Abschlussprüfung Berufliche Oberschule 2002
Mathematik 12 Technik - A I - Lösung

made with mathcad

Teilaufgabe 1.0

Gegeben sind die reellen Funktionen $f_a(x) = \dfrac{x^2 - a\cdot x + a}{x^2}$ mit $a \in IR$ in der maximalen,

von a unabhängigen Definitionsmenge $D = IR \setminus \{0\}$.

Teilaufgabe 1.1 (8 BE)

Ermitteln Sie die Art der Definitionslücke sowie die Anzahl der Nullstellen von f_a jeweils in Abhängigkeit vom Parameterwert a.

$$f(x,a) := \frac{x^2 - a\cdot x + a}{x^2}$$

Zähler abrufen: $z(x,a) := \text{numer}(f(x,a)) \rightarrow x^2 - a\cdot x + a$

Nullstelle des Nenners in den Zähler einsetzen:

$$z(0,a) = 0 \rightarrow a = 0$$

Fall $a = 0$: vereinfachter Funktionsterm: $f_0(x) := f(x,0) = 1$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x,0) \rightarrow 1 \qquad \lim_{x \to 0^+} f(x,0) \rightarrow 1$$

$\Rightarrow$ **stetig hebbare Def.lücke (0/1), keine NS**

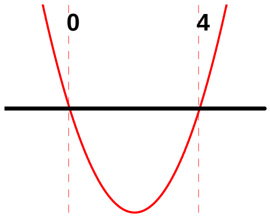
Sei nun $a \neq 0$: **Polstelle 2.Ordnung:** $x_0 := 0$

Nullstellen des Zählers:

$$z(x,a) = 0 \rightarrow x^2 - a\cdot x + a = 0 \text{ auflösen}, x \rightarrow \begin{bmatrix} \frac{a}{2} + \frac{\sqrt{a\cdot(a-4)}}{2} \\ \frac{a}{2} - \frac{\sqrt{a\cdot(a-4)}}{2} \end{bmatrix}$$

Diskriminante: $D(a) := a\cdot(a-4)$ $\qquad D(a) = 0 \rightarrow a\cdot(a-4) = 0 \text{ auflösen}, a \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$

Diskriminante



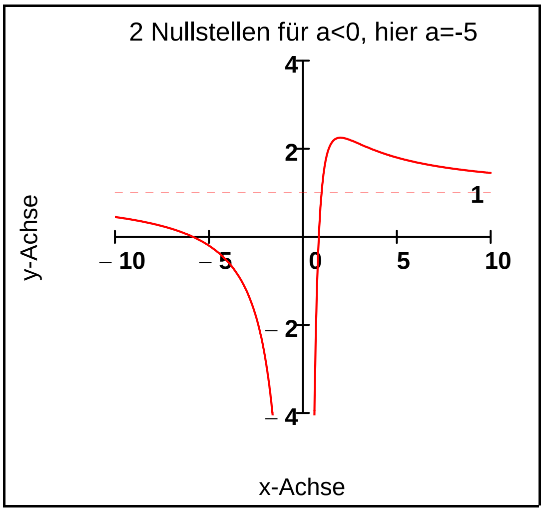
Anzahl der Nullstellen:

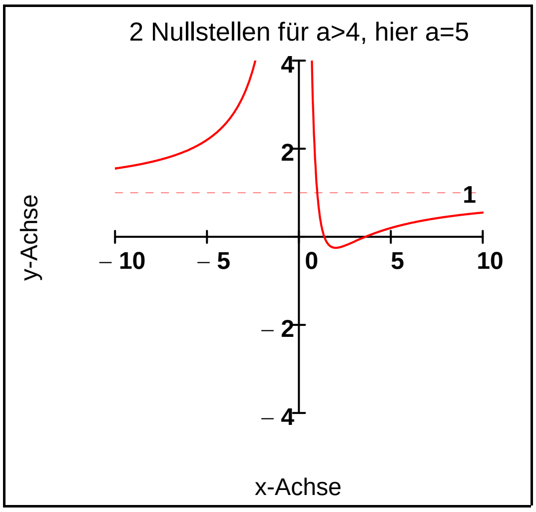
2 Nullstellen, falls $\mathbf{D > 0}$: $\quad -\infty < \mathbf{a} < \mathbf{0} \vee \mathbf{4} < \mathbf{a} < \infty$

