Zahlenlotto 6 aus 49

Quelle: Akademiebericht 470 Dillingen

Spielregeln
Beim Spiel ***Sechs aus Neunundvierzig*** werden jeden Mittwoch und Samstag sechs Gewinnzahlen gezogen. Dazu befinden sich 49 nummerierte Kugeln in einer Lostrommel, aus der dann bei einer Ziehung 6 Kugeln ausgewählt werden.
Bei der Teilnahme muss man einen Lottoschein ausfüllen und an einer Lottoannahmestelle abgeben.
Spielt man mit ***Zusatzzahl***, wird zusätzlich zu den ersten sechs Zahlen wird aus den restlichen 43 Kugeln eine weitere Kugel als siebte Zahl gezogen. Sie erhöht in den niedrigeren Gewinnklassen den Gewinn um eine Stufe.
Wenn z. B. von genau drei vom Spieler getippte Zahlen mit drei der sechs zuerst gezogenen Zahlen übereinstimmen, aber keine der drei verbleibenden Zahlen getippten Zahlen die Zusatzzahl ist, fällt er in die Gewinnklasse 8 (drei Richtige ohne Zusatzzahl).
Stimmt jedoch von den drei verbleibenden getippten Zahlen eine mit der Zusatzzahl überein, verbessert sich die Gewinnklasse auf Klasse 7 (drei Richtige mit Zusatzzahl).
Spielt man zusätzlich ***Super 6*** oder ***Spiel 77***, braucht man nicht tippen, sondern die letzte Ziffer der Losnummer liefert die Superzahl, die sich aus den Ziffern 0 bis 9 ergibt.
Das ist wie ein weiteres Los, bei dem die Chance für ***6 Richtige mit Superzahl*** ein Zehntel der Chance für 6 Richtige, und die Chance für ***6 Richtige ohne Superzahl*** die übrigen neun Zehntel der Chance für 6 Richtige beträgt.

In unserem Fall sind die Zahlen 1, 9, 17, 25, 33, 41 angekreuzt, die Superzahl ist 3 (letzte Ziffer der Losnummer 5338533

Aufgabe

Beim Lottospiel ***6 aus 49*** werden $n = 6$ unterscheidbare Kugeln aus einem Vorrat von $N = 49$ Kugeln gezogen.

a) Geben Sie ein Urnenmodell für die Ziehung an und berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit P_{E6} für das Ereignis E_6 = **{ sechs Richtige }**.

b) Bestätigen Sie die Formel $P_{E6} = \dfrac{1}{\binom{N}{n}} = \dfrac{1}{\dfrac{N!}{n!\cdot(N-n)!}}$ für die Wahrscheinlichkeit, dass das Ereignis E_6 eintritt.

c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit P_{E3} für genau **{ 3 Richtige }**.

d) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten für genau **{ 5 Richtige }**, **{ 4 Richtige }**, **{ 2 Richtige }**, **{ 1 Richtige }**, **{ 0 Richtige }**.

e) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für **{ 3 Richtige ohne Zusatzzahl }** und für **{ 3 Richtige mit Zusatzzahl }**.

Teilaufgabe a)

Die Kugeln werden nicht zurückgelegt und die Reihenfolge spielt keine Rolle. Es werden insgesamt sechs Ziehungen durchgeführt.

Wahrscheinlichkeiten für ...	die erste Kugel ist richtig:	$p_1 := \frac{6}{49}$
	die zweite Kugel ist richtig:	$p_2 := \frac{5}{48}$
	die dritte Kugel ist richtig:	$p_3 := \frac{4}{47}$
	die vierte Kugel ist richtig:	$p_4 := \frac{3}{46}$
	die fünfte Kugel ist richtig:	$p_5 := \frac{2}{45}$
	die sechste Kugel ist richtig:	$p_6 := \frac{1}{44}$

Gesamtwahrscheinlichkeit für E_6 = **{sechs Richtige}**

$P_{E6} := p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot p_4 \cdot p_5 \cdot p_6$ $\qquad P_{E6} = \frac{1}{13983816}$ $\qquad P_{E6} = 0.0000072 \cdot \%$

Teilaufgabe b)

zu zeigen: $$\frac{1}{\binom{49}{6}} = \frac{1}{13983816}$$

$$\frac{1}{\binom{49}{6}} = \frac{1}{\frac{49!}{6!\cdot 43!}} = \frac{1}{\frac{(1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot 41\cdot 42\cdot 43)\cdot 44\cdot 45\cdot 46\cdot 47\cdot 48\cdot 49}{(1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6)\cdot(1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot 41\cdot 42\cdot 43)}} = \frac{1}{\frac{44\cdot 45\cdot 46\cdot 47\cdot 48\cdot 49}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}}$$

