Abiturprüfung Berufliche Oberschule 2010
Mathematik 13 Technik - A I - Lösung

Teilaufgabe 1.0

Gegeben ist die Funktion $f_a(x) = \ln\left(\frac{x^2}{a - x^2}\right)$ mit der maximalen Definitionsmenge $D_a = IR$ und $a \in IR^+$.

Teilaufgabe 1.1 (10 BE)

Bestimmen Sie D_a in Abhängigkeit von a, das Symmetrieverhalten des Graphen von f_a und die Nullstellen von f_a. Ermitteln Sie das Verhalten von $f_a(x)$ an den Rändern der Definitionsmenge und damit die Gleichungen der Asymptoten des Graphen von f_a.

Teilergebnis: $D_a =]-\sqrt{a};\ 0[\ \cup\ ]\ 0;\ \sqrt{a}[$

Für die Definitionsmenge positives Argument:

$$\frac{x^2}{a - x^2} > 0 \ \left|\ \begin{array}{l} \text{auflösen}, x \\ \text{annehmen}, a > 0 \end{array}\right. \rightarrow -\sqrt{a} < x < 0 \vee 0 < x < \sqrt{a}$$

$$\Rightarrow \quad D_a =]-\sqrt{a};\ 0[\ \cup\ ]\ 0;\ \sqrt{a}[$$

$$f(x,a) := \ln\left(\frac{x^2}{a - x^2}\right) \qquad f(-x,a) = \ln\left(\frac{x^2}{a - x^2}\right) \qquad \Rightarrow$$

G_f ist achsensymmetrisch

Nullstellenbedingung:

$$f(x,a) = 0 \rightarrow \ln\left(\frac{x^2}{a - x^2}\right) = 0 \ \text{auflösen}, x \ \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{a}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{a}}{2} \end{pmatrix}$$

Nullstellen: $x_1(a) := -\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{a}}{2}$ $\qquad x_2(a) := \frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{a}}{2}$

$$\lim_{x \to 0^-} \ln\left(\frac{x^2}{a - x^2}\right) \rightarrow -\infty \qquad \lim_{x \to 0^+} \ln\left(\frac{x^2}{a - x^2}\right) \rightarrow -\infty$$

$\Rightarrow \quad x = 0$ vertikale Asymptote mit VZW.

$$\lim_{x \to -\sqrt{a}^{\,+}} \ln\left(\frac{x^2}{a - x^2}\right) \to \infty \qquad\qquad \lim_{x \to \sqrt{a}^{\,-}} \ln\left(\frac{x^2}{a - x^2}\right) \to \infty$$

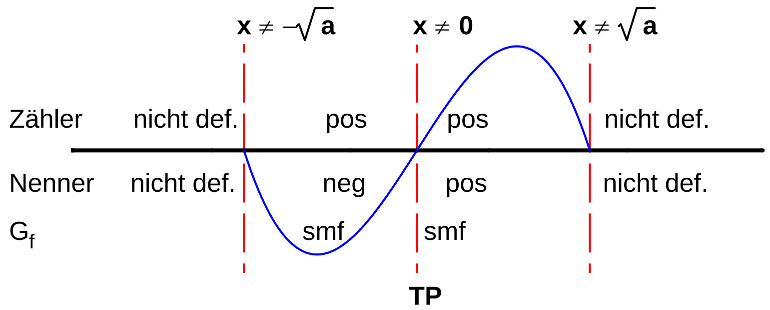
$\Rightarrow$ $\quad$ $x = -\sqrt{a}$ und $x = -\sqrt{a}$ vertikale Asymptoten.

Teilaufgabe 1.2 **(5 BE)**
Ermitteln Sie das Monotonieverhalten des Graphen von f_a.

Teilergebnis: $f'_a(x) = \dfrac{2 \cdot a}{x \cdot \left(a - x^2\right)}$

$$f'(x, a) := \frac{d}{dx} f(x, a) = \frac{\left[\dfrac{2 \cdot x}{a - x^2} + \dfrac{2 \cdot x^3}{\left(a - x^2\right)^2}\right] \cdot \left(a - x^2\right)}{x^2} = \frac{2 \cdot a}{x \cdot \left(a - x^2\right)}$$

Nenner abrufen: $\quad n(x, a) = -x \cdot \left(x^2 - 9\right)$



G_f ist streng monoton fallend in $\left]\, -\sqrt{a} ;\ 0 \,\right[$ und G_f ist streng monoton steigend in $\left]\, 0 ;\ \sqrt{a} \,\right[$.

In den folgenden Aufgabe ist **a = 4**

Teilaufgabe 1.3 (5 BE)
Bestimmen Sie die Koordinaten der Wendepunkte des Graphen von f_4.