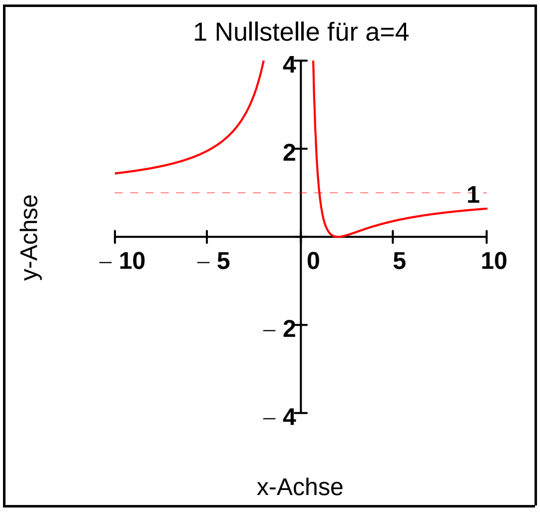
1 Nullstelle, falls $\mathbf{D = 0}$: $\quad \mathbf{a = 4}$

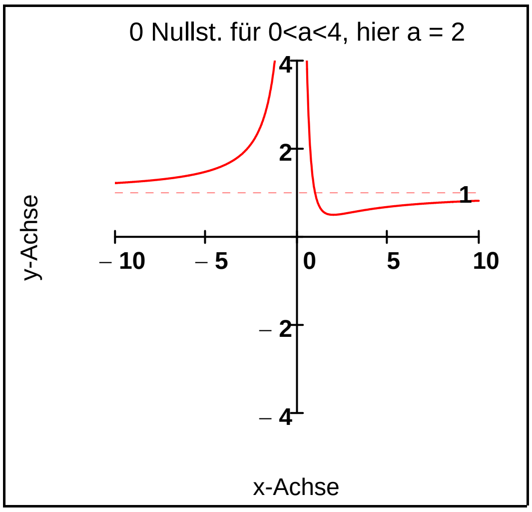
keine Nullstelle, falls $\mathbf{D < 0}$: $\quad \mathbf{0} < \mathbf{a} < \mathbf{4}$

Graphische Darstellung nicht verlangt.









Teilaufgabe 1.2.0

Für $\mathbf{a = -2}$ ist nun $\mathbf{f(x) = \dfrac{x^2 + 2x - 2}{x^2}}$ gegeben.

Teilaufgabe 1.2.1 **(5 BE)**

Bestimmen Sie die Nullstellen sowie die Gleichungen und die Art aller Asymptoten des Graphen von $\mathbf{f_0}$.

Sei $\mathbf{a = -2}$: $\quad f(x) := f(x, -2) \qquad f(x) = \dfrac{x^2 + 2\cdot x - 2}{x^2}$

Zähler: $\quad z(x) := \mathbf{numer}(f(x)) = x^2 + 2\cdot x - 2$

Nullstellen: $\quad x0 := z(x) = 0 \rightarrow x^2 + 2\cdot x - 2 = 0 \ \mathbf{auflösen}, x \ \rightarrow \begin{pmatrix} \sqrt{3} - 1 \\ -\sqrt{3} - 1 \end{pmatrix}$

Nullstellen: $\quad NS_1 \rightarrow \begin{pmatrix} \sqrt{3} - 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad NS_2 \rightarrow \begin{pmatrix} -\sqrt{3} - 1 & 0 \end{pmatrix}$

vertikale Asymptote: $\quad x_0 := 0$

horizontale Asymptote: $\quad g(x) := \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \rightarrow 1$

Teilaufgabe 1.2.2 (7 BE)

Ermitteln Sie die Art und die Koordinaten des relativen Extrempunktes sowie die Koordinaten des Wendepunktes des Graphen $\mathbf{G_f}$.

