Abiturprüfung Berufliche Oberschule 2010
Mathematik 13 Technik - A II - Lösung

made with mathcad

Teilaufgabe 1.0

Gegeben ist die Funktion $f_a(x) = \dfrac{x^2 - a^2}{a \cdot x^2}$ mit $a \in IR \setminus \{0\}$ in der von a unabhängigen Definitionsmenge $D_f = IR \setminus \{0\}$.

Teilaufgabe 1.1 **(5 BE)**

Ermitteln Sie die Nullstellen von f_a, das Symmetrieverhalten des Graphen von f_a und die Werte von a, für welche die Wertemenge von f_a die Zahl 1 enthält.

Funktionsterm: $f(x,a) := \dfrac{x^2 - a^2}{a \cdot x^2}$

Zähler abrufen: $z(x,a) := \text{numer}(f(x,a)) \; = \; x^2 - a^2$

Nullstellenbedingung: $x0(a) := z(x,a) = 0 \rightarrow x^2 - a^2 = 0 \text{ auflösen}, x \;\rightarrow \begin{pmatrix} a \\ -a \end{pmatrix}$

Nullstellen abrufen: $x_1(a) := x0(a)_2$ $\qquad x_2(a) := x0(a)_1$

Nullstellen $x_1(a) \; = \; -a$ $\qquad x_2(a) \; = \; a$

Symmetrie: $f(-x,a) \; = \; -\dfrac{a^2 - x^2}{a \cdot x^2}$ vgl. $f(x,a) \; = \; -\dfrac{a^2 - x^2}{a \cdot x^2}$

$\Rightarrow$ Symmetrie zur y-Achse

Sei $f(x,a) = 1 \rightarrow -\dfrac{a^2 - x^2}{a \cdot x^2} = 1 \text{ auflösen}, x \;\rightarrow \begin{pmatrix} \dfrac{a}{\sqrt{1-a}} \\ -\dfrac{a}{\sqrt{1-a}} \end{pmatrix}$

Gleichung ist lösbar, falls $1 - a > 0 \text{ auflösen}, a \;\rightarrow a < 1$

$\Rightarrow a \in \,]-\infty\,;1\,[\setminus \{0\}$

Teilaufgabe 1.2 **(6 BE)**
Bestimmen Sie jeweils in Abhängigkeit von a das Verhalten der Funktionswerte $f_a(x)$ an den Rändern der Definitionsmenge und das Monotonieverhalten des Graphen von f_a.

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 - a^2}{a \cdot x^2} \to \frac{1}{a} \qquad \lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - a^2}{a \cdot x^2} \to \frac{1}{a}$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{x^2 - a^2}{a \cdot x^2} \text{ annehmen}, a < 0 \to \infty$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{x^2 - a^2}{a \cdot x^2} \text{ annehmen}, a < 0 \to \infty$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{x^2 - a^2}{a \cdot x^2} \text{ annehmen}, a > 0 \to -\infty$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{x^2 - a^2}{a \cdot x^2} \text{ annehmen}, a > 0 \to -\infty$$

1. Ableitung:

$$f'(x,a) := \frac{d}{dx} f(x,a) = \frac{2}{a \cdot x} + \frac{2 \cdot \left(a^2 - x^2\right)}{a \cdot x^3} = \frac{2 \cdot a}{x^3} \qquad f'(x,a) := \frac{2 \cdot a}{x^3}$$

$$f'(x,a) < 0 \to \frac{2 \cdot a}{x^3} < 0 \left| \begin{array}{l} \text{auflösen}, x \\ \text{annehmen}, a < 0 \end{array} \right. \to 0 < x$$

