Wurzelfunktion als Umkehrfunktion der Parabel

Aufgabe 1

Gegeben ist der Graph der Funktion f sowie der Funktionsterm mit $f(x) := x^2 - x + \frac{7}{4}$ und $x \in \mathbb{R}$.

a) Bestimmen Sie das Intervall, in dem die Funktion f umkehrbar ist und die zugehörige Wertemenge.
b) Markieren Sie den umkehrbaren Teil des Funktionsgraphen und zeichnen Sie den Graphen der zugehörigen Umkehrfunktion.
c) Bestimmen Sie rechnerisch den Term der Umkehrfunktion und geben Sie die Wertemenge an.

Teilaufgabe a)

Scheitel: $x_S := \frac{1}{2}$ $\quad y_S := f(x_S) = \frac{3}{2}$ $\quad \Rightarrow \quad S\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$

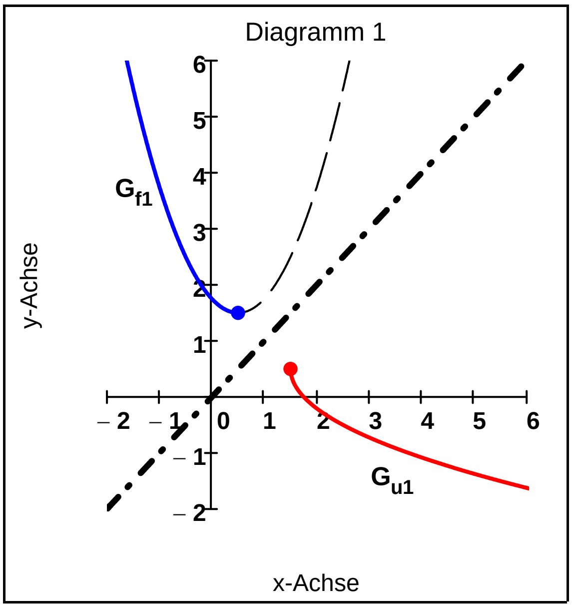
Monotonieintervalle bei der nach oben geöffneten Parabel:

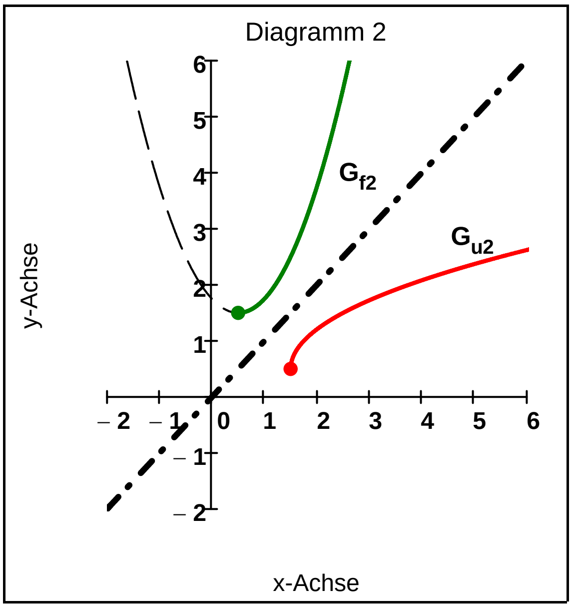
$\Rightarrow$ G_f ist streng monoton fallend für $x \in \left] -\infty ; \frac{1}{2} \right]$

$\Rightarrow$ G_f ist streng monoton steigend für $x \in \left[\frac{1}{2} ; \infty \right[$

Wertemenge: $W = [\, 1.5 ;\ \infty [$

Teilaufgabe b)





Teilaufgabe c)

Vertauschung der Variablen:

$$y1 = f(x) \rightarrow y1 = x^2 - x + \frac{7}{4} \left| \begin{array}{l} \text{ersetzen}, x = y \\ \text{ersetzen}, y1 = x \end{array} \right. \rightarrow x = y^2 - y + \frac{7}{4}$$

Auflösen nach y:

$$u0(x) := \rightarrow \begin{pmatrix} \dfrac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2\cdot x - 3}}{2} + \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2\cdot x - 3}}{2} \end{pmatrix}$$

Umkehrfunktion 1:

$D_1 = [\ 1.5\ ;\ \infty\ [$ $\quad$ $W_1 = \ ]\ -\infty\ /\ 0.5\ ]$ $\quad$ $u_1(x) := \dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2\cdot x - 3}}{2}$

Umkehrfunktion 2:

$D_2 = [\ 1.5\ ;\ \infty\ [$ $\quad$ $W_2 = [\ 0.5\ /\ \infty\ [$ $\quad$ $u_2(x) := \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2\cdot x - 3}}{2}$

Aufgabe 2

Gegeben ist der Graph der Funktion f sowie der Funktionsterm mit $\mathbf{f(x)} := -\frac{1}{2}\cdot x^2 - x + \frac{5}{2}$

und $\mathbf{x} \in \mathbf{IR}$.

a) Bestimmen Sie das Intervall, in dem die Funktion f umkehrbar ist und die zugehörige Wertemenge.

b) Markieren Sie den umkehrbaren Teil des Funktionsgraphen und zeichnen Sie den Graphen der zugehörigen Umkehrfunktion.

c) Bestimmen Sie rechnerisch den Term der Umkehrfunktion und geben Sie die Wertemenge an.