Mögliches Zwischenergebnis: $\mathbf{f'(x) = \dfrac{-2\cdot x + 4}{x^3}}$

1. Ableitung: $\quad f'(x) := \dfrac{d}{dx} f(x) \qquad f'(x) = -\dfrac{2\cdot(x-2)}{x^3}$

Zähler abrufen: $\quad z'(x) := \mathbf{numer}(f'(x)) \rightarrow 4 - 2\cdot x$

Horizontale Tangenten: $\quad z'(x) = 0 \rightarrow 4 - 2\cdot x = 0 \ \mathbf{auflösen}, x \ \rightarrow 2$

		0		2	
Zähler:	pos		pos		neg
Nenner:	pos		pos		pos
f '(x)	pos		pos		neg
G_f	sms		sms		smf
		Pol		HP	

$f(2) = \dfrac{3}{2}$

HP(2/1,5)

2. Ableitung: $f''(x) := \frac{d}{dx} f'(x)$ $\quad f''(x) = \frac{4 \cdot (x-3)}{x^4}$

Zähler abrufen: $z''(x) := \text{numer}(f''(x)) \rightarrow 4 \cdot x - 12$

Flachpunkte: $z''(x) = 0 \rightarrow 4 \cdot x - 12 = 0 \text{ auflösen}, x \rightarrow 3$ einfache NS der 2. Abl., d.h.

Wendepunkt: $f(3) = \frac{13}{9} = 1.44$ **WP(3/1,44)**

Teilaufgabe 1.2.3 (7 BE)
Bestimmen Sie den Funktionsterm der Geraden t, die den Graphen von **f** im Punkt **P(1/y_P)** berührt.
Berechnen Sie auch den weiteren gemeinsamen Punkt dieser Geraden mit dem Graphen von **f** .

$y_P := f(1)$ $\quad y_P = 1$

Steigung: $m := f'(1)$ $\quad m = 2$

Gerade t: $t(x) := f'(1) \cdot (x-1) + f(1)$ $\quad t(x) = 2 \cdot x - 1$

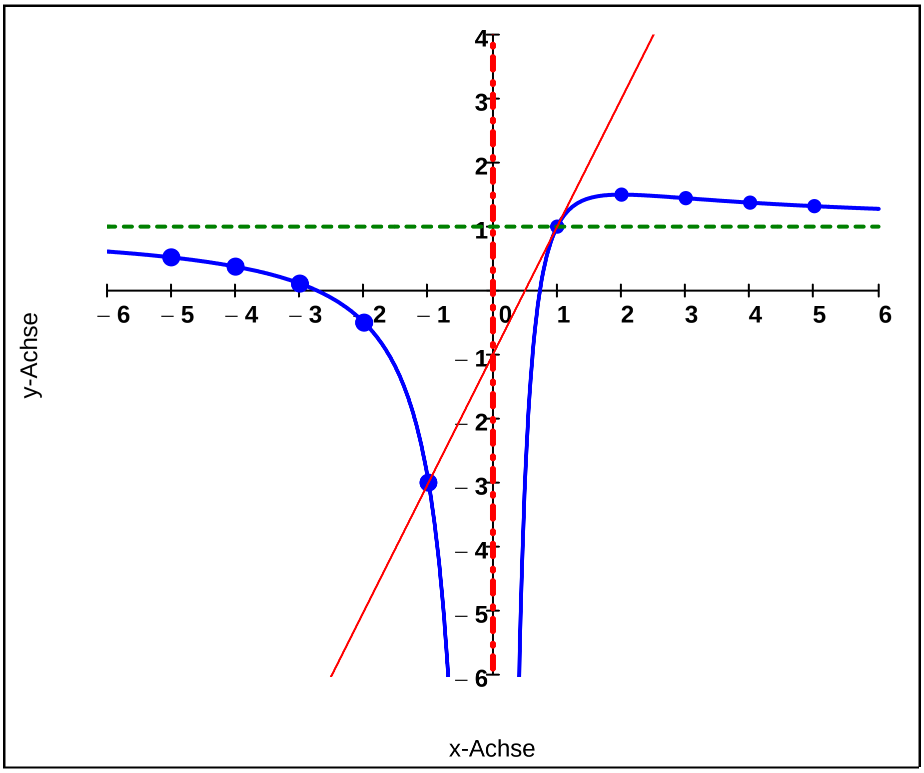
$f(x) = t(x) \rightarrow \frac{x^2 + 2 \cdot x - 2}{x^2} = 2 \cdot x - 1 \text{ auflösen} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ Berührpunkt: (1/1) ist bekannt

weiterer **Schnittpunkt:** $f(-1) = -3$ **SP(-1/-3)**

Teilaufgabe 1.2.4 (7 BE)

Zeichnen sie den Graphen der Funktion **f** und die Gerade g in ein kartesisches Koordinatensystem im Bereich $-5 \le x \le 5$. Verwenden Sie dazu die bisherigen Ergebnisse und berechnen Sie zusätzlich die Funktionswerte $f_0(-5)$ und $f_0(5)$.