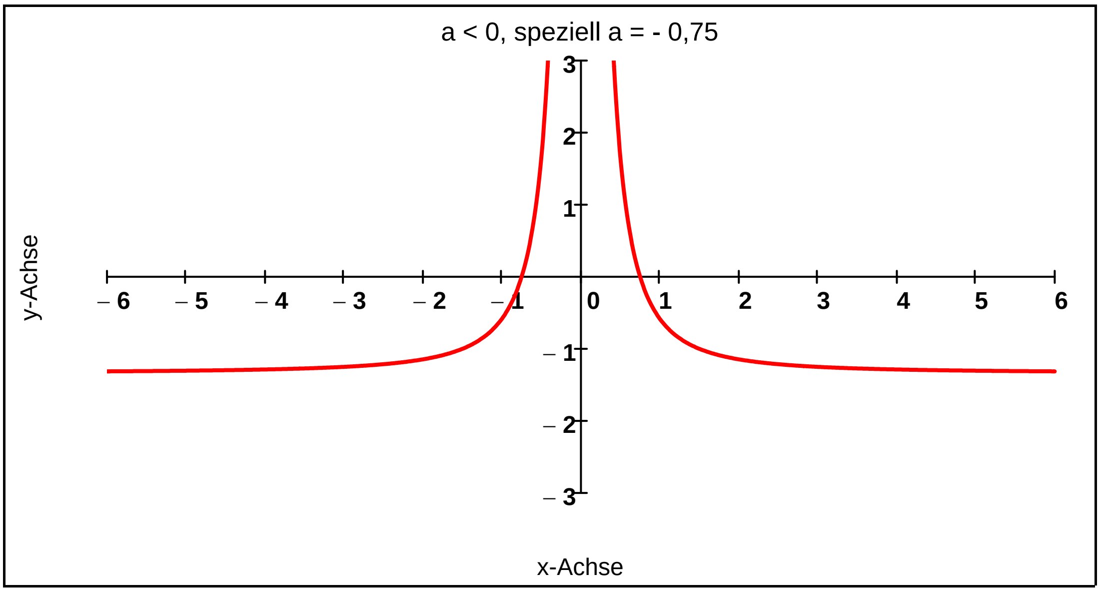
$$f'(x,a) > 0 \to \frac{2 \cdot a}{x^3} > 0 \left| \begin{array}{l} \text{auflösen}, x \\ \text{annehmen}, a < 0 \end{array} \right. \to x < 0$$

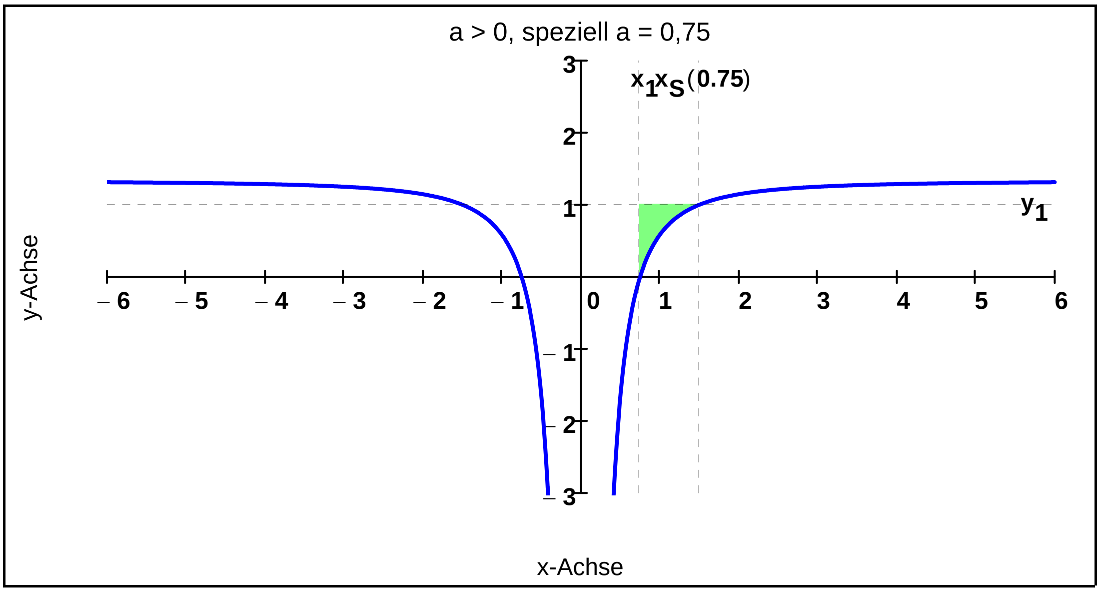
G_f ist streng monoton steigend für $x \in]-\infty; 0[$ und G_f ist streng monoton fallend für $x \in]0; \infty[$.

$$f'(x,a) < 0 \to \frac{2 \cdot a}{x^3} < 0 \left| \begin{array}{l} \text{auflösen}, x \\ \text{annehmen}, a > 0 \end{array} \right. \to x < 0$$

$$f'(x,a) > 0 \to \frac{2 \cdot a}{x^3} > 0 \left| \begin{array}{l} \text{auflösen}, x \\ \text{annehmen}, a > 0 \end{array} \right. \to 0 < x$$

G_f ist streng monoton fallend für $x \in]-\infty; 0[$ und G_f ist streng monoton steigend für $x \in]0; \infty[$.


a < 0, speziell a = - 0,75
y-Achse
x-Achse
– 6
– 5
– 4
– 3
– 2
– 1
0
1
2
3
4
5
6


a > 0, speziell a = 0,75
x1 xS(0.75)
y1
y-Achse
x-Achse

Teilaufgabe 1.3 **(5 BE)**
Der Graph von $f_{0.75}$ und die Geraden mit den Gleichungen $x = 0.75$ und $y = 1$ begrenzen im I. Quadranten ein Flächenstück. Berechnen Sie die Maßzahl des Flächeninhalts.

