Integralrechnung

- **Flächenberechnung mithilfe von Ober- und Untersummen**
- **Riemann-Integral**

Aufgabe 1

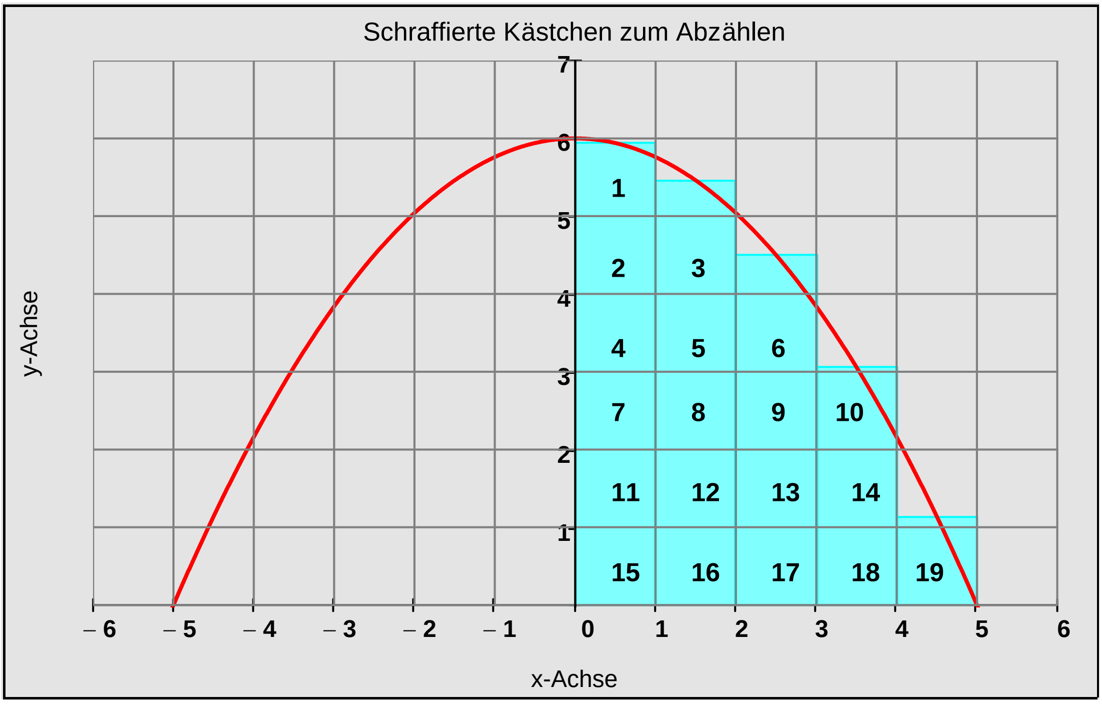
Gegeben ist der parabelförmige Querschnitt $f(x) := -\frac{6}{25} \cdot x^2 + 6$ einer geplanten Tunnelröhre.

Das Projekt wird jedoch nur durchgeführt, wenn der anfallende Abraum für den Bau auf eine Deponie mit einer Kapazität von etwa 4100 m^3 gebracht werden kann.
Der Tunnel soll $l := 95$ m lang werden.
Eine Längeneinheit (LE) entspricht einem Meter, bei allen Berechnungen wird auf das Mitführen von Einheiten verzichtet.

a) Schätzen Sie im Diagramm die Querschnittsfläche unter der gezeichneten Parabel.

b) Berechnen Sie näherungsweise die Querschnittsfläche, indem Sie den Flächeninhalt des Tunnelquerschnitts durch geeignete Rechtecke (Obersumme und Untersumme) abdecken.

c) Berechnen Sie die genaue Fläche mithilfe der Integralrechnung und ermitteln Sie dann den Abraum. Kann das Projekt durchgeführt werden?



