

Teilaufgabe 1.0

Gegeben ist die Funktion $f_a(x) = \ln\left(\frac{x^2}{a-x^2}\right)$ mit der maximalen Definitionsmenge $D_a = \mathbb{R}$

und $a \in \mathbb{R}^+$.

Teilaufgabe 1.1 (10 BE)

Bestimmen Sie D_a in Abhängigkeit von a , das Symmetrieverhalten des Graphen von f_a und die Nullstellen von f_a . Ermitteln Sie das Verhalten von $f_a(x)$ an den Rändern der Definitionsmenge und damit die Gleichungen der Asymptoten des Graphen von f_a .

Teilergebnis: $D_a =]-\sqrt{a}; 0[\cup] 0; \sqrt{a}[$

Für die Definitionsmenge positives Argument:

$$\frac{x^2}{a-x^2} > 0 \quad \left| \begin{array}{l} \text{auflösen, } x \\ \text{annehmen, } a > 0 \end{array} \right. \rightarrow -\sqrt{a} < x < 0 \vee 0 < x < \sqrt{a}$$

$$\Rightarrow D_a =]-\sqrt{a}; 0[\cup] 0; \sqrt{a}[$$

$$f(x, a) := \ln\left(\frac{x^2}{a-x^2}\right) \quad f(-x, a) \rightarrow \ln\left(\frac{x^2}{a-x^2}\right) \quad \Rightarrow \quad G_f \text{ ist achsensymmetrisch}$$

Nullstellenbedingung:

$$f(x, a) = 0 \rightarrow \ln\left(\frac{x^2}{a-x^2}\right) = 0 \text{ auflösen, } x \rightarrow \left(\begin{array}{c} \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{a}}{2} \\ \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{a}}{2} \end{array} \right)$$

$$\text{Nullstellen: } x_1(a) := -\frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{a}}{2} \quad x_2(a) := \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{a}}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \ln\left(\frac{x^2}{a-x^2}\right) \rightarrow -\infty \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln\left(\frac{x^2}{a-x^2}\right) \rightarrow -\infty$$

$\Rightarrow x = 0$ vertikale Asymptote mit VZW.

$$\lim_{x \rightarrow -\sqrt{a}^+} \ln\left(\frac{x^2}{a-x^2}\right) \rightarrow \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \sqrt{a}^-} \ln\left(\frac{x^2}{a-x^2}\right) \rightarrow \infty$$

⇒ $x = -\sqrt{a}$ und $x = \sqrt{a}$ vertikale Asymptoten.

Teilaufgabe 1.2 (5 BE)

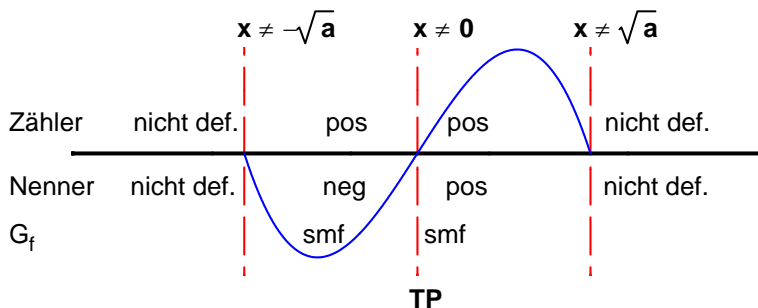
Ermitteln Sie das Monotonieverhalten des Graphen von f_a .

Teilergebnis: $f'_a(x) = \frac{2 \cdot a}{x \cdot (a - x^2)}$

$$f'(x, a) := \frac{d}{dx} f(x, a) = \frac{\left[\frac{2 \cdot x}{a - x^2} + \frac{2 \cdot x^3}{(a - x^2)^2} \right] \cdot (a - x^2)}{x^2} = \frac{2 \cdot a}{x \cdot (a - x^2)}$$



Nenner abrufen: $n(x, a) = -x \cdot (x^2 - 9)$



G_f ist streng monoton fallend in $] -\sqrt{a}; 0[$ und G_f ist streng monoton steigend in $] 0; \sqrt{a}[$.

In den folgenden Aufgabe ist $a = 4$

Teilaufgabe 1.3 (5 BE)

Bestimmen Sie die Koordinaten der Wendepunkte des Graphen von f_4 .

