Gauß'sche Summenformel

Theorie

Carl Friedrich Gauß (30. April 1777 in Braunschweig; † 23. Februar 1855 in Göttingen)

formulierte die folgende Formel für eine Potenzsumme: $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$

Der Überlieferung nach soll Gauß die Aufgabe, die ersten 100 Zahlen zu addieren, bereits in der Grundschule gelöst haben.

Gauß überlegte sich Folgendes:

$$\sum_{k=1}^{100} k = 1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + 100$$

Gauß spaltete die Summe auf:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 .... 91 92 93 94 95 96 97 98 99 100

100 99 98 97 96 95 94 93 92 91 .... 10 9 8 7 6 5 4 3 2 1

Addiert man die Spalten, ergibt sich jeweils die Summe 101, insgesamt sind es 100 Spalten:

$$2 \cdot \sum_{k=1}^{100} k = 100 \cdot 101 \qquad \Rightarrow \qquad \sum_{k=1}^{100} k = \frac{100 \cdot 101}{2} = 5050$$

Verallgemeinerung:

$$\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + (n-3) + (n-2) + (n-1) + n$$

$$\sum_{k=1}^{n} k = n + (n-1) + (n-2) + (n-3) + \ldots + 4 + 3 + 2 + 1$$

Addiert man beide Summen, bekommt man n Paare mit der Summe $n + 1$

$$2 \cdot \sum_{k=1}^{n} k = n \cdot (n+1) \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n \cdot (n+1)}{2}}$$

Beweis durch Induktion

Vors.: Sei n = 1 $\quad \sum_{k=1}^{1} k = 1 = \frac{1\cdot(1+1)}{2}$ ist richtig

Sei $n \geq 1$

Induktionsannahme: $\quad \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n\cdot(n+1)}{2}$ ist richtig für ein fest gewähltes n.

Die nächste Summe lautet dann:

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = 1 + 2 + 3 + \ldots + n + (n+1) = \sum_{k=1}^{n} k + (n+1)$$

Mit der Induktionsannahme gilt:

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{n\cdot(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n\cdot(n+1) + 2\cdot(n+1)}{2} = \frac{n^2 + 3\cdot n + 2}{2} = \frac{(n+1)\cdot(n+2)}{2}$$

Schlussfolgerung:

Wenn die Formel für ein bestimmtes $n \in \mathbb{N}$ gilt, dann gilt sie auch für das nächste, also $n + 1$, das übernächste usw.