2\. Ableitung: $f''(x) := \frac{d}{dx} f'(x,4)$

$$f''(x) = \frac{16}{\left(x^2-4\right)^2} + \frac{8}{x^2\cdot\left(x^2-4\right)} = \frac{8\cdot\left(3\cdot x^2-4\right)}{x^2\cdot\left(x^2-4\right)^2}$$

Zähler abrufen: $z''(x) := \text{numer}(f''(x)) = 24\cdot x^2 - 32$

$z''(x) = 24\cdot x^2 - 32$

Wendepunkte: $xW := z''(x) = 0 \rightarrow 24\cdot x^2 - 32 = 0 \text{ auflösen}, x \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{2\cdot\sqrt{3}}{3} \\ -\frac{2\cdot\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix}$ einfache Nullstellen, also Wendepunkte

Wendepunkte abrufen:

$x_{W1} := xW_2 \qquad x_{W2} := xW_1$

$x_{W1} = -\frac{2\cdot\sqrt{3}}{3} \qquad x_{W2} = \frac{2\cdot\sqrt{3}}{3}$

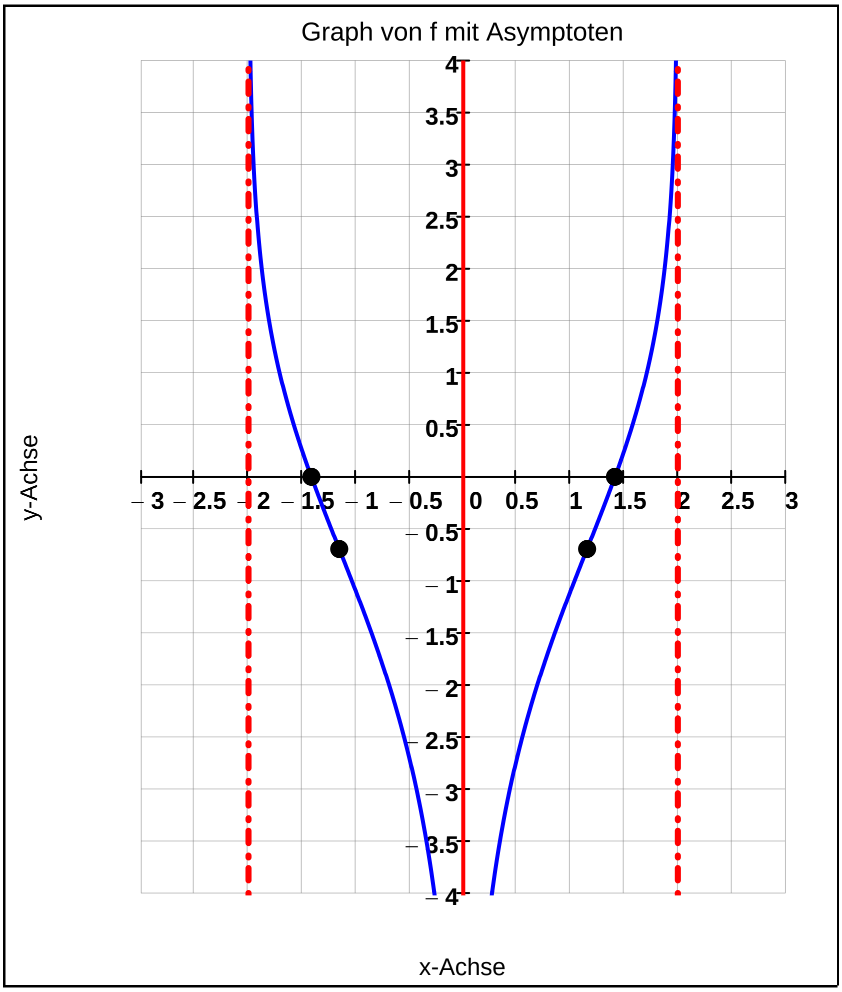
Funktionswerte:

$y_{W1} := f\left(x_{W1}, 4\right) \qquad y_{W2} := f\left(x_{W2}, 4\right)$

$y_{W1} = -\ln(2) \qquad y_{W2} = -\ln(2)$

Teilaufgabe 1.4 (4 BE)
Zeichnen Sie den Graphen von f_4 im Bereich $-2 < x < 2$ unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse (1 LE = 2 cm). Tragen Sie auch die Asymptoten ein.

$f(x) := \ln\left(\frac{x^2}{4-x^2}\right) \qquad x_1 := x_1(4) = -\sqrt{2} \qquad x_2 := x_2(4) = \sqrt{2}$



Teilaufgabe 1.5 **(4 BE)**

Begründen Sie, dass die Funktion g mit $g(x) = f_4(x)$ und $D_g =]\,0\,;\,2\,[$ umkehrbar ist.

Der Punkt P'(0 / ?) liegt auf dem Graphen von g^{-1}. Ermitteln Sie die Gleichung der Tangente im Punkt P', ohne $g^{-1}(x)$ zu berechnen.