Aus 1.1 $\quad x_S(a) = \dfrac{a}{\sqrt{1-a}} \qquad x_S(0.75) = 1.5$

Stammfunktion: $$\int 1 - \left(\frac{x^2 - 0.75^2}{0.75 \cdot x^2}\right) dx = \int \left(1 - \frac{4}{3} + \frac{0.75}{x^2}\right) dx = -\frac{1}{3} \cdot x - \frac{0.75}{x}$$

Flächenmaßzahl: $$A := \int_{0.75}^{1.5} (1 - f(x, 0.75))\, dx \qquad A = 0.25$$

Teilaufgabe 2.0
Gegeben ist weiter die Funktion $g(x) = \arccos\left(f_1(x)\right)$ in der maximalen Definitionsmenge $D_g \subseteq IR$. Dabei ist f_1 die Funktion f_a aus Aufgabe 1 mit $a = 1$.

Teilaufgabe 2.1 **(3 BE)**
Ermitteln Sie die Definitionsmenge D_g.
Ergebnis: $D_g = IR \setminus]-\sqrt{0.5}\,;\,\sqrt{0.5}[$

$$f(x,1) = \frac{x^2 - 1}{x^2} \qquad g(x) := \arccos\left(\frac{x^2 - 1}{x^2}\right)$$

$$-1 \le \frac{x^2 - 1}{x^2} \le 1 \text{ auflösen}, x \rightarrow x \le -\frac{\sqrt{2}}{2} \vee \frac{\sqrt{2}}{2} \le x$$

$$\Rightarrow \quad D_g =]-\infty\,;\,-\frac{\sqrt{2}}{2}] \cup [\frac{\sqrt{2}}{2}\,;\,\infty[$$

Teilaufgabe 2.2 **(8 BE)**
Bestimmen Sie die Ableitungsfunktion g', das Verhalten der Funktionswerte $g'(x)$ an den Rändern von $D_{g'}$ und das Monotonieverhalten des Graphen von g. Geben Sie die Koordinaten und die Art der Extrempunkte des Graphen von g an.

$$g'(x) := \frac{d}{dx} g(x) = -\frac{\frac{2}{x} - \frac{2 \cdot (x^2 - 1)}{x^3}}{\sqrt{1 - \frac{(x^2 - 1)^2}{x^4}}} = -\frac{2}{x^3 \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot x^2 - 1}{x^4}}}$$

Teilweises Radizieren: $g'(x) := \frac{-2}{x\cdot\sqrt{2\cdot x^2 - 1}}$

Definitionsmenge: $D_{g'} = \left]-\infty ; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right[\cup \left]\frac{\sqrt{2}}{2} ; \infty\right[$

$$\lim_{x \to -\frac{\sqrt{2}}{2}^-} \frac{-2}{x\cdot\sqrt{2\cdot x^2 - 1}} \to \infty \qquad \lim_{x \to \frac{\sqrt{2}}{2}^+} \frac{-2}{x\cdot\sqrt{2\cdot x^2 - 1}} \to -\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{-2}{x\cdot\sqrt{2\cdot x^2 - 1}} \to 0 \qquad \lim_{x \to \infty} \frac{-2}{x\cdot\sqrt{2\cdot x^2 - 1}} \to 0$$

$$g'(x) > 0 \to -\frac{2}{x\cdot\sqrt{2\cdot x^2 - 1}} > 0 \text{ auflösen}, x \to x < -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$\Rightarrow$ G_g ist streng monoton steigend in $x \in \left]-\infty ; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right[$

