Der schiefe Wurf mit Einhüllender

Aufgabe

Gegeben ist der Ortsvektor $\mathbf{r}(t)$ eines Punktes P beim schiefen Wurf:

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} v_0 \cdot t \cdot \cos(\alpha) \\ v_0 \cdot t \cdot \sin(\alpha) - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \end{pmatrix}$$

Dabei ist v_0 die Abwurfgeschwindigkeit und α der Abwurfwinkel.

a) Interpretieren Sie die Komponenten der vektoriellen Darstellung physikalisch.
b) Bestimmen Sie die Bahnkurve **y(x)**.
c) Bestimmen Sie die Hüllkurve.
d) Stellen Sie einzelnen Scharkurven und ihre Hüllkurve dar.
e) Bestimmen Sie den Abwurfwinkel, für den sich die absolut größte Wurfweite ergibt.

Teilaufgabe a)

Darstellung in Komponenten:

x-Komponente: $x = v_0 \cdot t \cdot \cos(\alpha)$ (1)

y-Komponente: $y = v_0 \cdot t \cdot \sin(\alpha) - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$ (2)

Ein Körper (wird als Massenpunkt betrachtet) wird mit der Geschwindigkeit $\vec{v_0}$ und unter dem Winkel α geworfen.

Die x-Komponente entspricht einer Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit $v_{0x} = v_0 \cdot \cos(\alpha)$ in x-Richtung.

Die y-Komponente entspricht dem senkrechten Wurf nach oben mit der Anfangsgeschwindigkeit $v_{0y} = v_0 \cdot \sin(\alpha)$ und der Verzögerung $-\vec{g}$ in y-Richtung.

Teilaufgabe b)

Die Darstellung in Komponenten entspricht der Parameterdarstellung der gesuchten Bahnkurve. Es wird also eine der Gleichungen nach dem Parameter t aufgelöst und dieser dann in die andere Gleichung eingesetzt.

(1) $x = v_0 \cdot t \cdot \cos(\alpha)$

(2) $y = v_0 \cdot t \cdot \sin(\alpha) - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$

Auflösen aus (1): $t = \frac{x}{v_0 \cdot \cos(\alpha)}$

in (2) einsetzen:

$$y = v_0 \cdot \frac{x \cdot \sin(\alpha)}{v_0 \cdot \cos(\alpha)} - \frac{g \cdot x^2}{2 \cdot v_0^2 \cdot (\cos(\alpha))^2} \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{x \cdot \sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} - \frac{g \cdot x^2}{2 \cdot v_0^2} \cdot \frac{1}{(\cos(\alpha))^2}$$

Substitution: $\frac{1}{(\cos(\alpha))^2} = 1 + (\tan(\alpha))^2$

$$y_p = x \cdot \tan(\alpha) - \frac{g \cdot \left[1 + (\tan(\alpha))^2\right]}{2 \cdot v_0^2} \cdot x^2$$ Bahnkurve

Teilaufgabe c)

Funktion mit zwei Variablen:

$$F(x, y, \tan(\alpha)) = y - x \cdot \tan(\alpha) + \frac{g \cdot x^2}{2 \cdot v_0^2} + \frac{g \cdot x^2}{2 \cdot v_0^2} \cdot (\tan(\alpha))^2$$

Differenzieren nach der Konstanten tan(α):

$$F_{tan}(x, y, \tan(\alpha)) = \frac{d}{d(\tan(\alpha))} F(x, y, \tan(\alpha)) = -x + \frac{g \cdot x^2}{v_0^2} \cdot \tan(\alpha)$$

Extremum des Parameters: $F_{tan}(x, y, C) = 0$

$$-x + \frac{g \cdot x^2}{v_0^2} \cdot \tan(\alpha) = 0$$

Auflösen nach tan(α): $\tan(\alpha) = \frac{v_0^2}{g \cdot x}$

Zur Erinnerung: $F(x, y, \tan(\alpha)) = y - x \cdot \tan(\alpha) + \frac{g \cdot x^2}{2 \cdot v_0^2} + \frac{g \cdot x^2}{2 \cdot v_0^2} \cdot \tan(\alpha)^2$

Einsetzen: $F(x, y, \tan(\alpha)) = y - x \cdot \frac{v_0^2}{g \cdot x} + \frac{g \cdot x^2}{2 \cdot v_0^2} + \frac{g \cdot x^2}{2 \cdot v_0^2} \cdot \left(\frac{v_0^2}{g \cdot x}\right)^2$

Vereinfachen: $F(x, y, \tan(\alpha)) = y - \frac{v_0^2}{2 \cdot g} + \frac{g \cdot x^2}{2 \cdot v_0^2}$

$F(x, y, \tan(\alpha)) = 0$ (auflösen nach y)

Gleichung der Einhüllenden: $y_h = \frac{v_0^2}{2 \cdot g} - \frac{g}{2 \cdot v_0^2} \cdot x^2$

Teilaufgabe d)