G_g ist streng monoton steigend in $]\,0\,;\,2\,[$, die Wertemenge $W =]\,-\infty\,;\,\infty\,[$ ist zusammenhängend $\Rightarrow$ g ist umkehrbar.

Nullstelle von g_4 ist das Urbild von P':

$$g(x) := \ln\left(\frac{x^2}{4-x^2}\right)$$

Nullstellen: $x_1(4) = -\sqrt{2}$ nicht definiert $\qquad x_2(4) = \sqrt{2}$

$$N\left(\sqrt{2}, 0\right) \quad \Rightarrow \quad P'\left(0, \sqrt{2}\right)$$

$$g'(x) := \frac{d}{dx}g(x) = \frac{8}{4\cdot x - x^3}$$

Steigung der Tangente: $m_t := \frac{1}{g'(\sqrt{2})}$

Funktionsterm der Tangente: $t(x) := m_t\cdot x + \sqrt{2}$ $\qquad t(x) = \frac{\sqrt{2}\cdot x}{4} + \sqrt{2}$

Teilaufgabe 1.6 **(4 BE)**

Bestimmen Sie den Term der Umkehrfunktion g^{-1} und die zugehörige Definitionsmenge D_g**-1**.

Teilergebnis: $g^{-1}(x) = \sqrt{\frac{4\cdot e^x}{1 + e^x}}$

$y = \ln\left(\frac{x^2}{4 - x^2}\right)$ Vertauschung der Variablen: $x = \ln\left(\frac{y^2}{4 - y^2}\right)$

$$e^x = \frac{y^2}{4 - y^2} \quad \Leftrightarrow \quad e^x\cdot\left(4 - y^2\right) = y^2 \quad \Leftrightarrow \quad 4\cdot e^x = y^2\cdot\left(1 + e^x\right)$$

$$y^2 = \frac{4\cdot e^x}{1 + e^x} \quad \Leftrightarrow \quad y = \sqrt{\frac{4\cdot e^x}{1 + e^x}} \qquad u(x) := \sqrt{\frac{4\cdot e^x}{1 + e^x}}$$

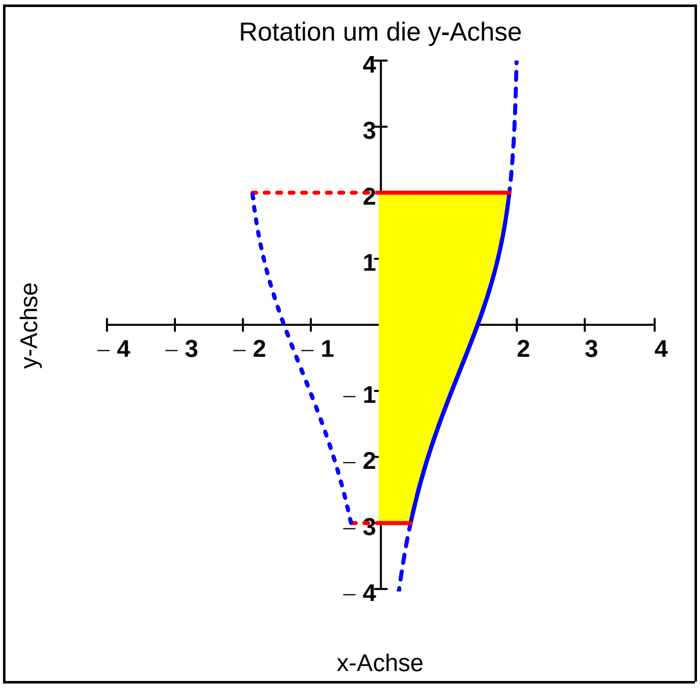
Definitionsmenge: D_g**-1 = IR**

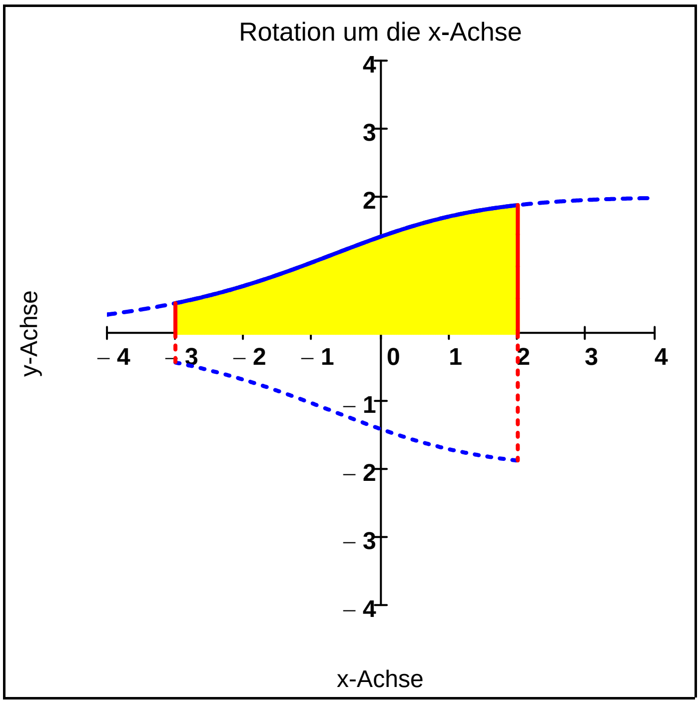
Teilaufgabe 1.7 (6 BE)
Rotiert der Graph von g um die y-Achse, so entsteht ein Rotationskörper. Für $-\infty < x \le 2$ erhält man einen Körper mit endlichem Volumeninhalt. Berechnen Sie die Maßzahl des Volumeninhalts dieses Körpers.