Maßstab auf beiden Achsen: **1 LE = 1 cm**



Teilaufgabe 1.3.0

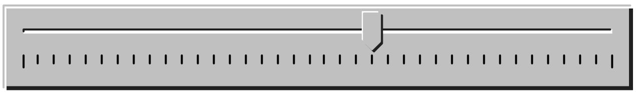
Der Graph von f_0 schließt mit seiner waagrechten Asymptote und der Geraden $x = u$ $(u \in \mathbb{R}$ und $u > 1)$ ein vollständig im I. Quadranten liegendes Flächenstück ein.

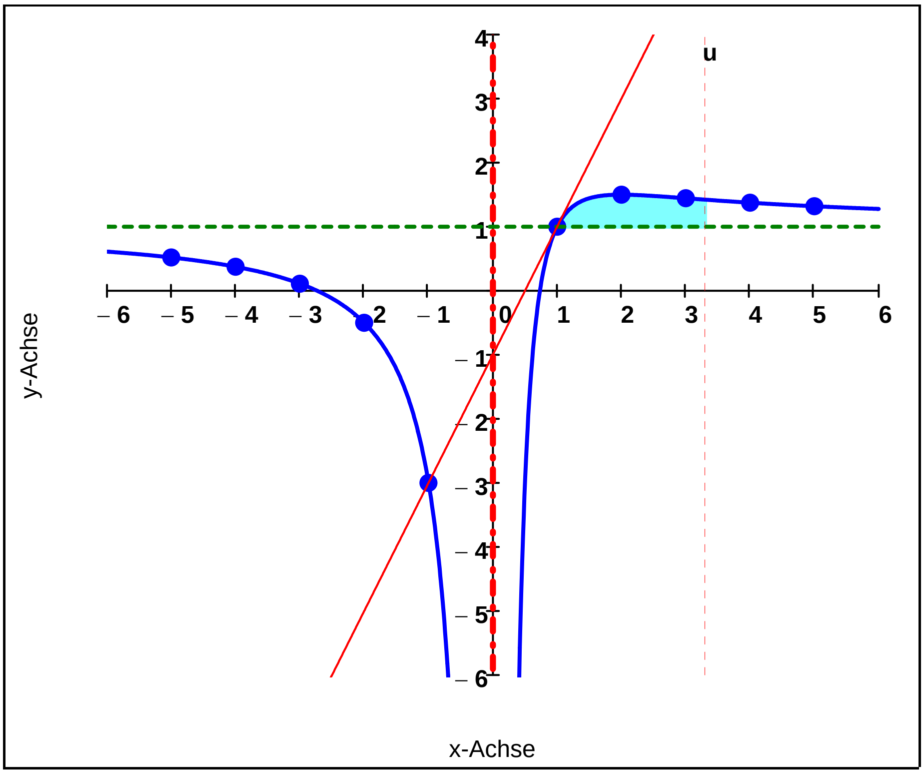
Teilaufgabe 1.3.1 (8 BE)

Zeigen Sie, dass der Flächeninhalt $A(u)$ dieses Flächenstücks in Abhängigkeit von u wie folgt dargestellt werden kann: $A(u) = 2 \cdot \ln(u) + \frac{2}{u} - 2$.

Untersuchen sie auch, ob $A(u)$ für $u \rightarrow \infty$ einen Grenzwert besitzt.