2. Ableitung: $f''(x) := \frac{d}{dx} f'(x, 4)$

$$f''(x) = \frac{16}{(x^2 - 4)^2} + \frac{8}{x^2 \cdot (x^2 - 4)} = \frac{8 \cdot (3 \cdot x^2 - 4)}{x^2 \cdot (x^2 - 4)^2}$$

Zähler abrufen: $z''(x) := \text{numer}(f''(x)) = 24 \cdot x^2 - 32$

$$z''(x) = 24 \cdot x^2 - 32$$

Wendepunkte: $x_W := z''(x) = 0 \rightarrow 24 \cdot x^2 - 32 = 0$ auflösen, $x \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{2 \cdot \sqrt{3}}{3} \\ \frac{2 \cdot \sqrt{3}}{3} \\ -\frac{2 \cdot \sqrt{3}}{3} \\ -\frac{2 \cdot \sqrt{3}}{3} \end{pmatrix}$ einfache Nullstellen, also Wendepunkte

Wendepunkte abrufen:

Funktionswerte:

$$x_{W1} := x_{W2} \quad x_{W2} := x_{W1}$$

$$y_{W1} := f(x_{W1}, 4) \quad y_{W2} := f(x_{W2}, 4)$$

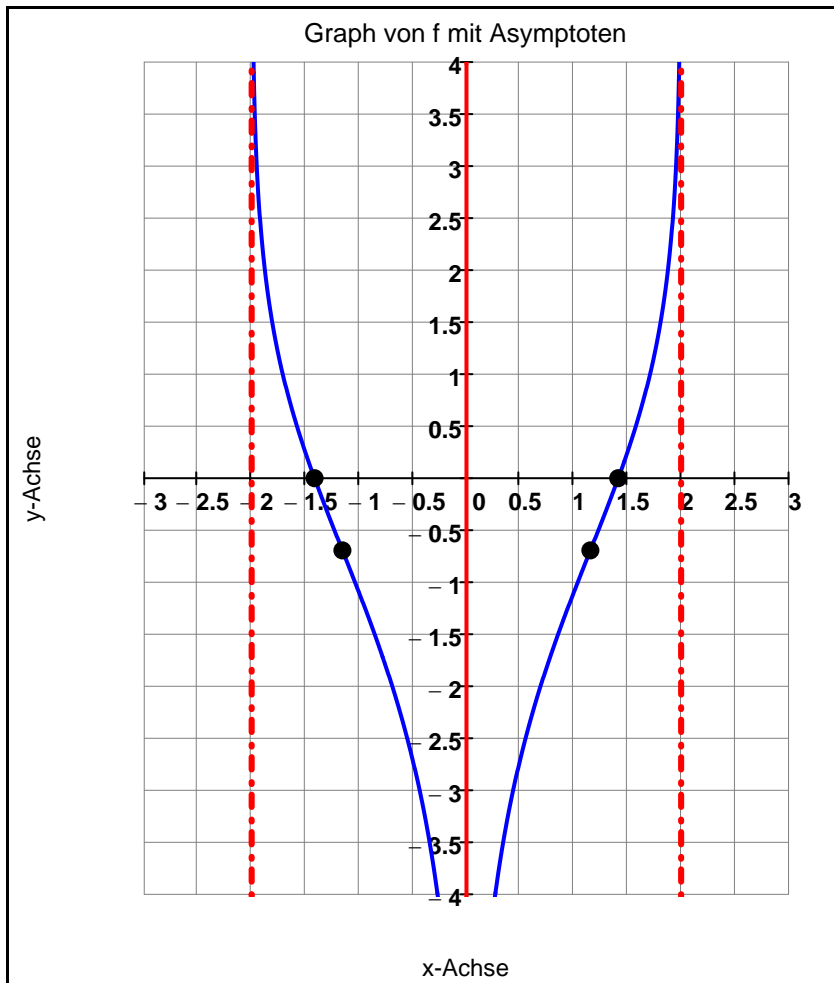
$$x_{W1} = -\frac{2 \cdot \sqrt{3}}{3} \quad x_{W2} = \frac{2 \cdot \sqrt{3}}{3}$$

$$y_{W1} = -\ln(2) \quad y_{W2} = -\ln(2)$$

Teilaufgabe 1.4 (4 BE)

Zeichnen Sie den Graphen von f_4 im Bereich $-2 < x < 2$ unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse (1 LE = 2 cm). Tragen Sie auch die Asymptoten ein.

$$f(x) := \ln\left(\frac{x^2}{4 - x^2}\right) \quad x_1 := x_1(4) = -\sqrt{2} \quad x_2 := x_2(4) = \sqrt{2}$$



Teilaufgabe 1.5 (4 BE)

Begründen Sie, dass die Funktion g mit $g(x) = f_4(x)$ und $D_g =]0; 2[$ umkehrbar ist.

Der Punkt $P'(0 / ?)$ liegt auf dem Graphen von g^{-1} . Ermitteln Sie die Gleichung der Tangente im Punkt P' , ohne $g^{-1}(x)$ zu berechnen.

G_g ist streng monoton steigend in $]0; 2[$, die Wertemenge $W =]-\infty; \infty[$ ist zusammenhängend $\Rightarrow g$ ist umkehrbar.