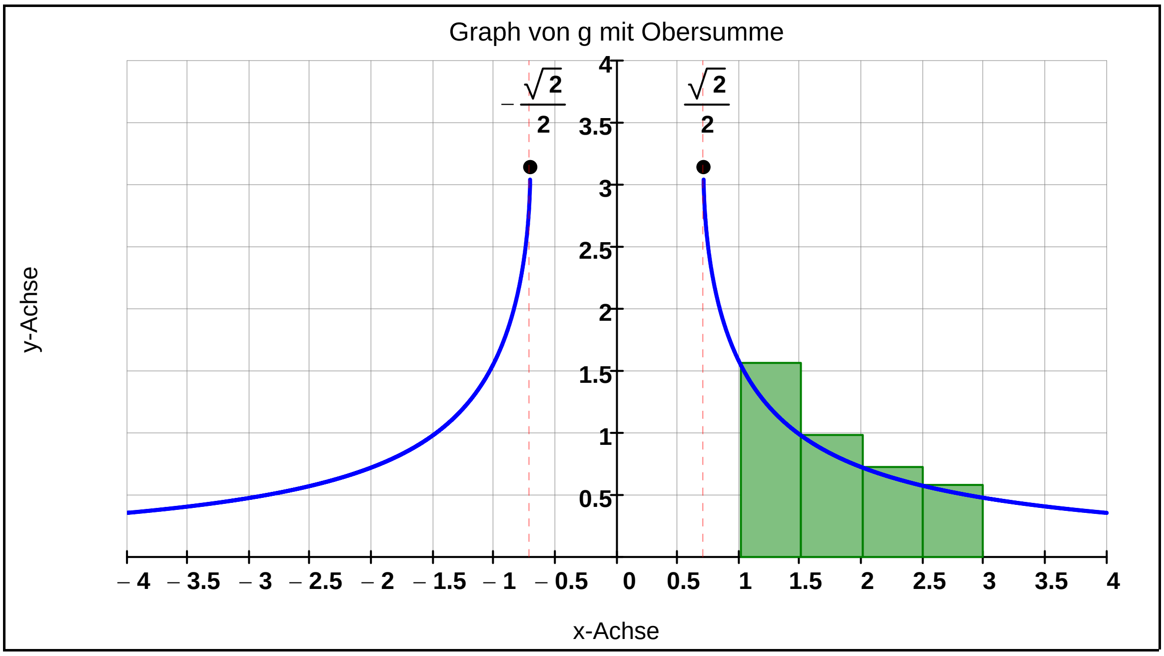
$\Rightarrow$ $g\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \pi$ Randmaximum $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \pi\right)$

$$g'(x) < 0 \to -\frac{2}{x\cdot\sqrt{2\cdot x^2 - 1}} < 0 \text{ auflösen}, x \to \frac{\sqrt{2}}{2} < x$$

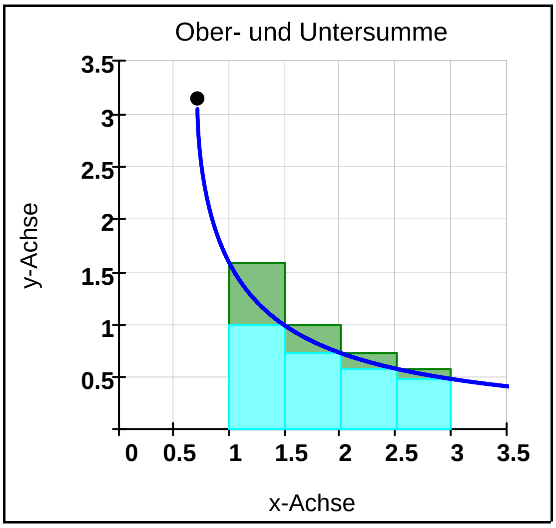
$\Rightarrow$ G_g ist streng monoton fallend in $x \in \left]\frac{\sqrt{2}}{2} ; \infty\right[$

$\Rightarrow$ $g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \pi$ Randmaximum $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \pi\right)$

Teilaufgabe 2.3 (8 BE)
Zeichnen Sie den Graphen von g im Bereich $-4 \le x \le 4$ unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse (**1 LE = 2 cm**).



Teilaufgabe 2.4 (5 BE)
Der Wert des Integrals $\int_1^3 g(x)\,dx$ soll näherungsweise bestimmt werden. Berechnen Sie dazu den arithmetischen Mittelwert aus Ober- und Untersumme bei Unterteilung des Integrationsintervalls in vier gleich große Teile auf drei Nachkommastellen genau. Veranschaulichen Sie die Rechnung, indem Sie die für die Berechnung der Obersumme verwendeten Rechtecke in die Zeichnung aus 2.3 eintragen.



Obersumme:

$A_O := (g(1) + g(1.5) + g(2) + g(2.5)) \cdot 0.5$

$A_O = 1.924$

Untersumme:

$A_U := (g(1.5) + g(2) + g(2.5) + g(3)) \cdot 0.5$

$A_U = 1.3769$

Mittelwert: $A := \frac{A_O + A_U}{2}$ $\quad A = 1.651$

Teilaufgabe 2.5 **(7 BE)**
Begründen Sie, dass die Funktion h mit $h(x) = g(x)$ und $D_h = [\,\sqrt{0.5}\,;\ \infty\,[$ umkehrbar ist. Ermitteln Sie die Definitionsmenge der Umkehrfunktion h^{-1} und die Gleichung der Tangente an den Graphen von h^{-1} an der Stelle $x = \frac{\pi}{3}$.

g(x) ist in $[\,\sqrt{0.5}\,;\ \infty\,[$ streng monoton fallend, und damit auch h(x), also ist h umkehrbar.

$$\lim_{x \to \infty} \arccos\left(\frac{x^2 - 1}{x^2}\right) \to 0 \qquad \lim_{x \to \frac{\sqrt{2}}{2}^+} \arccos\left(\frac{x^2 - 1}{x^2}\right) \to \pi$$

Rand-extremum!