Funktionsterm: $f(x) := \ln\left(-\frac{x^2}{x^2-4}\right)$

Umkehrfunktion: $u(x) := \sqrt{\frac{4 \cdot e^x}{1+e^x}}$

Darstellung





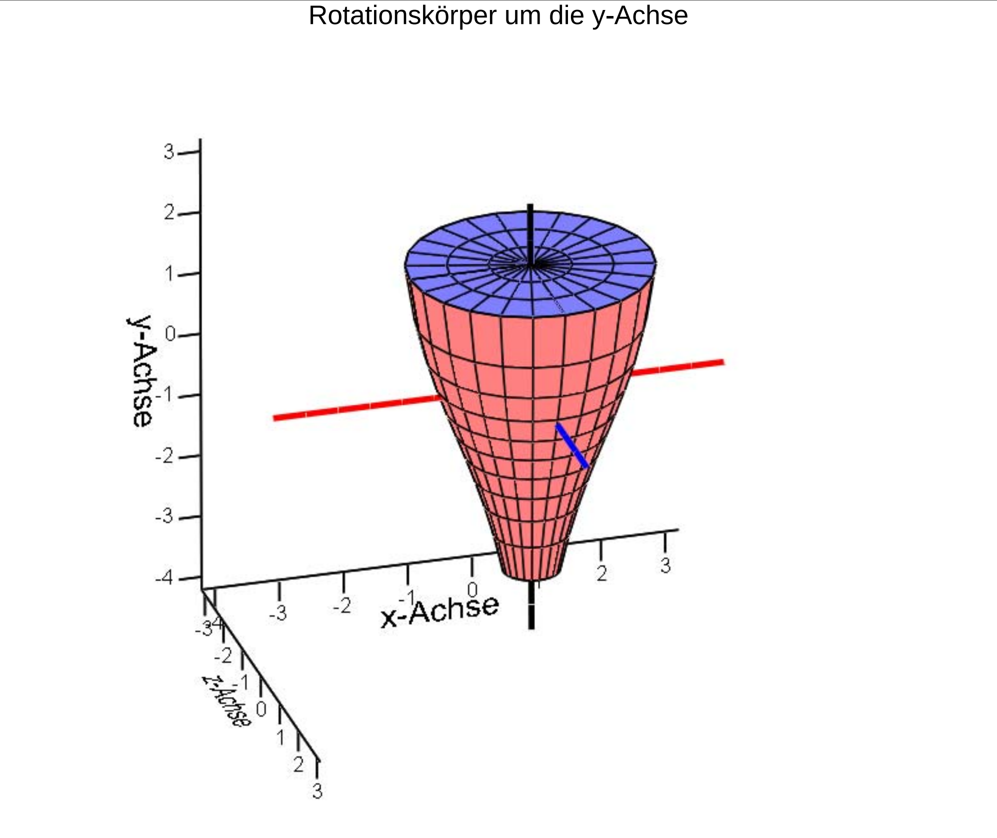
Stammfunktion:

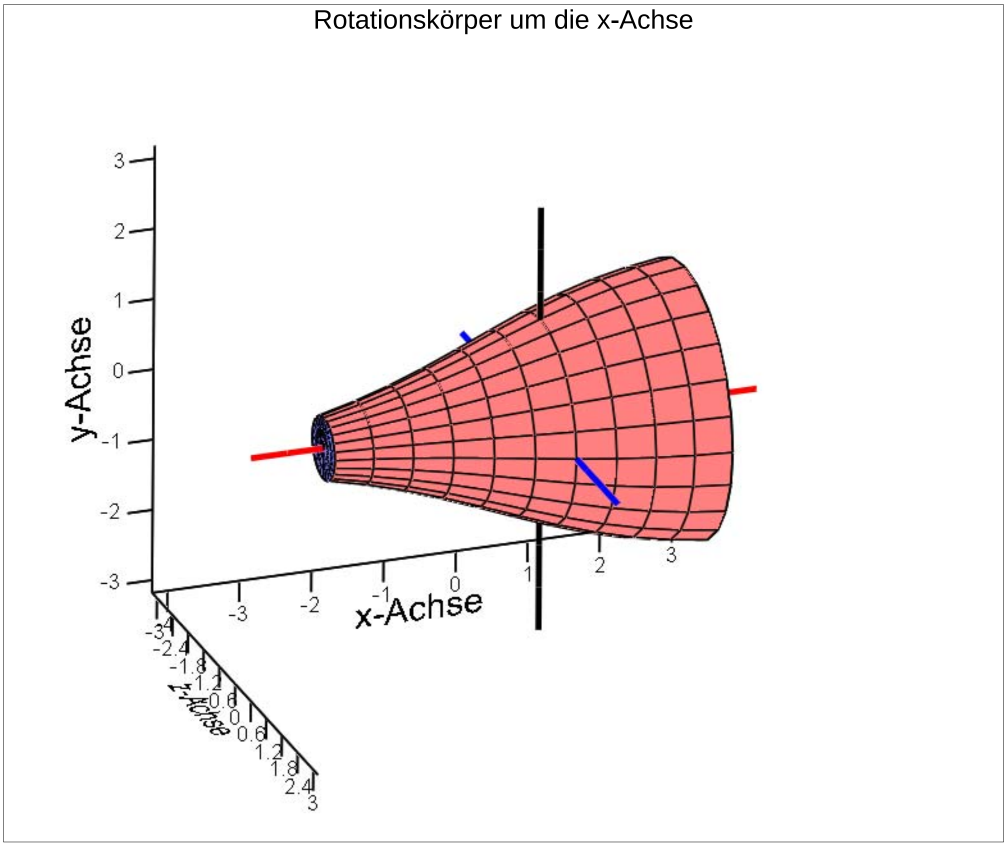
$$\int \frac{4 \cdot e^x}{1+e^x}\, dx = 4 \cdot \ln\left(e^x + 1\right)$$

$$V_x(b) := \lim_{b \to -\infty} \int_b^2 (u(x))^2 \cdot \pi \, dx$$

$$V_x(b) = 4 \cdot \pi \cdot \ln\left(e^2 + 1\right)$$

Definitionen





Teilaufgabe 2 (10 BE)
Für die Geschwindigkeit $\mathbf{v(t)}$ eines Körpers unter dem Einfluss einer zeitlich periodisch wirkenden Kraft und einer geschwindigkeitsproportionalen Reibungskraft gilt folgende Differentialgleichung:
$\frac{d}{dt}v(t) + 2 \cdot v(t) = \sin(2 \cdot t)$. Der Körper soll zum Zeitpunkt $t = 0$ aus der Ruhe heraus starten.
Ermitteln Sie $v(t)$ mithilfe der Methode der Variation der Konstanten.

Allgemeine Differentialgleichung: $v' + p(t) \cdot v = q(t)$

Konkrete lineare inhomogene DGL: $v' + 2 \cdot v = \sin(2 \cdot t)$

Definition von p(t) und q(t): $p(t) := 2$ $\quad q(t) := \sin(2 \cdot t)$

Definition der homogenen DGL: $v' + 2 \cdot v = 0$

Lösung der homogenen DGL nach Formelsammlung:

$$v_H(t, K) := K \cdot e^{-\int p(t)\, dt} \qquad v_H(t, K) = K \cdot e^{-2 \cdot t}$$

Variation der Konstanten:

$$v_H(t) = k(t) \cdot e^{-2 \cdot t}$$

$$v'_H(t, k) = k'(t) \cdot e^{-2 \cdot t} + k(t) \cdot (-2) \cdot e^{-2 \cdot t}$$

Eingesetzt in die DGL $v' + p(t) \cdot v = q(t) \rightarrow 2 \cdot v + v' = \sin(2 \cdot t)$ liefert:

$$k'(t) \cdot e^{-2 \cdot t} + k(t) \cdot (-2) \cdot e^{-2 \cdot t} + 2 \cdot \left(k(t) \cdot e^{-2 \cdot t}\right) = \sin(2 \cdot t)$$

Vereinfacht: $k'(t) \cdot e^{-2 \cdot t} = \sin(2 \cdot t)$

Auflösen: $k'(t) = \sin(2 \cdot t) \cdot e^{2 \cdot t}$

Integration: $k(t) = \int \sin(2 \cdot t) \cdot e^{2 \cdot t}\, dt \qquad (1)$

Bestimmung der 1. Stammfunktion über partielle Integration:

$$u(t) = \sin(2\cdot t) \qquad v'(t) = e^{2\cdot t}$$

$$\Rightarrow \quad k(t) = \sin(2\cdot t)\cdot\frac{1}{2}\cdot e^{2\cdot t} - \int \frac{1}{2}\cdot e^{2t}\cdot 2\cdot\cos(2\cdot t)\,dt \qquad (2)$$