Teilaufgabe a)

Gezählte Kästchen:

$$\left(19 + 2 \cdot \frac{1}{2}\right) \cdot \text{Stück} = 20 \cdot \text{Stück}$$

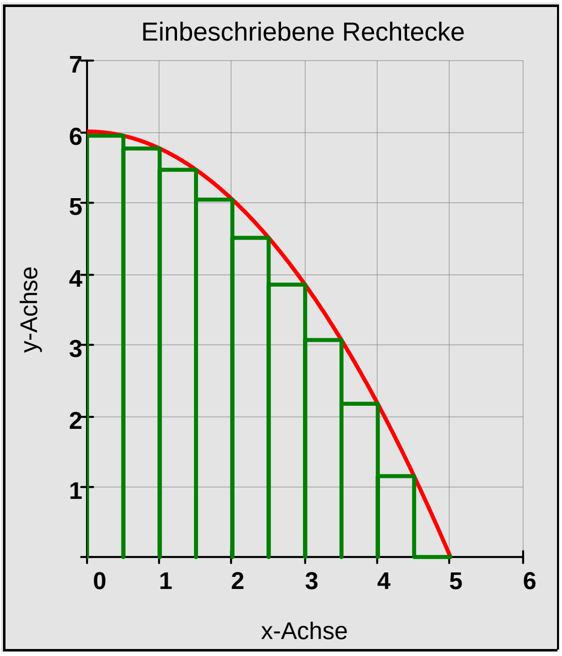
Flächenmaßzahl:

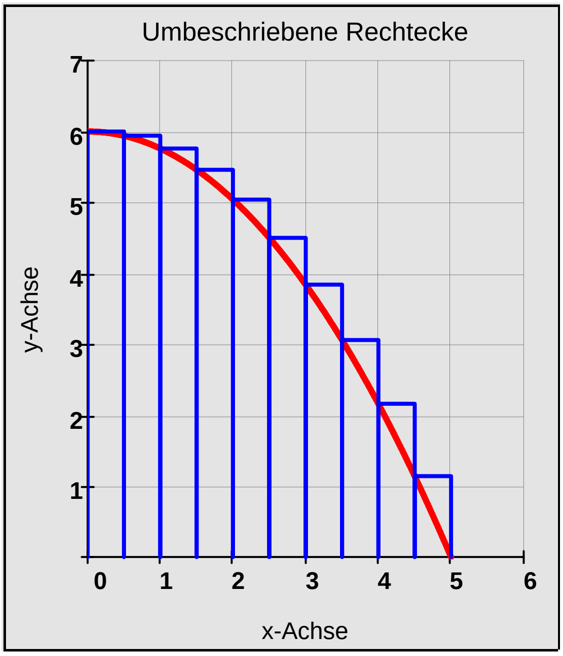
$$\left(19 + 2 \cdot \frac{1}{2}\right) \cdot \text{FE} = 20 \cdot \text{FE}$$

Teilaufgabe b)

Anzahl der Unterteilungen:

n = **10**





Untersumme der Rechtecke: Integral: Obersumme der Rechtecke:

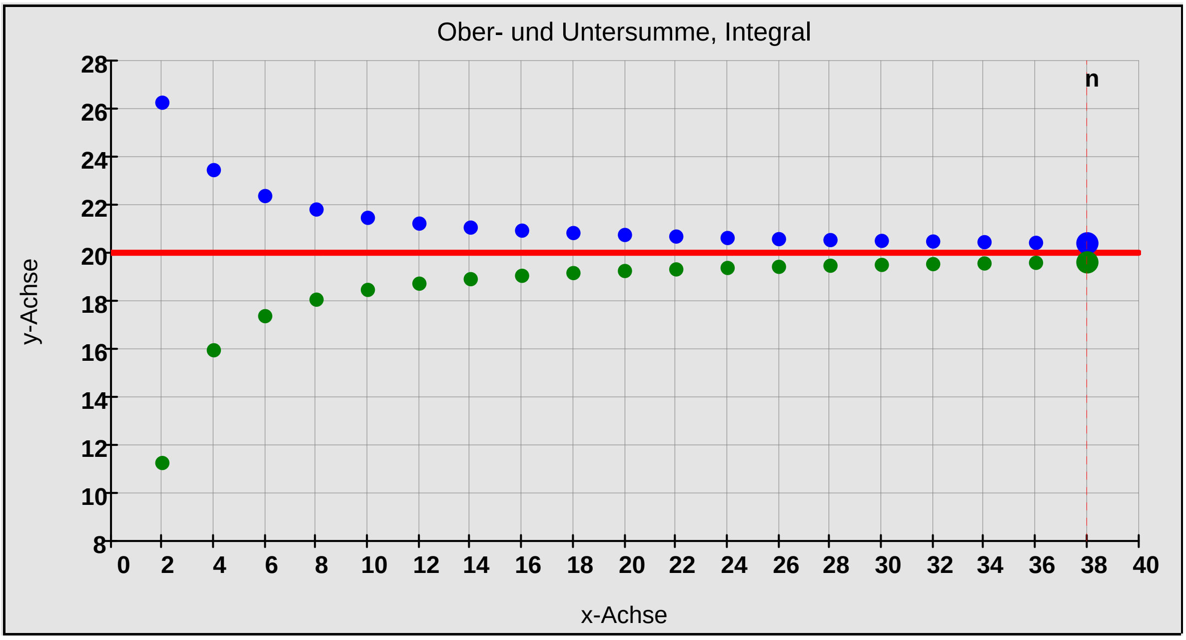
$\mathbf{A_u(n) = 18.45}$ $\mathbf{A = 20}$ $\mathbf{A_o(n) = 21.45}$