Wertemenge von h: $W_h = \,]\,0\,;\ \pi\,]$

Definitionsmenge von h^{-1}: $\quad D_h^{-1} = \,]\,0\,;\ \pi\,]$

Wertemenge von h^{-1}: $\quad W_h^{-1} = [\,\sqrt{0.5}\,;\ \infty\,[$

Urbild von $\frac{\pi}{3}$: $\quad \arccos\left(\frac{x^2 - 1}{x^2}\right) = \frac{\pi}{3}$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{x^2 - 1}{x^2} = \frac{1}{2} \text{ auflösen}, x \to \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Lösung

keine Lösung

Ableitung: $\quad h'(x) := g'(x) = -\frac{2}{x \cdot \sqrt{2 \cdot x^2 - 1}}$

Steigung der Tangente an **h**: $\quad m_h := h'(\sqrt{2}) = -\frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}}{3}$

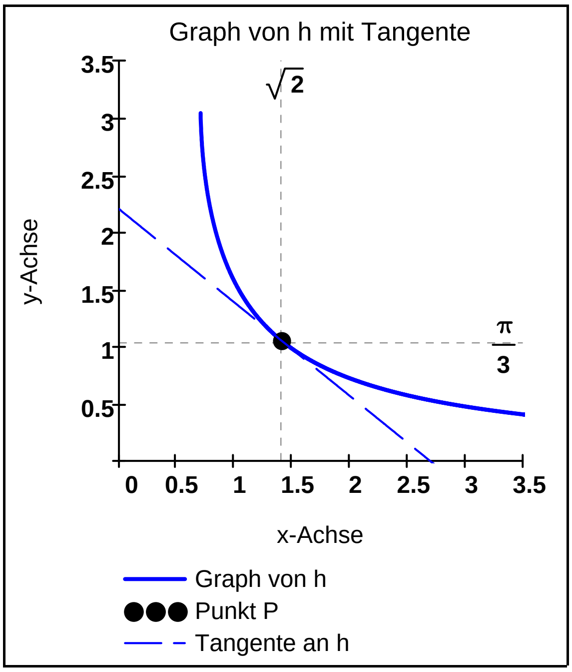
Steigung der Tangente an der Umkehrfunktion $h^{-1} = u$:

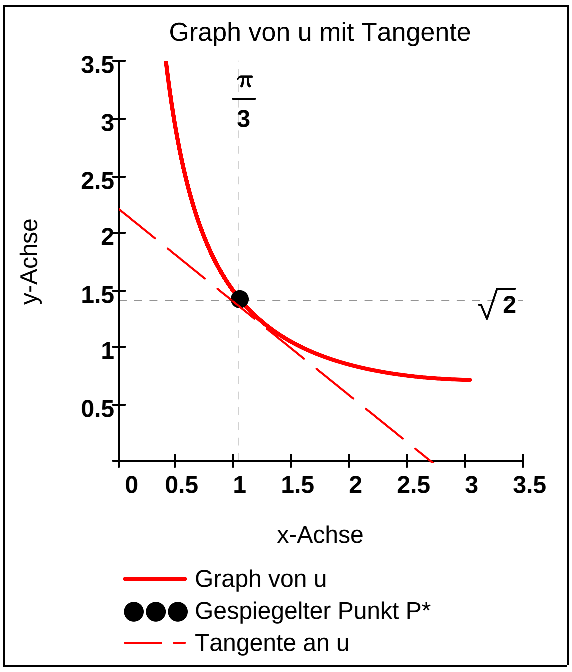
$$u'(x) := \frac{1}{h'(x)} \quad \Rightarrow \quad u'\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{h'(\sqrt{2})} \qquad m_u := \frac{1}{h'(\sqrt{2})} \qquad m_u = -\frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}}{2}$$

Tangente an u: $\quad t_u(x) := m_u \cdot \left(x - \frac{\pi}{3}\right) + \sqrt{2} \qquad t_u(x) = \frac{\pi \cdot \sqrt{6}}{6} - \frac{\sqrt{6} \cdot x}{2} + \sqrt{2}$