Wählen Sie:





$u = 3.3$

Schraffur bis
u = 3,3
für Aufg. 1.3.2

Stammfunktion: $\displaystyle\int (f(x) - g(x))\,dx = 2 \cdot \ln(x) + \frac{2}{x}$

Flächenberechnung: $\displaystyle A(u) := \int_1^u (f(x) - g(x))\,dx \qquad A(u) = 2 \cdot \ln(u) + \frac{2}{u} - 2$

$$\lim_{u \to \infty} \left(2 \cdot \ln(u) + \frac{2}{u} - 2\right) \rightarrow \infty$$

kein endlicher Grenzwert

Teilaufgabe 1.3.2 (8 BE)
Berechnen Sie mit dem Newton-Verfahren einen Näherungswert für u, für den $A(u) = 1$ gilt. Beginnen Sie dabei mit dem Startwert $u_0 = 3$, führen Sie drei Näherungsschritte durch und geben Sie das Ergebnis auf zwei Nachkommastellen gerundet an. Schraffieren Sie das entsprechende Flächenstück mit $A(u) = 1$ im Diagramm aus 1.2.4.

Differenzfunktion: $D(u) := A(u) - 1$

Ableitungsfunktion: $D'(u) := \frac{d}{du}D(u)$

Startwert: $u_0 := 3$

1. Näherung: $u_1 := u_0 - \frac{D(u_0)}{D'(u_0)}$ $\qquad u_1 = 3.306$

2. Näherung: $u_2 := u_1 - \frac{D(u_1)}{D'(u_1)}$ $\qquad u_2 = 3.314$

3. Näherung: $u_3 := u_2 - \frac{D(u_2)}{D'(u_2)}$ $\qquad u_3 = 3.314$

Teilaufgabe 2
Beim Ladevorgang eines bestimmten Kondensators kann die Stromstärke $J(t)$ in Abhängigkeit von der Zeit t mathematisch idealisiert und ohne Verwendung von Einheiten durch den folgenden Funktionsterm dargestellt werden: $J(t) = 130 \cdot e^{-0.25 \cdot t}$ für $0 \le t \le t_E$;
t_E ist der Zeitpunkt, zu dem der Ladevorgang beendet wird.

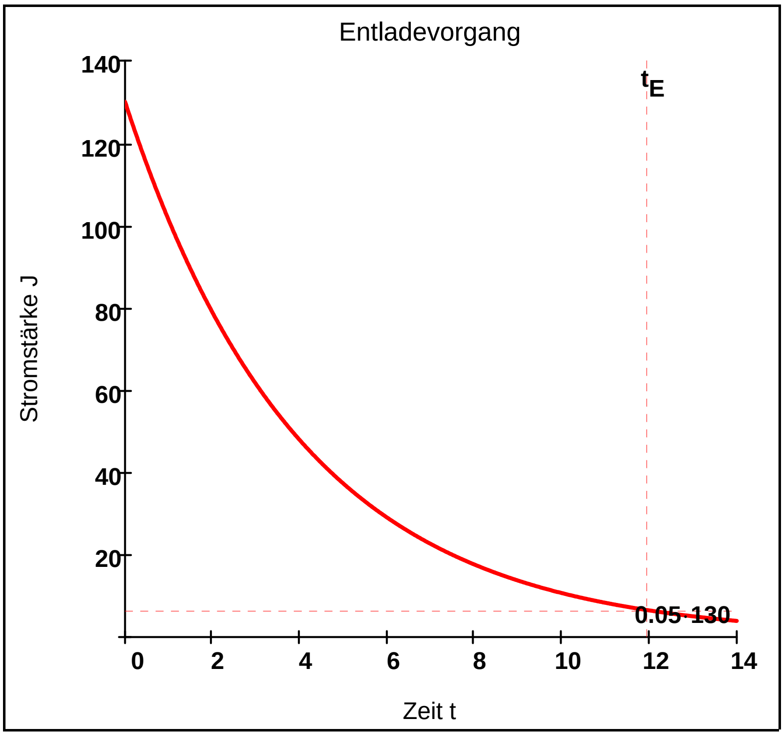
Teilaufgabe 2.1 (4 BE)
Der Zeitpunkt t_E ist erreicht, wenn $J(t)$ unter **5%** seines Anfangswertes sinkt.
Zeigen Sie, dass gilt: $t_E \approx 12$.

$$J(t) := 130 \cdot e^{-\frac{t}{4}}$$

$$0.05 \cdot 130 = 130 \cdot e^{\frac{-t_E}{4}} \rightarrow 6.5 = 130 \cdot e^{-\frac{t_E}{4}} \qquad \Leftrightarrow \qquad -\frac{t_E}{4} = \ln(0.05)$$

$$t_E := -(\ln(0.05) \cdot 4) \qquad t_E = 12$$

Teilaufgabe 2.2 (5 BE)
Stellen Sie in einem kartesischen Kooridnatensystem für den betrachteten Ladevorgang den Graph der Stromstärke in Abhängigkeit von der Zeit dar. Wählen Sie dazu selbst einen geeignete-ten Maßstab und berechnen Sie geeignete Funktionswerte.