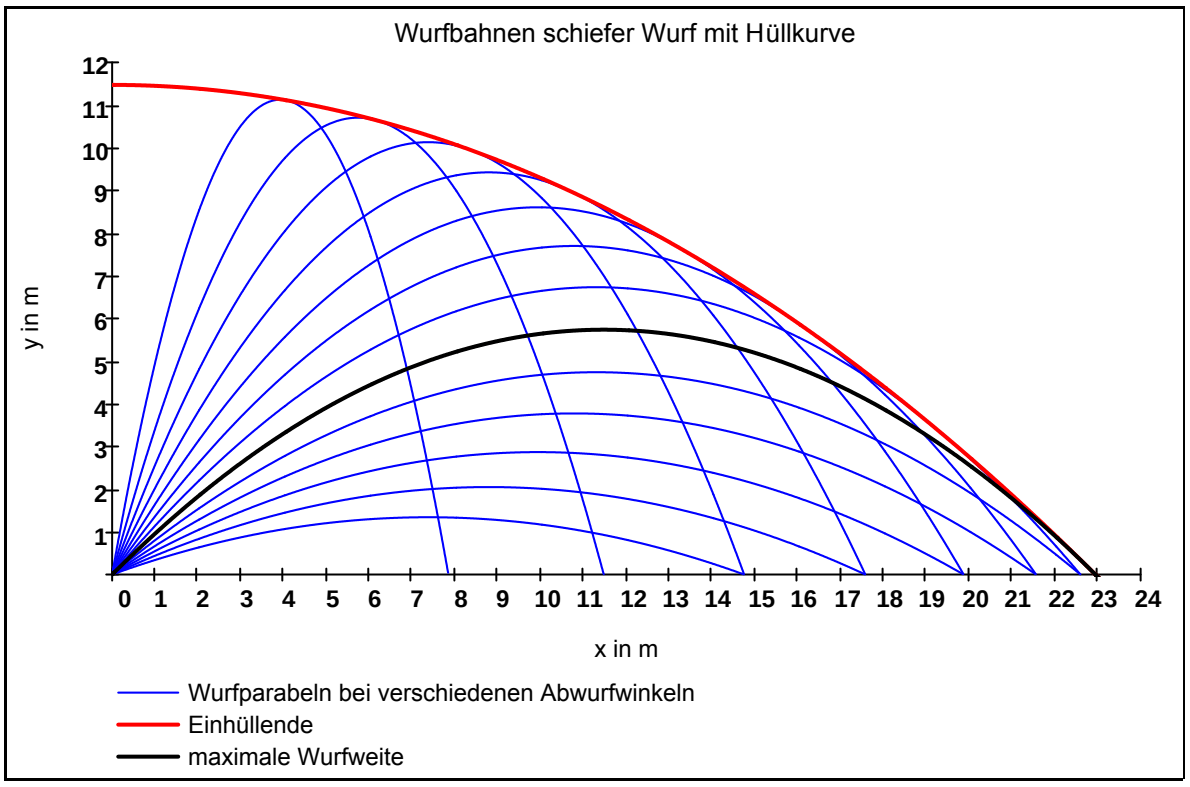
Gegeben:

Anfangsgeschwindigkeit: $v_0 := 15 \cdot \frac{m}{s}$

Darstellung

Wurfparabeln: $y_p(\alpha, x) := \tan(\alpha) \cdot x - \frac{g}{2 \cdot v_0^2 \cdot (\cos(\alpha))^2} \cdot x^2$

Einhüllende Parabel: $y_h(x) := \frac{v_0^2}{2 \cdot g} - \frac{g}{2 \cdot v_0^2} \cdot x^2$



Teilaufgabe e)

Für die Wurfweite muss gelten: $y_p(\alpha, x) = 0$

$$\tan(\alpha)\cdot x - \frac{g}{2\cdot v_0^{\,2}\cdot(\cos(\alpha))^2}\cdot x^2 = 0$$

x ausklammern: $$x\cdot\left[\tan(\alpha) - \frac{g}{2\cdot v_0^{\,2}\cdot(\cos(\alpha))^2}\cdot x\right] = 0$$

Auflösen nach x:

$x_1 = 0$ (triviale Lösung) oder $$\tan(\alpha) - \frac{g}{2\cdot v_0^{\,2}\cdot(\cos(\alpha))^2}\cdot x = 0$$

Auflösen nach x:

$$\tan(\alpha) - \frac{g}{2\cdot v_0^{\,2}\cdot(\cos(\alpha))^2}\cdot x = 0 \text{ auflösen}, x \rightarrow \frac{2\cdot v_0^{\,2}\cdot\cos(\alpha)^2\cdot\tan(\alpha)}{g}$$

Definition der Funktion der Wurfweite:

$$x_W(\alpha) := \frac{2\cdot v_0^{\,2}\cdot(\cos(\alpha))^2\cdot\tan(\alpha)}{g} = \frac{v_0^{\,2}\cdot\sin(2\cdot\alpha)}{g}$$

Ableiten nach α:

$$x'_W(\alpha) := \frac{d}{d\alpha}x_W(\alpha) = \frac{2\cdot v_0^{\,2}\cdot\cos(2\cdot\alpha)}{g}$$

Horizontale Tangenten:

$$\alpha_E := x'_W(\alpha) = 0 \rightarrow \frac{2\cdot v_0^{\,2}\cdot\cos(2\cdot\alpha)}{g} = 0 \text{ auflösen}, \alpha \rightarrow \frac{\pi}{4}$$

Extremstelle: $\alpha_E = 45\cdot°$ $x_W(\alpha_E) = 22.94\,m$

Vergleich mit den Randwerten: $x_W(0) = 0\,m$ $x_W(90°) = 0\,m$

Also ist $x_W(\alpha_E)$ absolutes Maximum.

Wurfweiten in Abhängigkeit vom Winkel:

α_0 =		$x_W(\alpha_0)$ =		
10	.°	7.85	m	
15		11.47		
20		14.75		
25		17.58		
30		19.87		
35		21.56		
40		22.6		
45		22.94		maximale Wurfweite
50		22.6		
55		21.56		
60		19.87		
65		17.58		
70		14.75		
75		11.47		
80		7.85		