Teilaufgabe a)

Scheitel: $x_S := -1$ $\qquad y_S := f(x_S) = 3$ $\qquad \Rightarrow \qquad S(-1, 3)$

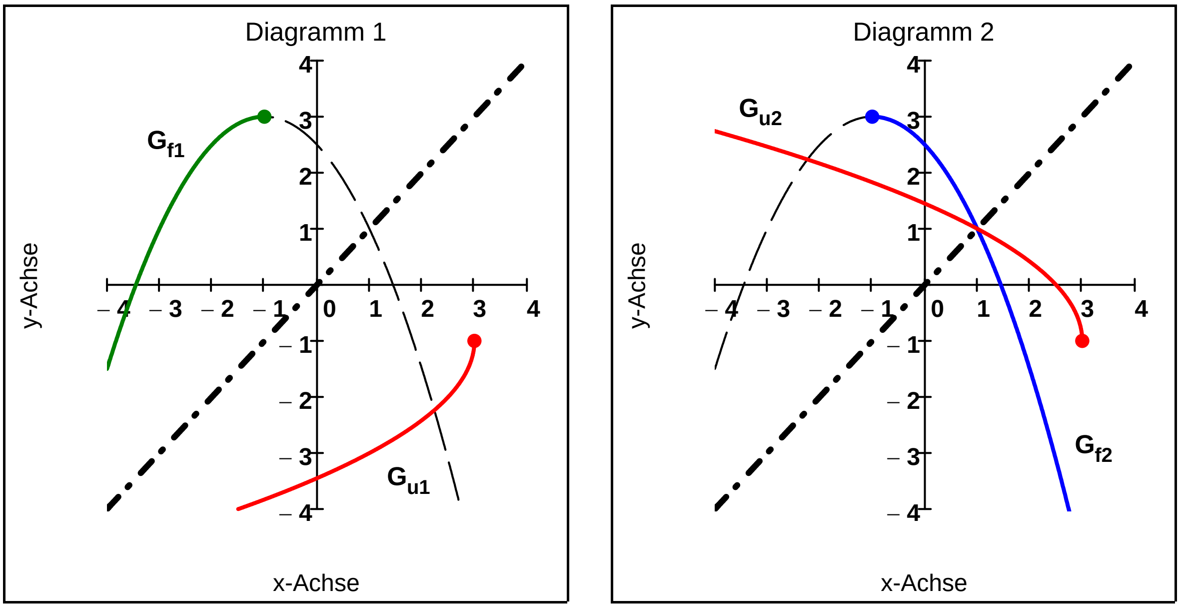
Monotonieintervalle bei der nach oben geöffneten Parabel:

$\Rightarrow$ G_f ist streng monoton steigend für $x \in \,]\, -\infty \,/\, -1\,]$

$\Rightarrow$ G_f ist streng monoton fallend für $x \in [\, -1 \,/\, \infty\, [$

Wertemenge: $\mathbf{W = \,]\, -\infty\, ;\; 3\,]}$

Teilaufgabe b)



Teilaufgabe c)

Vertauschung der Variablen:

$$y1 = f(x) \rightarrow y1 = \frac{5}{2} - x - \frac{x^2}{2} \left| \begin{array}{l} \text{ersetzen}, x = y \\ \text{ersetzen}, y1 = x \end{array} \right. \rightarrow x = \frac{5}{2} - y - \frac{y^2}{2}$$

Auflösen nach y:

$$u0(x) := \quad \rightarrow \begin{pmatrix} \sqrt{2}\cdot\sqrt{3-x} - 1 \\ -\sqrt{2}\cdot\sqrt{3-x} - 1 \end{pmatrix}$$

Umkehrfunktion 1:

$D_1 =]\ -\infty\ ;\ 3]$ $\quad W_1 =]\ -\infty\ /\ -1]$ $\quad u_1(x) := -\sqrt{2}\cdot\sqrt{3-x} - 1$

Umkehrfunktion 2:

$D_2 =]-\infty\ ;\ 3]$ $\quad W_2 = [-1\ /\ \infty[$ $\quad u_2(x) := \sqrt{2}\cdot\sqrt{3-x} - 1$