Bestimmung der 2. Stammfunktion über partielle Integration:

$$\int e^{2t}\cdot\cos(2\cdot t)\,dt$$

$$u(t) = \cos(2\cdot t) \qquad v'(t) = e^{2\cdot t}$$

$$\Rightarrow \quad \int e^{2t}\cdot\cos(2\cdot t)\,dt = \cos(2\cdot t)\cdot\frac{1}{2}\cdot e^{2\cdot t} - \int \frac{1}{2}\cdot e^{2\cdot t}\cdot(-2\cdot\sin(2\cdot t))\,dt$$

$$\ldots = \frac{1}{2}\cdot\cos(2\cdot t)\cdot e^{2\cdot t} + \int e^{2\cdot t}\cdot\sin(2\cdot t)\,dt \qquad (3)$$

(2) und (3) in (1) eingesetzt:

$$\int \sin(2\cdot t)\cdot e^{2\cdot t}\,dt = \sin(2\cdot t)\cdot\frac{1}{2}\cdot e^{2\cdot t} - \frac{1}{2}\cdot\cos(2\cdot t)\cdot e^{2\cdot t} - \int e^{2\cdot t}\cdot\sin(2\cdot t)\,dt$$

$$\Rightarrow \quad 2\cdot\int \sin(2\cdot t)\cdot e^{2\cdot t}\,dt = \sin(2\cdot t)\cdot\frac{1}{2}\cdot e^{2\cdot t} - \frac{1}{2}\cdot\cos(2\cdot t)\cdot e^{2\cdot t}$$

$$\Rightarrow \quad \int \sin(2\cdot t)\cdot e^{2\cdot t}\,dt = \frac{e^{2\cdot t}}{4}\cdot(\sin(2\cdot t) - \cos(2\cdot t))$$

$$\Rightarrow \quad k(t) = \frac{e^{2\cdot t}}{4}\cdot(\sin(2\cdot t) - \cos(2\cdot t)) + \overline{K}$$

Allgemeine Lösung:

$$v_A(t) = k(t)\cdot e^{-2\cdot t} = \left[\frac{e^{2\cdot t}}{4}\cdot(\sin(2\cdot t) - \cos(2\cdot t)) + C\right]\cdot e^{-2\cdot t} = \frac{1}{4}\cdot(\sin(2\cdot t) - \cos(2\cdot t)) + \overline{K}\cdot e^{-2\cdot t}$$

$$v_A(t) = \frac{1}{4}\cdot(\sin(2\cdot t) - \cos(2\cdot t)) + K$$

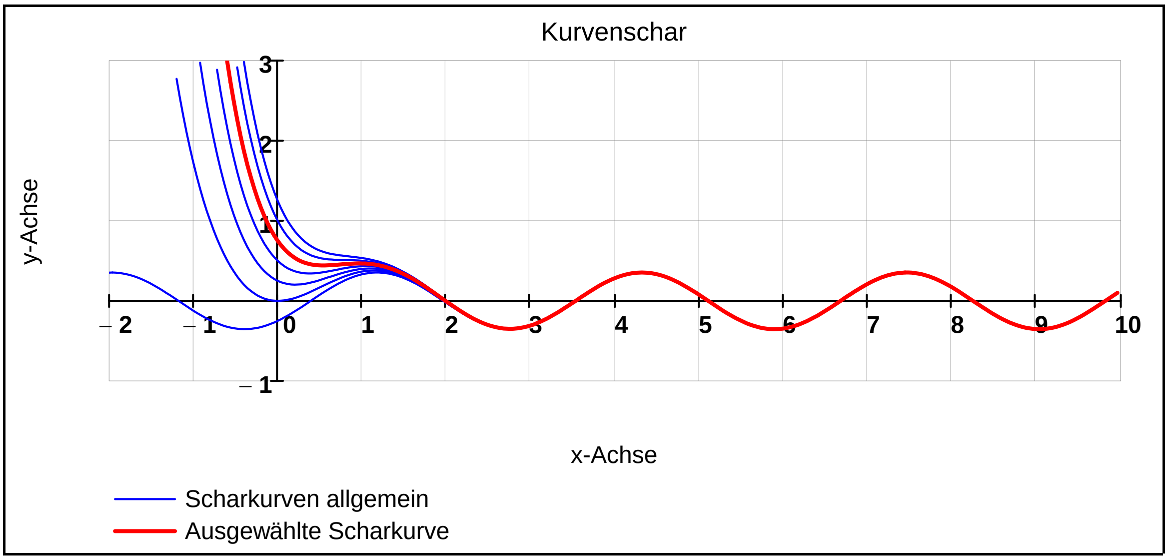
Programm für die Darstellung der Kurvenschar