Nullstelle von g_4 ist das Urbild von P' :

$$g(x) := \ln\left(\frac{x^2}{4-x^2}\right) \quad \text{Nullstellen:} \quad x_1(4) = -\sqrt{2} \quad \text{nicht definiert} \quad x_2(4) = \sqrt{2}$$

$$N(\sqrt{2}, 0) \quad \Rightarrow \quad P'(0, \sqrt{2})$$

$$g'(x) := \frac{d}{dx}g(x) = \frac{8}{4 \cdot x - x^3}$$

Steigung der Tangente: $m_t := \frac{1}{g'(\sqrt{2})}$

Funktionsterm der Tangente: $t(x) := m_t \cdot x + \sqrt{2}$ $t(x) = \frac{\sqrt{2} \cdot x}{4} + \sqrt{2}$

Teilaufgabe 1.6 (4 BE)

Bestimmen Sie den Term der Umkehrfunktion g^{-1} und die zugehörige Definitionsmenge $D_{g^{-1}}$.

Teilergebnis: $g^{-1}(x) = \sqrt{\frac{4 \cdot e^x}{1 + e^x}}$

$y = \ln\left(\frac{x^2}{4 - x^2}\right)$ Vertauschung der Variablen: $x = \ln\left(\frac{y^2}{4 - y^2}\right)$

$$e^x = \frac{y^2}{4 - y^2} \Leftrightarrow e^x \cdot (4 - y^2) = y^2 \Leftrightarrow 4 \cdot e^x = y^2 \cdot (1 + e^x)$$

$$y^2 = \frac{4 \cdot e^x}{1 + e^x} \Leftrightarrow y = \sqrt{\frac{4 \cdot e^x}{1 + e^x}} \quad u(x) := \sqrt{\frac{4 \cdot e^x}{1 + e^x}}$$

Definitionsmenge: $D_{g^{-1}} = \mathbb{R}$

Teilaufgabe 3.0

Gegeben sind die Funktionen $k(x) := 2 \cdot \arctan(\sqrt{x^2 - 1})$ und $h(x) := \arcsin\left(1 - \frac{2}{x^2}\right)$ in der gemeinsamen Definitionsmenge $D \subseteq \mathbb{R}$.

Teilaufgabe 3.1 (4 BE)

Zeigen Sie, dass die Funktionen k und h dieselbe maximale Definitionsmenge D besitzen, und geben Sie diese an.

Definitionsmenge von k :

$$x^2 - 1 \geq 0 \text{ auflösen, } x \rightarrow 1 \leq x \vee x \leq -1$$

Definitionsmenge von h :

$$-1 \leq \left(1 - \frac{2}{x^2}\right) \leq 1 \text{ auflösen, } x \rightarrow 1 \leq x \vee x \leq -1$$

$$\Rightarrow \text{gemeinsame Definitionsmenge: } D =]-\infty; -1[\cup]1; \infty[$$

Teilaufgabe 3.2 (8 BE)

Zeigen Sie, dass sich $k(x)$ und $h(x)$ jeweils nur um eine additive Konstante unterscheiden, und bestimmen Sie diese Konstante für $x \geq 1$.

Ableitungen:

$$k'(x) := \frac{d}{dx} k(x) \quad k'(x) = \frac{2}{x \cdot \sqrt{x^2 - 1}}$$

$$h'(x) := \frac{d}{dx} h(x) \quad h'(x) = \frac{4}{x^3 \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{2}{x^2} - 1\right)^2}} = \frac{4}{x^3 \cdot \sqrt{\frac{4 \cdot x^2 - 4}{x^4}}}$$

$$\text{Teilweises Radizieren: } h'(x) = \frac{4}{\frac{x^3}{x^2} \cdot \sqrt{4 \cdot x^2 - 4}} = \frac{4}{x \cdot \sqrt{4 \cdot x^2 - 4}}$$

Wegen $k'(x) = h'(x)$ für alle $x \in]-\infty; -1[\cup]1; \infty[$ und der Stetigkeit von k und h auf D gilt:

$$\text{Ansatz: } k(x) = \begin{cases} (h(x) + C_1) & \text{if } x \leq -1 \\ (h(x) + C_2) & \text{if } x \geq 1 \end{cases}$$

$$C_2 := k(1) - h(1)$$

$$C_2 = 2 \cdot \arctan\left(\sqrt{1^2 - 1}\right) - \arcsin\left(1 - \frac{2}{1^2}\right) = 2 + \arctan(0) - \arcsin(-1)$$

$$C_2 = \frac{\pi}{2}$$

$$C_1 := k(-1) - h(-1)$$

$$C_1 = 2 \cdot \arctan\left[\sqrt{(-1)^2 - 1}\right] - \arcsin\left[1 - \frac{2}{(-1)^2}\right] = 2 + \arctan(0) - \arcsin(-1)$$

$$C_1 = \frac{\pi}{2}$$

Es gilt für alle $x \in D$: $k(x) = h(x) + \frac{\pi}{2}$