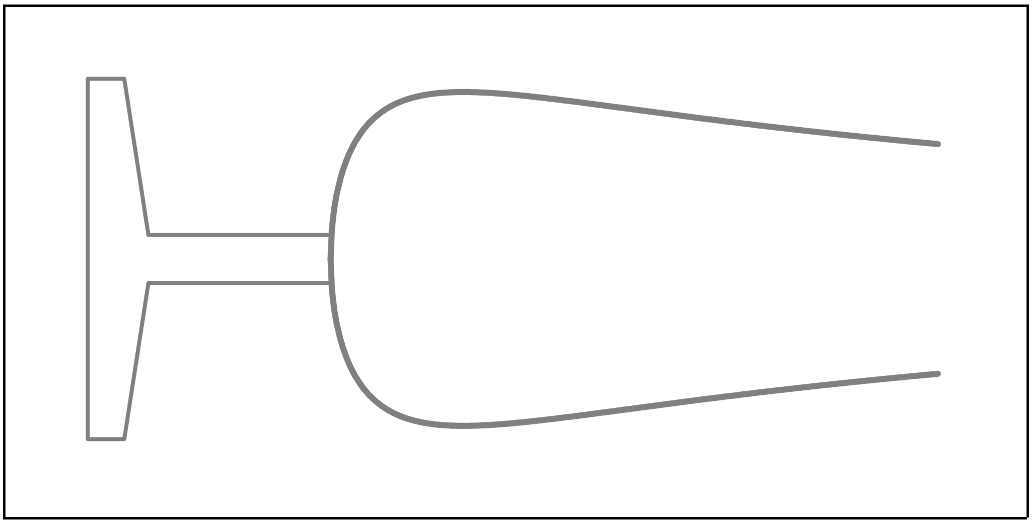
Tangente an h: $\quad t_h(x) := m_h \cdot (x - \sqrt{2}) + \frac{\pi}{3} \qquad t_h(x) = \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{6} \cdot x}{3} + \frac{2 \cdot \sqrt{3}}{3}$

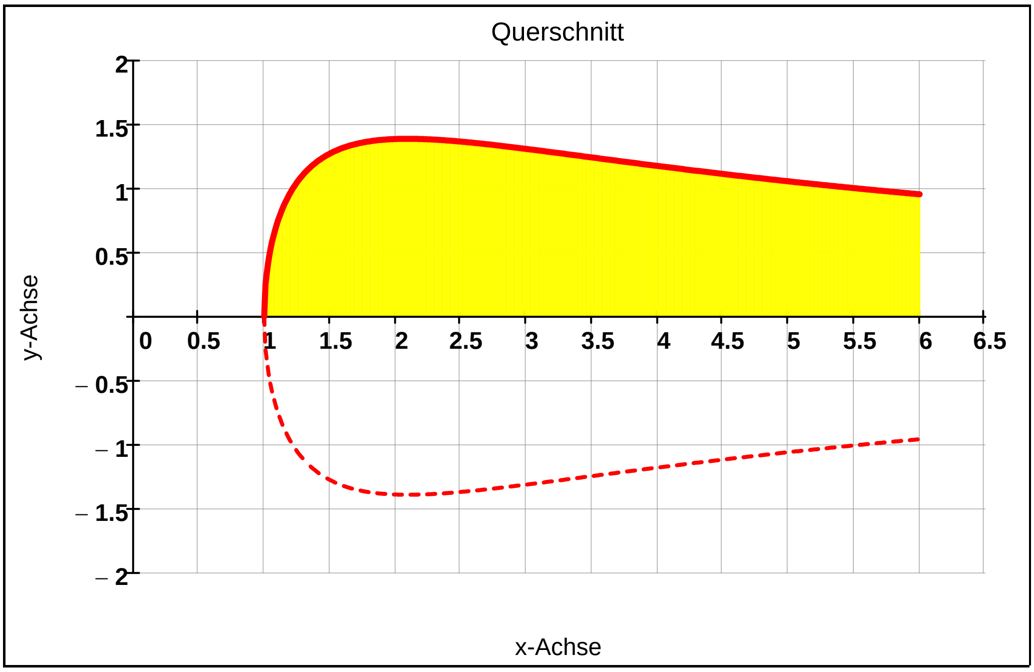
Graphische Darstellung in der Prüfung nicht verlangt





Teilaufgabe 3 (9 BE)
Die Innenkante des Querschnitts eines Glases (siehe Bild rechts) wird durch die Funktion
$s(x) := 5\cdot\sqrt{\ln(x)}\cdot(x+1)^{-1}$ (vgl. Graph unten) beschrieben. Durch die Rotation des Graphen um die x-Achse entsteht ein Rotationskörper, welcher näherungsweise die Form eines solchen Glases beschreibt. Berechnen Sie die Maßzahl des Volumeninhalts im Bereich $1 \le x \le 6$ auf zwei Nachkommastellen.
(Hinweis: Beginnen Sie mit partieller Integration)