Kurvenschar mit Auswahl einer Kurve:

Definitionen

Parameterwert: $K = 1$

Ausgewählte Scharkurve: $v_A(t) = e^{-2 \cdot t} - \frac{\cos(2 \cdot t)}{4} + \frac{\sin(2 \cdot t)}{4}$



Gegeben: $v_A(t, K) = \frac{\sin(2 \cdot t)}{4} - \frac{\cos(2 \cdot t)}{4} + K \cdot e^{-2 \cdot t}$ $\quad t_0 = 0 \quad v_0 = 0$

Bestimmung der Konstanten K über die Anfangsbedingung:

$K_0 := v_A(t_0, K) = v_0$ auflösen , K $\rightarrow \frac{1}{4}$

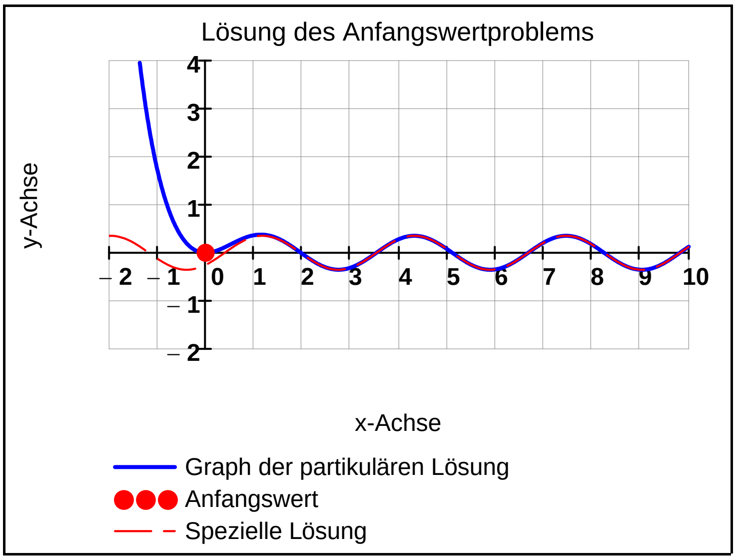
Einsetzen: $v_P(t) := v_A(t, K_0)$

Partikuläre Lösung: $v_P(t) = \frac{e^{-2 \cdot t}}{4} - \frac{\cos(2 \cdot t)}{4} + \frac{\sin(2 \cdot t)}{4}$ mit **D = IR**

Definitionen

Lösung ohne Störfunktion: $g(t) := \frac{\sin(2\cdot t) - \cos(2\cdot t)}{4}$

Partikuläre Lösung: $v_P(t) = -\frac{\cos(2\cdot t) - e^{-2\cdot t} - \sin(2\cdot t)}{4}$



Anfangswert:

$P = (0 \quad 0)$

Parameter:

$K = \frac{1}{4}$

Definitionsmenge:

$D = IR^+$

Teilaufgabe 3.0

Gegeben sind die Funktionen $k(x) := 2\cdot\arctan\left(\sqrt{x^2 - 1}\right)$ und $h(x) := \arcsin\left(1 - \frac{2}{x^2}\right)$ in der gemeinsamen Definitionsmenge $D \subseteq IR$.

Teilaufgabe 3.1 (4 BE)

Zeigen Sie, dass die Funktionen k und h dieselbe maximale Definitionsmenge D besitzen, und geben Sie diese an.

Definitionsmenge von k:

$$x^2 - 1 \geq 0 \text{ auflösen}, x \rightarrow 1 \leq x \vee x \leq -1$$

Definitionsmenge von h:

$$-1 \leq \left(1 - \frac{2}{x^2}\right) \leq 1 \text{ auflösen}, x \rightarrow 1 \leq x \vee x \leq -1$$

$\Rightarrow$ gemeinsame Definitionsmenge: $D =]-\infty\ ; -1[\ \cup\ ]1; \infty[$

Teilaufgabe 3.2 (8 BE)
Zeigen Sie, dass sich $k(x)$ und $h(x)$ jeweils nur um eine additive Konstante unterscheiden, und bestimmen Sie diese Konstante für $x \geq 1$.