$t_W =$	$J(t_W) =$
0	130
1	101.2
2	78.8
3	61.4
4	47.8
5	37.2
6	29
7	22.6
8	17.6
9	13.7
10	10.7
11	8.3
12	6.5
13	5
14	3.9

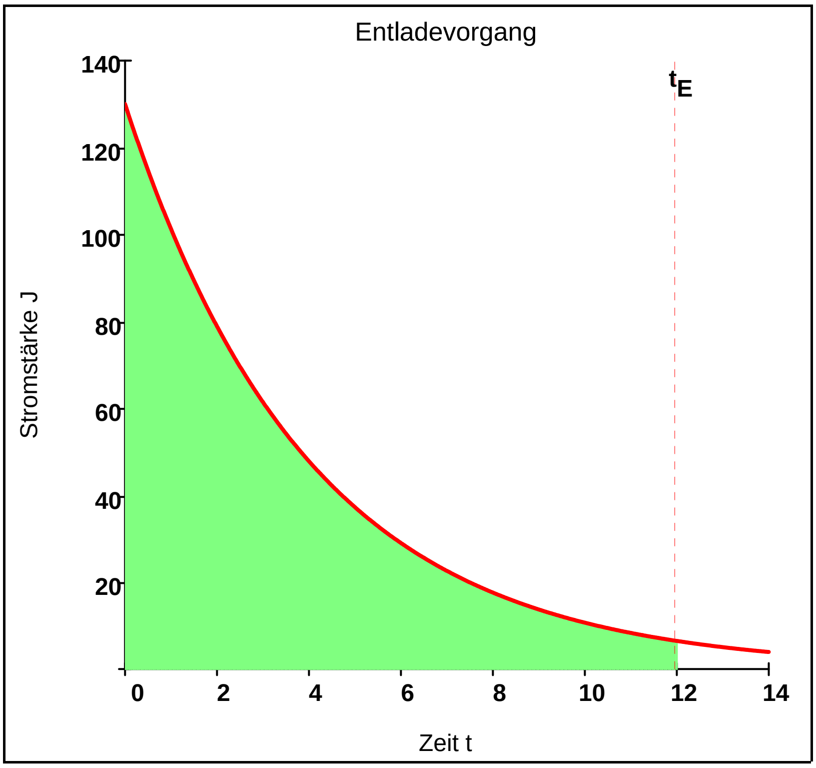
Teilaufgabe 2.3.0
Die im Zeitintervall von t_1 bis t_2 transportierte Ladung Q lässt sich durch folgende Integration berechnen:

$$Q = \int_{t_1}^{t_2} J(t)\, dt\,.$$

Teilaufgabe 2.3.1 (4 BE)
Berechnen Sie die Maßzahl der Ladung des betrachteten Kondensators zum Zeitpunkt t_E, und stellen Sie diese Maßzahl im Diagramm aus 2.2 gaphisch dar.

Stammfunktion: $\int J(t)\, dt \rightarrow -520 \cdot e^{-\frac{t}{4}}$

Ladung: $Q(t_E) := \int_0^{t_E} J(t)\, dt \qquad Q(t_E) = 494.0$



Teilaufgabe 2.3.2 (3 BE)
Berechnen Sie die theoretisch maximale Ladung, die sich für $t_E \rightarrow \infty$ ergeben würde, und den Prozentsatz, zu dem der Kondensator zum Zeitpunkt t_E geladen ist.

$$\lim_{t_E \to \infty} \left(-520 \cdot \exp\left(\frac{-1}{4} \cdot t_E\right) + 520\right) \rightarrow 520 \qquad t_E := 12$$

$$\frac{494}{520} = \frac{19}{20} \qquad \text{Anteil} := \frac{494}{520} \qquad \text{Anteil} = 95 \cdot \%$$