Ansatz für das Volumen: $V_x = \int_1^6 \pi\cdot(s(x))^2\,dx$

Bestimmung der Stammfunktion von: $\int \pi\cdot(s(x))^2\,dx = \int \frac{\pi\cdot 25\cdot\ln(x)}{(x+1)^2}\,dx$

Partielle Integration von: $\int \frac{\ln(x)}{(x+1)^2}\,dx$

$u(x) := \ln(x) \qquad u'(x) := \frac{d}{dx}u(x) = \frac{1}{x}$

$v'(x) := \frac{1}{(x+1)^2} \qquad v(x) := \int v'(x)\,dx = -\frac{1}{x+1}$

$$\int \frac{\ln(x)}{(x+1)^2}\,dx = \ln(x)\cdot\left(-\frac{1}{x+1}\right) - \int \left(-\frac{1}{x+1}\right)\cdot\frac{1}{x}\,dx = \frac{-\ln(x)}{x+1} + \int \frac{1}{(x+1)\cdot x}\,dx$$

Partialbruchzerlegung von $\frac{1}{(x+1)\cdot x} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x} = \frac{A\cdot x + B\cdot x + B}{(x+1)\cdot x} = \frac{(A+B)\cdot x + B}{(x+1)\cdot x}$

Koeffizientenvergleich: $B = 1 \qquad A + B = 0 \quad \Rightarrow \quad A = -1$

$$\int \frac{1}{(x+1)\cdot x}\,dx = \int \left(\frac{-1}{x+1} + \frac{1}{x}\right) dx = -\ln(|x+1|) + \ln(|x|) + C$$

Betrag kann wegen der gegebenen Integrationsgrenzen weggelassen werden.

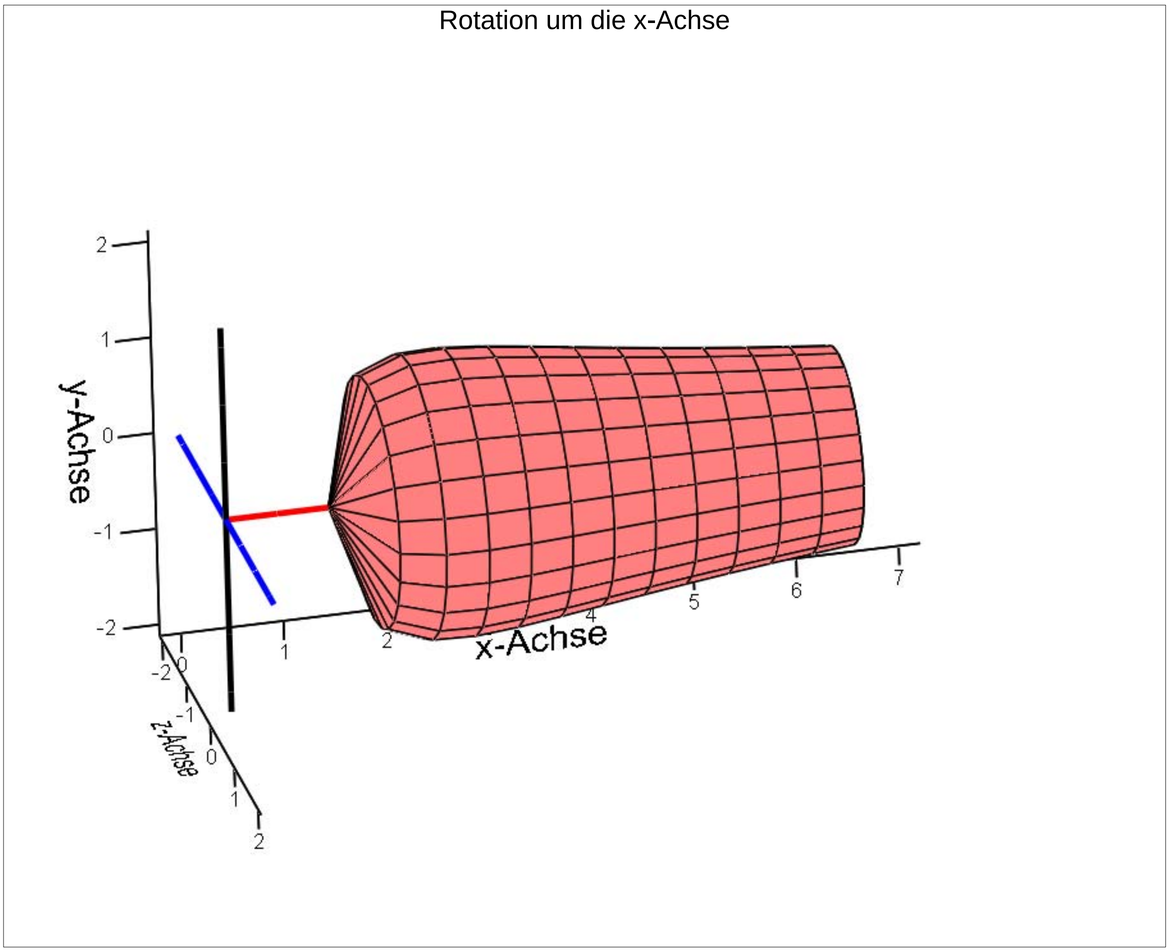
$$\Rightarrow \quad \int \frac{25\cdot\pi\cdot\ln(x)}{(x+1)^2}\,dx = 25\cdot\pi\cdot\left(\frac{-\ln(x)}{x+1} + \ln(x) - \ln(x+1)\right)$$

