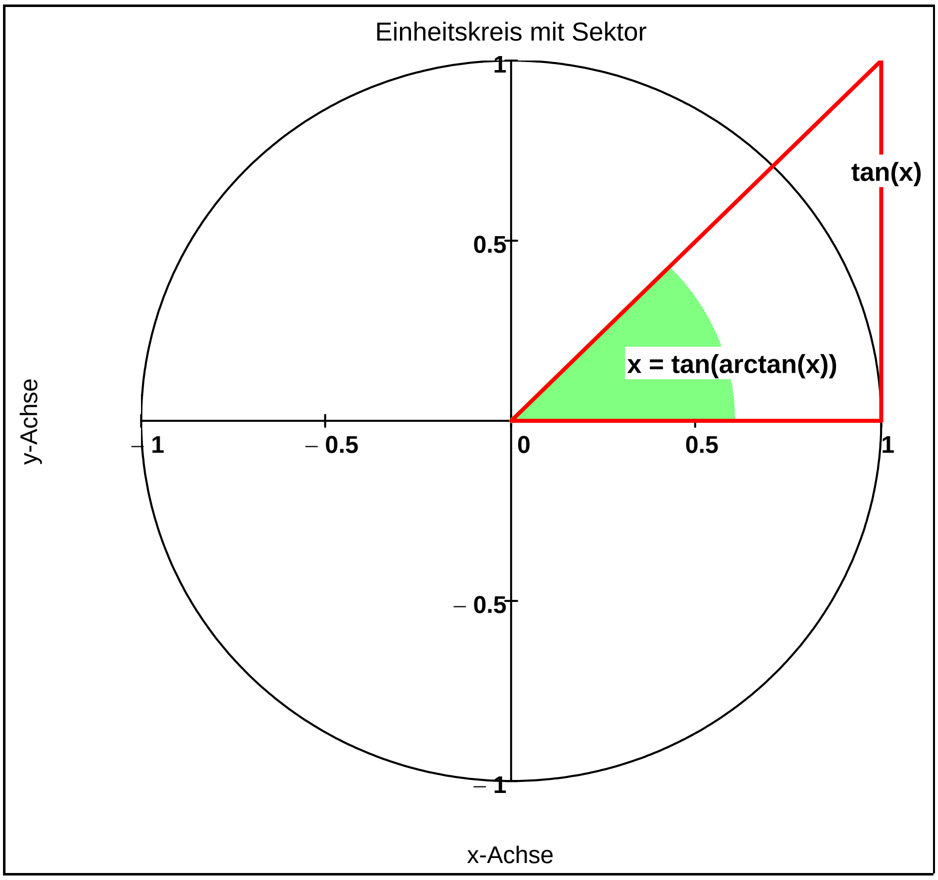


Teilaufgabe d)

$f(x) = \tan(x)$ $\qquad f'(x) = \dfrac{1}{(\cos(x))^2}$

$u(x) = \arctan(x)$ $\qquad u'(x) = \dfrac{1}{f'(y)} = \dfrac{1}{\dfrac{1}{(\cos(y))^2}} = \dfrac{1}{1 + (\tan(y))^2}$ $\qquad$ mit $\quad y = \arctan(x)$

Darstellung Kreis



Eingesetzt: $\quad \boxed{u'(x) = \dfrac{1}{1 + (\tan(\arctan(x)))^2} = \dfrac{1}{1 + x^2}}$ $\qquad$ mit $\;$ **D = IR**

Weiter gilt: $\quad \lim_{x \to -\infty} \dfrac{1}{1 + x^2} \to 0 \qquad \lim_{x \to \infty} \dfrac{1}{1 + x^2} \to 0$

Aufgabe 2

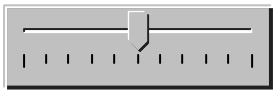
Gegeben ist die Funktion $g(x) := \dfrac{1}{1+x^2}$ mit $x \in]-1;1[$.

Berechnen Sie den folgenden Term: $\displaystyle\int_0^x \frac{1}{1+\tau^2}\,d\tau$

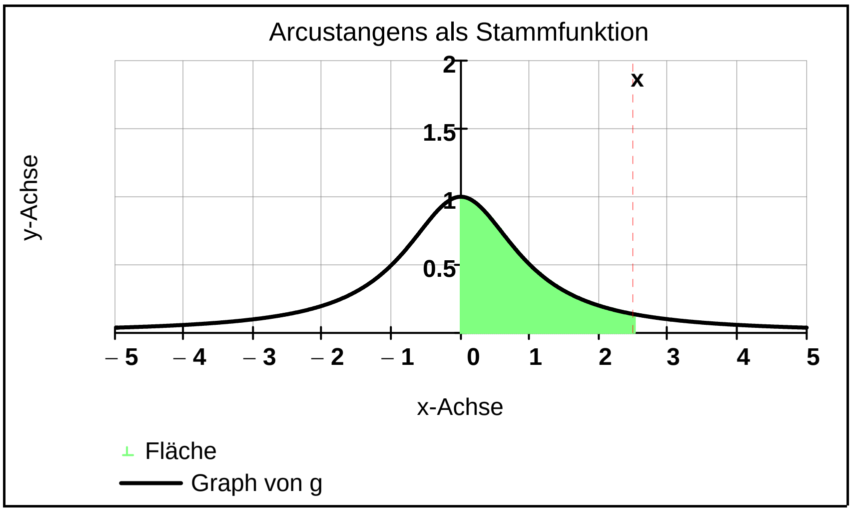
Vergleichen Sie für zwei selbst gewählte konkrete Werte für x den Term mit dem Wert von arctan(x).

Es gilt: $\displaystyle \arctan(x) = \int_0^x \frac{1}{1+\tau^2}\,d\tau$

Wählen Sie x:



Darstellung



$x = 2.5$

$\displaystyle\int_0^x \frac{1}{1+\tau^2}\,d\tau = 1.19$

Zum Vergleich:

$\arctan(x) = 1.19$