$$\ldots = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}{44\cdot 45\cdot 46\cdot 47\cdot 48\cdot 49} = \frac{1}{44}\cdot\frac{2}{45}\cdot\frac{3}{46}\cdot\frac{4}{47}\cdot\frac{5}{48}\cdot\frac{6}{49} = \frac{1}{13983816}$$

$$\downarrow\ \downarrow\ \downarrow\ \downarrow\ \downarrow\ \downarrow$$

$$p_6\cdot p_5\cdot p_4\cdot p_3\cdot p_2\cdot p_1$$

<u>Definition für den Binomialkoeffizienten:</u>

$$K_{oW}(N, n) := \frac{N!}{(N-n)!\cdot n!}$$

$$K_{oW}(49, 6) = 13983816$$

<u>Mathcad-Darstellung:</u>

$$\mathrm{combin}(49, 6) = 13983816$$

Teilaufgabe c)

Die N Kugeln können aufgeteilt werden in K Treffer und $N-K$ Nieten.

Kombinationen, k Treffer aus den 6 Gewinnkugeln auszuwählen:

$$\binom{K}{k} = \binom{6}{k}$$

Kombinationen, n-k Nieten aus 43 Nieten auszuwählen :

$$\binom{N-k}{n-k} = \binom{43}{n-k}$$

Wahrscheinlichkeit für genau k Treffer:

$$P(k) = \frac{\binom{K}{k}\cdot\binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

Wahrscheinlichkeit für genau 3 Treffer:

$$P_{E3}(k) = \frac{\binom{6}{3} \cdot \binom{49-6}{6-3}}{\binom{49}{6}}$$

Mathcad-Definition: $$P_{E3} := \frac{\text{combin}(6,3) \cdot \text{combin}(43,3)}{\text{combin}(49,6)}$$

$P_{E3} = 0.01765$ $\quad\quad$ $P_{E3} = 1.765 \cdot \%$

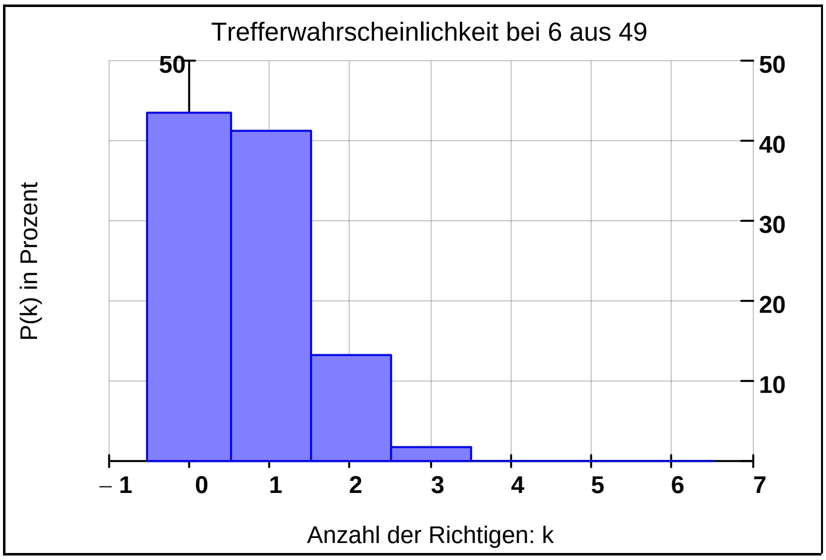
Teilaufgabe d)

$N := 49 \quad K := 6 \quad n := 6 \quad M := N - K = 43$

Mathcad-Definition: $\quad H(k) := \text{dhypergeom}(k, K, M, n) \quad\quad P(k) := H(k)$

k =	P(k) =
0	43.5964976
1	41.3019450
2	13.2378029
3	1.7650404
4	0.0968620
5	0.0018450
6	0.0000072

$\cdot\%$



Teilaufgabe e)

Wahrscheinlichkeit für genau 3 Treffer ohne Zusatzzahl:

$$P_{E3oZ}(k) = \frac{\binom{6}{3}\cdot\binom{1}{0}\cdot\binom{42}{3}}{\binom{49}{6}}$$

$$P_{E3oZ} := \frac{\text{combin}(6,3)\cdot\text{combin}(1,0)\cdot\text{combin}(42,3)}{\text{combin}(49,6)} = \frac{4100}{249711}$$

$$P_{E3oZ} = 1.642\cdot\%$$

Wahrscheinlichkeit für genau 3 Treffer mit Zusatzzahl:

$$P_{E3mZ}(k) = \frac{\binom{6}{3}\cdot\binom{1}{1}\cdot\binom{42}{2}}{\binom{49}{6}}$$

$$P_{E3mZ} := \frac{\text{combin}(6,3)\cdot\text{combin}(1,1)\cdot\text{combin}(42,2)}{\text{combin}(49,6)} = \frac{205}{166474}$$

$$P_{E3mZ} = 0.123\cdot\%$$