Ableitungen:

$$k'(x) := \frac{d}{dx}k(x) \qquad k'(x) = \frac{2}{x\cdot\sqrt{x^2-1}}$$

$$h'(x) := \frac{d}{dx}h(x) \qquad h'(x) = \frac{4}{x^3\cdot\sqrt{1-\left(\frac{2}{x^2}-1\right)^2}} = \frac{4}{x^3\cdot\sqrt{\frac{4\cdot x^2-4}{x^4}}}$$

Teilweises Radizieren: $$h'(x) = \frac{4}{\frac{x^3}{x^2}\cdot\sqrt{4\cdot x^2-4}} = \frac{4}{x\cdot\sqrt{4\cdot x^2-4}}$$

Wegen $k'(x) = h'(x)$ für alle $x \in \left]-\infty;-1\right[\cup \left]1;\infty\right[$ und der Stetigkeit von k und h auf D gilt:

Ansatz: $$k(x) = \begin{cases} (h(x)+C_1) & \text{if } x \leq -1 \\ (h(x)+C_2) & \text{if } x \geq 1 \end{cases}$$

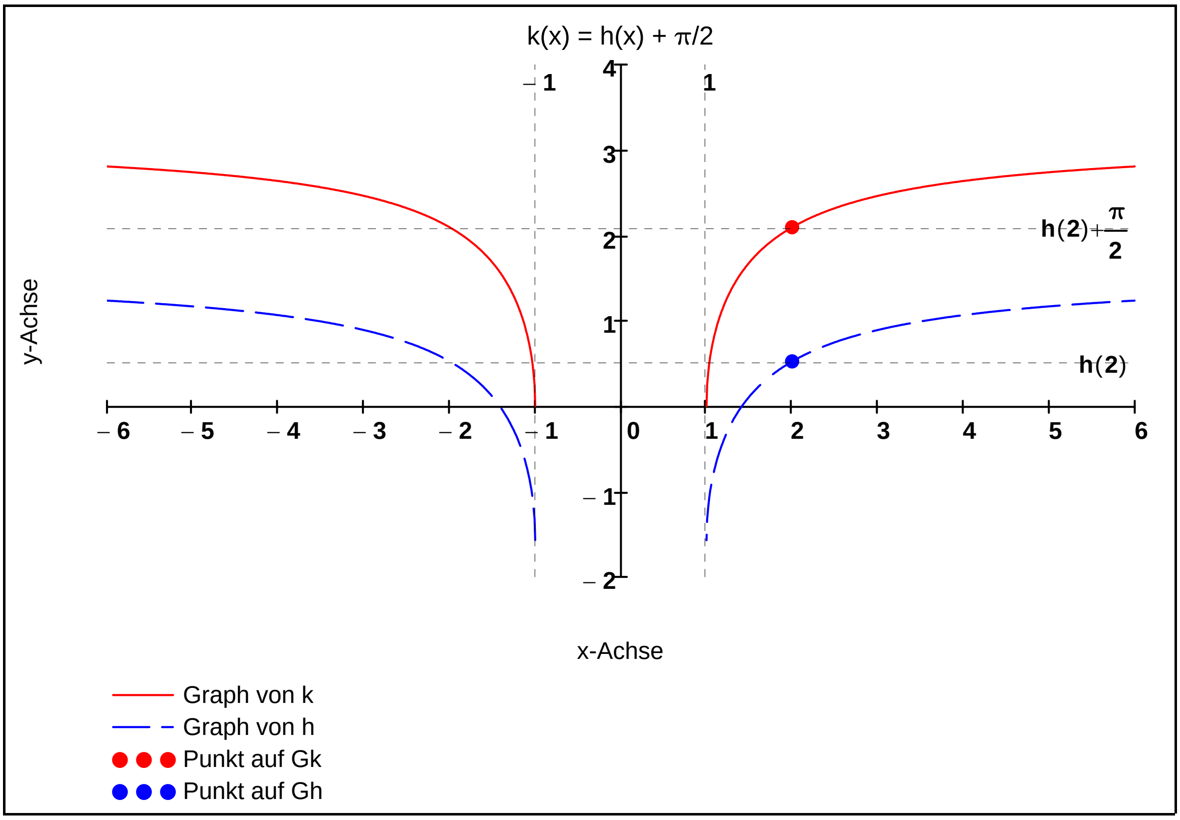
$$C_2 := k(1) - h(1)$$

$$C_2 = 2\cdot\arctan\left(\sqrt{1^2-1}\right) - \arcsin\left(1-\frac{2}{1^2}\right) = 2 + \arctan(0) - \arcsin(-1) \qquad C_2 = \frac{\pi}{2}$$

$$C_1 := k(-1) - h(-1)$$

$$C_1 = 2\cdot\arctan\left[\sqrt{(-1)^2-1}\right] - \arcsin\left[1-\frac{2}{(-1)^2}\right] = 2 + \arctan(0) - \arcsin(-1) \qquad C_1 = \frac{\pi}{2}$$

Es gilt für alle $x \in$ D: $k(x) = h(x) + \frac{\pi}{2}$



k(x) = h(x) + π/2
y-Achse
x-Achse
h(2)+π/2
h(2)
– 6
– 5
– 4
– 3
– 2
– 1
0
1
2
3
4
5
6
Graph von k
Graph von h
Punkt auf Gk
Punkt auf Gh