Stammfunktion: $S(x) := 25\cdot\pi\cdot\left(\frac{-\ln(x)}{x+1} + \ln(x) - \ln(x+1)\right)$

Volumenberechnung: $V_x := S(6) - S(1)$ $\quad V_x = 22.23$

Mathcadlösung: $V := \int_1^6 \pi\cdot(s(x))^2\,dx$ $\quad V = 22.23$

Definitionen



Teilaufgabe 4 (8 BE)
Bestimmen Sie für $x \in IR$ die allgemeine Lösung der Differentialgleichung
$y' \cdot (x^2 + 1) = x \cdot (1 - y)$ mit der Variation der Konstanten.

Allgemeine Differentialgleichung: $y' + p(x) \cdot y = q(x)$

$$y' \cdot (x^2 + 1) = x \cdot (1 - y) \quad \Leftrightarrow \quad y' = \frac{x}{x^2 + 1} - \frac{x \cdot y}{x^2 + 1} \quad \Leftrightarrow \quad y' + \frac{x \cdot y}{x^2 + 1} = \frac{x}{x^2 + 1}$$

Konkrete lineare inhomogene DGL: $y' + \frac{x}{x^2 + 1} \cdot y = \frac{x}{x^2 + 1}$

Definition von p(t) und q(t): $p(x) := \frac{x}{x^2 + 1}$ $\quad$ $q(x) := \frac{x}{x^2 + 1}$

Definition der homogenen DGL: $y' + \frac{x}{x^2 + 1} \cdot y = 0$ $\quad$ Triviale Lösung: $y = 0$

Lösung der homogenen DGL nach Formelsammlung:

$$y_H(x, K) := K \cdot e^{-\int p(x)\, dx} \qquad y_H(x, K) = \frac{K}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

Ausführlich: $$-\int \frac{x}{x^2 + 1}\, dx = -\frac{\ln(x^2 + 1)}{2}$$

Umformung: $$-\frac{\ln(x^2 + 1)}{2} = \ln\left[(x^2 + 1)^{-\frac{1}{2}}\right]$$

Variation der Konstanten:

$$y_H(x) = \frac{k(x)}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

$$y'_H(x) = \frac{k'(x)}{\sqrt{x^2 + 1}} + k(x) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot (x^2 + 1)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2 \cdot x \qquad p(x) \rightarrow \frac{x}{x^2 + 1}$$

Eingesetzt in die DGL $y' + p(x)\cdot y = q(x) \rightarrow y' + \frac{x\cdot y}{x^2+1} = \frac{x}{x^2+1}$ liefert:

$$\frac{k'(x)}{\sqrt{x^2+1}} + k(x)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(x^2+1\right)^{-\frac{3}{2}}\cdot 2\cdot x + \frac{x}{x^2+1}\cdot\frac{k(x)}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{x}{x^2+1}$$

Vereinfacht: $\frac{k'(x)}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{x}{x^2+1}$

Auflösen: $k'(x) = \frac{x}{x^2+1}\cdot\sqrt{x^2+1} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

Integration: $k(x) := \int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$ $\qquad k(x) = \sqrt{x^2+1} + K_0$

Allgemeine Lösung:

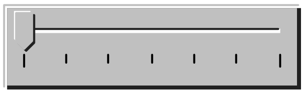
$$y_A(x) = \frac{k(x)}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{\sqrt{x^2+1}+K_0}{\sqrt{x^2+1}} = 1 + \frac{K_0}{\sqrt{x^2+1}}$$

Definition der Kurvenschar: $y_A(x,K) := 1 + \frac{K}{\sqrt{x^2+1}}$

Darstellung der Kurvenschar (in der Prüfung nicht verlangt):

Programm für die Darstellung der Kurvenschar

Kurvenschar mit Auswahl einer Kurve:



Definitionen

Parameterwert: $K = -4$

Ausgewählte Scharkurve: $y_A(x, K) = 1 - \frac{4}{\sqrt{x^2 + 1}}$