Näherungsrechnung

Die gesuchte Fläche unter einem Funktionsgraphen G_f wird mithilfe der elementar zu berechnenden Flächeninhalte von Rechtecken angenähert. Dazu wählt man oberhalb und unterhalb des Graphen von f Rechtecke so, dass der Graph der Funktion zwischen ihnen liegt.
Durch schrittweises Erhöhen der Anzahl der Rechtecke erhält man eine immer genauere Annäherung der Fläche unter dem Graphen.

Wahl von n: $n = 38$

Darstellung



Teilaufgabe c)

Stammfunktion: $F(x) := \int \left(-\frac{6}{25} \cdot x^2 + 6\right) dx = \frac{-2 \cdot x^3}{25} + 6 \cdot x$

Halbe Querschnittsfläche: $A_0 := (F(b) - F(a))$ $\quad A_0 = 20$

Länge des Tunnels in m: $l := 95$

Querschnittsfläche in m²: $A := 2 \cdot A_0$ $\quad A = 40$

Volumen des Abraums in m³: $V := A \cdot l$ $\quad V = 3800$

Festlegung der Einheiten: $A := A \cdot m^2$ $\quad V := V \cdot m^3$

Die Querschnittsfläche beträgt $A = 40 \cdot m^2$, das Abraumvolumen $V = 3800 \cdot m^3$, die Kapazität der Deponie reicht also aus.

Aufgabe 2

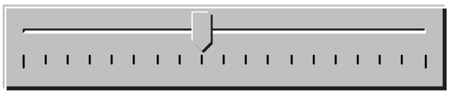
Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) := -\frac{6}{25}\cdot x^2 + 6$ und $x \in [\, a\, ;\, b\,]$, wobei $a := 0$ und $b := 5$.

a) Zerlegen Sie das Intervall [0 ; b] in n gleich lange Teilintervalle und berechnen Sie die Obersumme O_n und die Untersumme U_n für die Fläche und dem Graphen der Funktion f in Abhängigkeit von n.

b) Zeigen Sie, dass gilt: $\lim\limits_{n \to \infty} O_n = \lim\limits_{n \to \infty} U_n$ und vergleichen Sie mit $\int_0^b f(x)\, dx$.

Teilaufgabe a)

- Jedes Teilintervall hat die Länge $d_n := \frac{b-a}{n}$
- Die Teilpunkte der Zerlegung lauten: $x_{i-1} = a + \frac{b-a}{n}\cdot(i-1)$ und $x_i = a + \frac{b-a}{n}\cdot i$
- Da f im Intervall [0 ; 5] streng monoton fällt, liegt der größte Funktionswert eines Teilintervalls jeweils am linken Rand, der kleinste am rechten.

Wählen Sie n: 

$n = 10$

Für die Obersumme gilt: $O_n := \sum_{i=1}^{n} \left(f(x_{i-1})\cdot\frac{b-a}{n} \right)$ $O_n = 21.45$

Für die Untersumme gilt: $U_n := \sum_{i=1}^{n} \left(f(x_i)\cdot\frac{b-a}{n} \right)$ $U_n = 18.45$

Allgemeine Herleitung mit $f(x) = 6 - \frac{6}{25}\cdot x^2 = 6\cdot\left(1 - \frac{1}{25}\cdot x^2\right)$:

Für die Obersumme:

$$O_n = \sum_{i=1}^{n} \left(f(x_{i-1})\cdot\frac{b-a}{n} \right) = \sum_{i=1}^{n} \left[f\left[a + \frac{b-a}{n}\cdot(i-1)\right]\cdot\frac{b-a}{n} \right] = \sum_{i=1}^{n} \left[f\left[\frac{b}{n}\cdot(i-1)\right]\cdot\frac{b}{n} \right]$$

$$O_n = 6\cdot\frac{b}{n}\left[1 - \frac{1}{25}\cdot\left(0\cdot\frac{b}{n}\right)^2 + 1 - \frac{1}{25}\cdot\left(1\cdot\frac{b}{n}\right)^2 + 1 - \frac{1}{25}\cdot\left(2\cdot\frac{b}{n}\right)^2 + \ldots + 1 - \frac{1}{25}\cdot\left[(n-1)\cdot\frac{b}{n}\right]^2\right]$$

$$O_n = 6 \cdot \frac{b}{n} \cdot \left[n - \frac{1}{25} \cdot \frac{b^2}{n^2} \cdot \left[1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + (n-1)^2 \right] \right]$$

$$\uparrow$$

Potenzsumme: $\displaystyle \sum_{i=1}^{n-1} i^2 = \frac{(n-1) \cdot n \cdot (2 \cdot n - 1)}{6}$

$$O_n = 6 \cdot \left[b - \frac{1}{25} \cdot \frac{b^3}{n^3} \cdot \frac{(n-1) \cdot n \cdot (2 \cdot n - 1)}{6} \right] = 6 \cdot \left[b - \frac{1}{25} \cdot \frac{b^3}{6} \cdot \left(1 - \frac{1}{n} \right) \cdot 1 \cdot \left(2 - \frac{1}{n} \right) \right]$$

Grenzübergang $\mathbf{n} \to \infty$: $\quad \downarrow \quad \downarrow$

$\quad 0 \quad 0$

Für die Untersumme:

$$U_n = \sum_{i=1}^{n} \left(f(x_i) \cdot \frac{b-a}{n} \right) = \sum_{i=1}^{n} \left[f\left[a + \frac{b-a}{n} \cdot (i) \right] \cdot \frac{b-a}{n} \right] = \sum_{i=1}^{n} \left[f\left[\frac{b}{n} \cdot (i) \right] \cdot \frac{b}{n} \right]$$

$$U_n = 6 \cdot \frac{b}{n} \cdot \left[1 - \frac{1}{25} \cdot \left(1 \cdot \frac{b}{n} \right)^2 + 1 - \frac{1}{25} \cdot \left(2 \cdot \frac{b}{n} \right)^2 + 1 - \frac{1}{25} \cdot \left(3 \cdot \frac{b}{n} \right)^2 + \ldots + 1 - \frac{1}{25} \cdot \left(n \cdot \frac{b}{n} \right)^2 \right]$$

$$U_n = 6 \cdot \frac{b}{n} \cdot \left[n - \frac{1}{25} \cdot \frac{b^2}{n^2} \cdot \left(1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 \right) \right]$$

$$\uparrow$$

Potenzsumme: $\displaystyle \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2 \cdot n + 1)}{6}$

$$U_n = 6 \cdot \left[b - \frac{1}{25} \cdot \frac{b^3}{n^3} \cdot \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2 \cdot n + 1)}{6} \right] = 6 \cdot \left[b - \frac{1}{25} \cdot \frac{b^3}{6} \cdot 1 \cdot \left(1 + \frac{1}{n} \right) \cdot \left(2 + \frac{1}{n} \right) \right]$$

Grenzübergang $\mathbf{n} \to \infty$: $\quad \downarrow \quad \downarrow$

$\quad 0 \quad 0$

Teilaufgabe b)

Grenzwert für die Obersumme: $\lim_{n \to \infty} (O_n)$

$$\lim_{n \to \infty} \left[6 \cdot \left[b - \frac{1}{25} \cdot \frac{b^3}{6} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot 1 \cdot \left(2 - \frac{1}{n}\right) \right] \right] \rightarrow 6 \cdot b - \frac{2 \cdot b^3}{25}$$

Grenzwert für die Untersumme: $\lim_{n \to \infty} (U_n)$

$$\lim_{n \to \infty} \left[6 \cdot \left[b - \frac{1}{25} \cdot \frac{b^3}{6} \cdot 1 \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right) \cdot \left(2 + \frac{1}{n}\right) \right] \right] \rightarrow 6 \cdot b - \frac{2 \cdot b^3}{25}$$

Vergleich mit dem Integral:

$$\int_0^b f(x)\, dx = 6 \cdot b - \frac{2 \cdot b^3}{25}$$